

УДК 519.63 + 519.64 + 621.318

Я. Л. Гурьева, А. В. Ильин, В. П. Ильин*(Новосибирск, Россия – Хьюстон, США)***МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ***

Анализируется точность и скорость вычислений магнитного поля осесимметричной катушки с током. Предлагаются различные способы вычислений на основе применения адаптивной неравномерной сетки, конечно-разностных аппроксимаций высокого порядка и полуаналитического вычисления граничных условий.

Введение. Вычисление осесимметричного магнитного поля, порождаемого током в катушке, является часто встречающейся задачей при моделировании течения плазмы, заряженных пучков частиц [1–3] и других физических задач.

Задача магнитостатики в общем случае описывается системой векторных уравнений Максвелла [4]:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \rho, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1)$$

где \mathbf{B} – вектор магнитной индукции; μ – магнитная проницаемость; ρ – плотность тока; \mathbf{A} – векторный потенциал.

Задача решается с помощью конечно-разностных, конечно-элементных или конечно-объемных методов (МКР, МКЭ и МКО соответственно), при этом моделирование с заданной точностью требует значительного количества сеточных узлов (например, несколько сотен в одном направлении).

Теоретически магнитное поле катушки произвольного сечения может быть получено численным интегрированием по сечению аналитических формул [4]. Если число точек сетки и количество квадратурных точек при численном интегрировании велико, то вычислительные затраты могут быть чрезмерными. Однако численное интегрирование является полезным для вычисления магнитного потенциала на границе расчетной области, который может быть использован для численного решения краевой задачи.

Цель настоящей работы состоит в следующем. Предлагается компактная девятиточечная конечно-разностная аппроксимация четвертого порядка для

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00579).

равномерной сетки и достаточно гладкого решения. Описывается обобщение дискретизации высокого порядка с использованием конечно-объемного подхода. Вводится множество параметрических девятиточечных конечно-объемных аппроксимаций уравнения (2) с кусочно-постоянной правой частью на неравномерной прямоугольной сетке. При значении весового параметра $w = 16/15$ конечно-объемная аппроксимация в случае гладкой правой части и равномерной сетки совпадает с описанной девятиточечной конечно-разностной схемой. Широко известна аналогичная девятиточечная конечно-разностная схема для уравнения Пуассона в декартовых координатах (см., например, [5]); соответствующие конечно-объемные аппроксимации приведены в [6, 7]. Приводится также вычисление граничных значений численного решения при помощи непосредственного интегрирования по сечению катушки по формуле (26), которое является аналитическим по z -координате и численным (по квадратурным формулам) по r -координате.

Представлены результаты численных экспериментов на основе пятиточечной конечно-разностной схемы на неравномерной адаптивной сетке и предложенной аппроксимации высокого порядка. Решение итоговой системы линейных алгебраических уравнений получается при помощи быстрых неявных методов неполной факторизации [5].

Приводится сравнительный анализ пяти- и девятиточечных аппроксимаций, вычислительная сложность различных алгоритмов и возможные подходы к повышению эффективности расчетов магнитного поля катушки.

1. Численные методы. В данном разделе описываются численные алгоритмы решения задачи магнитостатики (1), которая может быть представлена в следующей скалярной форме в случае цилиндрической симметрии:

$$L_r u + L_z u \equiv -r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(r, z) = \mu r \rho, \quad (r, z) \in \Omega, \quad (2)$$

где $u = rA_\theta$ – магнитный поток; ρ – плотность азимутальной компоненты тока (обычно постоянная в катушке и нулевая вне ее). Для простоты будем рассматривать ограниченную прямоугольную расчетную область $\Omega = \{0 < r < R_3, Z_0 < z < Z_3\}$.

На оси $r = 0$ граничное условие $u = 0$ вытекает из определения неизвестной функции в уравнении (2). Можно положить и $u = 0$ также в точках, достаточно удаленных от катушки, что является обычным условием для определения искусственной границы расчетной области. Недостаток такой приближенной постановки краевой задачи – значительная ошибка при выборе границы слишком близко от катушки и возрастание вычислительной сложности алгоритмов при удалении границы.

Мы будем использовать условие Дирихле $u = u(r, z)$ на границе Ω , получаемое из точного интегрального представления поля катушки и применения квадратурных формул, обеспечивающих требуемую точность. Отметим, что такой подход может применяться и для определения поля во всей расчетной области, но это, как показано далее, не является экономичным.

1.1. Компактная конечно-разностная схема. Пусть $u_{i,j}$ – значение функции $u(r_i, z_j)$ в узле прямоугольной неравномерной сетки: $r_i = r_{i-1} + h_i^r$, $i = 1, \dots, N_r + 1$; $z_j = z_{j-1} + h_j^z$, $j = 1, \dots, N_z + 1$, где h_i^r , h_j^z – сеточные шаги, а $r_0 = 0, r_{N_r+1}, z_0$ и z_{N_z+1} – координаты границ расчетной области Ω .

Проведем построение компактной конечно-разностной аппроксимации уравнения (2) четвертого порядка на равномерной сетке с шагами $h_r^r = h_r$, $h_z^z = h_z$ (под «компактностью» понимается включение в аппроксимационный шаблон только ближайших к центральной сеточных точек). Для этого определим отмасштабированный «радиальный» одномерный дифференциальный оператор $\tilde{L}_r u = \frac{1}{r} L_r u = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$ и его трехточечную аппроксимацию со следующим свойством:

$$(\tilde{L}_r^h u)_{i,j} \equiv \frac{1}{h_r^2} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{r_{i-1/2}} + \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{r_{i+1/2}} \right) = \left(\tilde{L}_r u - \frac{h_r^2}{12} \tilde{L}_r r \tilde{L}_r u \right)_{i,j} + O(h^4), \quad (3)$$

где $r_{i\pm 1/2} = (r_i + r_{i\pm 1})/2$; справедливость этого соотношения можно проверить, используя разложение в ряд Тейлора.

Из выражения (3) и аналогичного определения второго одномерного разностного оператора

$$(L_z^h u)_{i,j} \equiv \frac{1}{h_z^2} (2u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}) = \left(L_z u - \frac{h_z^2}{12} L_z^2 u \right)_{i,j} + O(h^4) \quad (4)$$

получаем следующую девятиточечную схему порядка $O(h^4)$:

$$\begin{aligned} (L_0^h u)_{i,j} &\equiv \left[r \tilde{L}_r^h u + L_z^h u - \frac{r}{12} (h_r^2 \tilde{L}_r L_z^h u + h_z^2 L_z^h \tilde{L}_r u) \right]_{i,j} = \\ &= f_{i,j} - \frac{1}{12} (r h_r^2 \tilde{L}_r^h f + h_z^2 L_z^h f)_{i,j} + O(h^4). \end{aligned} \quad (5)$$

Справедливость этого соотношения доказывается подстановкой разложений (3), (4) в (5) и использованием исходного уравнения (2) для членов второго порядка. Предполагается, что функции u, f имеют ограниченные производные четвертого и шестого порядков.

Вводя локальные номера узлов девятиточечного сеточного шаблона в соответствии с рис. 1, можно записать итоговое сеточное уравнение в точке сетки (i, j) в виде

$$p0_{i,j} v_0 - \sum_{k=1}^8 p k_{i,j} v_k = f 0_{i,j}, \quad (6)$$

где коэффициенты и правая часть для $r_i > 0$ выводятся из перемножения одномерных конечно-разностных операторов и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p0_{i,j} &= \sum_{k=1}^8 p k_{i,j}, \\ p3_{i,j} &= \frac{1}{6h_r^2 r_{i+1/2}} \left(5 - \frac{h_r^2}{h_z^2} \right) = p1_{i+1,j}, \end{aligned}$$

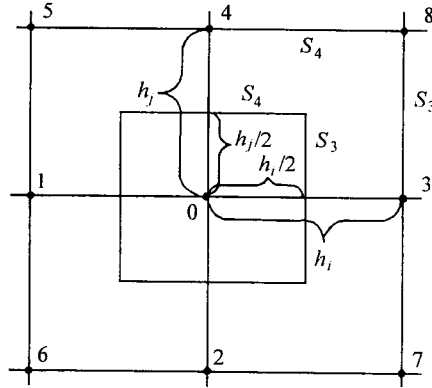


Рис. 1. Локальная нумерация девятиточечной конечно-разностной схемы (6) и два конечных объема вокруг сеточного узла (i, j)

$$p2_{i,j} = \frac{2r_i}{3h_z^2(4r_i^2 - h_r^2)} \left(5 - \frac{h_z^2}{h_r^2} - 3 \frac{h_r^2}{2r_i^2} \right) = p4_{i,j}, \quad (7)$$

$$p7_{i,j} = \frac{1}{12r_{i+1/2}} \left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) = p8_{i,j} = p5_{i+1,j} = p6_{i+1,j},$$

$$f0_{i,j} = f_{i,j} - \frac{1}{12} \left[\frac{r_i}{r_{i-1/2}} (f_{i,j} - f_{i-1,j}) + \frac{r_i}{r_{i+1/2}} (f_{i,j} - f_{i+1,j}) + 2f_{i,j} - f_{i,j-1} - f_{i,j+1} \right].$$

Все коэффициенты (7) положительны при выполнении условий

$$2/7 < h_r^2/h_z^2 < 5. \quad (8)$$

Если на всей границе $\partial\Omega$ расчетной области заданы условия Дирихле $u|_{\partial\Omega} = g(r, z)$ (в простейшем случае $g = 0$), то систему линейных уравнений (6), (7) можно записать в векторно-матричной форме:

$$A_h u^h = f^h, \quad u^h = \{u_{i,j}\}, \quad f^h = \{f0_{i,j}\}, \quad (9)$$

где A_h – стилтьесова матрица, а конкретнее симметричная и положительно-определенная при любом соотношении шагов сетки, и монотонная ($A_h^{-1} > 0$, см., например, [5]) при условиях (8). Сходимость $O(h^4)$ для ошибки схемы может быть доказана стандартными приемами в эвклидовой и максимальной нормах [6].

Отметим, что условие (8) не является необходимым для существования и сходимости решения системы девятиточечных уравнений (6). Однако монотонность – полезное свойство, так как для $f^h \geq 0$ и $f^h \neq 0$ решение всегда по-

ложительно и «достаточно гладкое». Это важно также для численного дифференцирования, особенно в подобластях с малыми значениями решения. Кроме того, эффективный итерационный алгоритм IMIF9 [5], используемый при решении алгебраической системы, применим только для стилтесовых матриц.

На неравномерной сетке может быть построена также более простая пятиточечная схема:

$$(h_{j-1}^z + h_j^z) \left[\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{r_{i-1/2} h_{i-1}^r} + \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{r_{i+1/2} h_i^r} \right] + \frac{h_{i-1}^r + h_i^r}{r_i} \left[\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_{j-1}} + \frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{h_j^z} \right] = (h_{i-1}^r + h_i^r)(h_{j-1}^z + h_j^z) \frac{f_{i,j}}{2r_i}, \quad (10)$$

которая имеет первый порядок локальной аппроксимации в общем случае, т. е. для произвольных шагов сетки, и порядок $O(h^2)$ на равномерной сетке или при $|h_i - h_{i-1}| = O(h^2)$, т. е. когда сетка квазиравномерная. Преимуществами этой схемы являются монотонность матрицы системы для произвольных шагов сетки h_i^r, h_j^z и меньшая заполненность матрицы.

1.2. *Конечно-объемные аппроксимации.* При применении конечно-разностных аппроксимаций теоретически невозможно получить аппроксимацию повышенной точности, если функции u, f не имеют достаточно гладких производных.

Второй подход к построению сеточных уравнений – применение конечно-объемной аппроксимации для кусочно-гладкой функции f , которая основана на аппроксимации интегрального уравнения, полученного формальным интегрированием дифференциального уравнения (2). Построенная ниже схема совпадает с конечно-разностной аппроксимацией четвертого порядка (5) в случае равномерной сетки. Подобная конечно-объемная схема для уравнения Пуассона в декартовых координатах содержится в работах [6, 7].

Согласно [7], вокруг узла сетки (i, j) вводятся малый и большой объемы:

$$V_{i,j} = \{r_i - h_{i-1}/2 \leq r \leq r_i + h_i/2, \quad z_j - h_{j-1}/2 \leq z \leq z_j + h_j/2\}, \quad (11)$$

$$\bar{V}_{i,j} = \{r_{i-1} \leq r \leq r_{i+1}, \quad z_{j-1} \leq z \leq z_{j+1}\}.$$

Обозначим их границы через $S_{i,j}$ и $\bar{S}_{i,j}$ соответственно (см. рис. 1).

Проинтегрируем обе части уравнения (2) по объемам $V_{i,j}$ и $\bar{V}_{i,j}$ и рассмотрим их линейную комбинацию с весовым параметром $0 \leq w \leq 1$:

$$I_{i,j} \equiv w \int_{S_{i,j}} I^n dS + (1-w) \int_{\bar{S}_{i,j}} I^n dS = w \int_{V_{i,j}} \frac{f}{r} dr dz + (1-w) \int_{\bar{V}_{i,j}} \frac{f}{r} dr dz. \quad (12)$$

Здесь I^n – проекция вектора $I = (I_r, I_z) = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, причем предполагается, что скачки функции f возможны только по сеточным линиям $r = r_i, z = z_j$.

Для аппроксимации уравнения (12) вводятся подобъемы $V_{i,j}^k, \bar{V}_{i,j}^k, k = 1, 2, 3, 4$, которые суть результат деления объемов $V_{i,j}$ и $\bar{V}_{i,j}$ сеточными линиями на четыре части: $V_{i,j} = \bigcup_{k=1}^4 V_{i,j}^k, \bar{V}_{i,j} = \bigcup_{k=1}^4 \bar{V}_{i,j}^k$. Определяются соответствующие потоки $I_{i,j}^k$ через поверхности подобъемов $S_{i,j}^k$ и $\bar{S}_{i,j}^k$:

$$I_{i,j} = \bigcup_{k=1}^4 I_{i,j}^k. \quad (13)$$

С помощью (12) можно выписать подробно необходимое соотношение для $k=3$ (правый верхний подобъем при $r > r_i, z > z_j$):

$$\begin{aligned} -I_{i,j}^{(3)} = & w \left(\int_{z_j}^{z_{j+1/2}} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{i+1/2} dz + \int_{r_i}^{r_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{j+1/2} \frac{dr}{r} \right) + \\ & + (1-w) \left[\int_{z_i}^{z_{j+1}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_i + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{i+1} \right) dz + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_j + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{j+1} \right) \frac{dr}{r} \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Для улучшения аппроксимации производных включены дополнительные интегралы по «внутренним» границам между подобъемами. Важно, что в сумме (13) такие члены аннулируются в силу непрерывности функции u и ее нормальных производных.

Применяя простейшие квадратурные формулы и линейную интерполяцию подынтегральных членов, поток $I_{i,j}^{(3)}$ можно записать в виде линейной формы от четырех неизвестных значений u_k :

$$I_{i,j}^{(3)} = p00_{i,j} u_0 + p03_{i,j} u_3 + p04_{i,j} u_4 + p08_{i,j} u_8. \quad (15)$$

Если ввести вектор с четырьмя элементами $\bar{u}^{(3)} = (u_0, u_3, u_4, u_8)$, которые являются значениями решения в вершинах конечного объема $V_{i,j}^{(3)}$, и вектор $\bar{I}^{(3)} = (I_0^{(3)}, I_3^{(3)}, I_4^{(3)}, I_8^{(3)})$ с элементами – «частичными» потоками вокруг соответствующих узлов (например, $I_0^{(3)} = I_{i,j}^{(3)}$ из (14)), то можно записать следующее векторное соотношение:

$$\bar{I}^{(3)} = A^{(3)} \bar{u}^{(3)}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} p00_{i,j} & p03_{i,j} & p04_{i,j} & p08_{i,j} \\ p30_{i,j} & p33_{i,j} & p34_{i,j} & p38_{i,j} \\ p40_{i,j} & p43_{i,j} & p44_{i,j} & p48_{i,j} \\ p80_{i,j} & p83_{i,j} & p84_{i,j} & p88_{i,j} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Симметричная матрица четвертого порядка $A^{(3)}$ ($pk_{i,j} = pl_{i,j}$) называется локальной матрицей баланса по аналогии с локальной матрицей жесткости в МКЭ (см., например, [2]).

Легко показать, что элементы $pk_{i,j}$ «глобальной» матрицы баланса A_h системы (6), (9) представимы через элементы локальных матриц баланса:

$$\begin{aligned}
p0_{i,j} &= p00_{i,j} + p33_{i-1,j} + p44_{i,j-1} + p88_{i-1,j-1}, \\
p3_{i,j} &= p1_{i,j} = p03_{i,j} + p08_{i,j-1}, \\
p4_{i,j} &= p2_{i,j} = p04_{i,j} + p38_{i-1,j}, \\
p8_{i,j} &= p7_{i,j} = p5_{i,j} = p6_{i,j} = p08_{i,j}.
\end{aligned} \tag{17}$$

На практике вместо реализации этих формул предпочтительнее получать глобальную матрицу A_h при поэлементном подходе, формулы которого в подобъеме $V_{i,j}^k$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned}
p0_{i,j} &:= p0_{i,j} + p00_{i,j}, & p0_{i+1,j} &:= p0_{i+1,j} + p33_{i,j}, \\
p0_{i,j+1} &:= p0_{i,j+1} + p44_{i,j}, & p0_{i+1,j+1} &:= p0_{i+1,j+1} + p88_{i,j}, \\
p3_{i,j} &:= p3_{i,j} + p03_{i,j}, & p3_{i,j+1} &:= p3_{i,j+1} + p48_{i,j}, \\
p4_{i,j} &:= p4_{i,j} + p04_{i,j}, & p4_{i+1,j} &:= p4_{i+1,j} + p38_{i,j}, \\
p8_{i,j} &:= p8_{i,j} + p08_{i,j}, & p7_{i,j+1} &:= p7_{i,j+1} + p34_{i,j}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Можно использовать разные аппроксимации интегралов в (14). Мы применяем квадратуры, которые следуют из линейной интерполяции подынтегральных функций в подобъеме $\bar{V}_{i,j}^3$:

$$\begin{aligned}
-I_{i,j}^3 &= w \left\{ \frac{3h_j^z}{8h_i^r r_{i+1/2}} [3(u_{i,j} - u_{i+1,j}) + u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1}] + \right. \\
&+ \frac{1}{16h_j^z} \left[\left(\frac{h_i^r}{r_{i+1/2}} \right) (u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1}) + \left(7\gamma_{i+1/2} - \frac{h_i^r}{r_{i+1/2}} \right) (u_{i,j} - u_{i,j+1}) \right] \Big\} + \\
&+ (1-w) \left[\frac{h_j^z}{h_i^r r_{i+1/2}} (u_{i,j} - u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1}) + \right. \\
&\left. + \frac{\gamma_{i+1/2}}{h_j^z} (u_{i,j} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1}) \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Значения $\gamma_{i+1/2}$ определяются из условия, что элементы $pk_{i,j}$ глобальной матрицы A_h , которые «собираются» из элементов $pk_{i,j}$ локальных матриц баланса по формулам (15)–(18), совпадают с коэффициентами (7) компактной разностной схемы четвертого порядка в случае равномерной сетки и $w = 16/15$. Это условие имеет рекуррентное представление

$$\gamma_{i-1/2} = \frac{h_i^r + h_{i-1}^r}{r_i} - \gamma_{i+1/2}, \quad \gamma_{N_r+1/2} = \frac{h_{N_r+1}^r}{r_{N_r+1/2}}, \quad i = N_r, \dots, 1, \tag{20}$$

и обеспечивает выполнение следующих формул для элементов локальной матрицы баланса:

$$p03_{i,j} = p48_{i,j} = \frac{1}{r_{i+1/2}} \left[\left(1 - \frac{5w}{8}\right) \frac{h_j^z}{h_i^r} - \frac{w}{16} \frac{h_i^r}{h_j^z} \right] - \left(1 - \frac{15w}{16}\right) \frac{\gamma_{i+1/2}}{h_j^z},$$

$$p04_{i,j} = p38_{i,j} = \left(1 - \frac{9w}{16}\right) \frac{\gamma_{i+1/2}}{h_j^z} - \frac{1}{r_{i+1/2}} \left[\frac{w}{16} \frac{h_i^r}{h_j^z} + \left(1 - \frac{7w}{8}\right) \frac{h_j^z}{h_i^r} \right],$$

$$p08_{i,j} = p34_{i,j} = \frac{1}{r_{i+1/2}} \left[\left(1 - \frac{7w}{8}\right) \frac{h_j^z}{h_i^r} + \frac{w}{16} \frac{h_i^r}{h_j^z} \right] + \left(1 - \frac{15w}{16}\right) \frac{\gamma_{i+1/2}}{h_j^z},$$

$$p00_{i,j} = p03_{i,j} + p04_{i,j} + p08_{i,j} = p33_{i,j} = p44_{i,j} = p88_{i,j}, \quad pkl_{i,j} = plk_{i,j}.$$

Аппроксимация правой части уравнения (12) может быть проделана также поячеечно, поэтому значение $f0_{i,j}$ из (9) представимо как

$$f0_{i,j} = f_{0,i,j}^{(3)} + f_{3,i-1,j}^{(3)} + f_{4,i,j-1}^{(3)} + f_{8,i-1,j-1}^{(3)}, \quad (21)$$

где результатом численного интегрирования по подобию $V_{i,j}^{(3)}$ являются следующие «локальные» члены:

$$f_{0,i,j}^{(3)} = \left[\left(1 - \frac{3w}{4}\right) \rho_{i,j} - \frac{8-7w}{16} \left(\frac{r_i \rho_{i,j} - r_{i+1} \rho_{i+1,j}}{r_{i+1/2}} + \rho_{i,j} - \rho_{i,j+1} \right) \right] h_i^r h_j^z, \quad (22)$$

$$f_{3,i,j}^{(3)} = \left[\left(1 - \frac{3w}{4}\right) \rho_{i+1,j} - \frac{8-7w}{16} \left(\frac{r_{i+1} \rho_{i+1} - r_i \rho_{i,j}}{r_{i+1/2}} + \rho_{i+1,j} - \rho_{i+1,j+1} \right) \right] h_i^r h_j^z, \quad (23)$$

$$f_{4,i,j}^{(3)} = \left[\left(1 - \frac{3w}{4}\right) \rho_{i,j+1} - \frac{8-7w}{16} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{r_{i+1} \rho_{i,j+1} - r_{i+1} \rho_{i+1,j+1}}{r_{i+1/2}} + \rho_{i,j+1} - \rho_{i,j} \right) \right] h_i^r h_j^z, \quad (24)$$

$$f_{8,i,j}^{(3)} = \left[\left(1 - \frac{3w}{4}\right) \rho_{i+1,j+1} - \frac{8-7w}{16} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{r_{i+1} \rho_{i+1,j+1} - r_i \rho_{i,j+1}}{r_{i+1/2}} + \rho_{i+1,j+1} - \rho_{i+1,j} \right) \right] h_i^r h_j^z. \quad (25)$$

Здесь $\rho_{i,j} = f(r_i, z_j)/r_i$ на линии скачка соответствует «собственному» под-объему. Легко проверить, что формулы (21)–(25) при $w = 16/15$ дают значение $f_{0,i,j}$ из (7) в случае равномерной сетки. Заметим, что коэффициенты в пп. 1.1 и 1.2 отличаются множителем $v_{i,j} = \left(1 - \frac{3}{4}w\right)(h_i^r + h_{i-1}^r) \frac{(h_j^z + h_{j-1}^z)}{4}$,

который является «взвешенным» объемом ячейки.

Эти формулы обеспечивают симметричность локальной матрицы баланса $A^{(3)}$ и глобальной матрицы A_h . Значения $\gamma_{i \pm 1/2}$ положительны для квази-равномерной сетки. В общем случае неравномерной сетки предложенная аппроксимация имеет порядок только $O(h)$, а матрица A_h является монотонной только при достаточно строгих условиях на отношение сеточных шагов.

1.3. *Вычисление граничных условий.* Известно [4], что магнитное поле единичного витка с током для $\mu = 1$ определяется аналитически следующими формулами для осесимметричной азимутальной компоненты векторного потенциала A и r - и z -компонент вектора индукции B :

$$A_\theta(r, z) = \frac{4J}{k} \sqrt{\frac{r'}{r}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right], \quad k^2 = \frac{4rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}, \quad (26)$$

$$B_r(r, z) = \frac{2J}{r\sqrt{(r'+r)^2 + (z-z')^2}} \left[\frac{(r')^2 + r^2 + (z-z')^2}{(r'-r)^2 + (z-z')^2} E - K \right], \quad (27)$$

$$B_z(r, z) = \frac{2J}{\sqrt{(r'+r)^2 + (z-z')^2}} \left[\frac{(r')^2 - r^2 - (z-z')^2}{(r'-r)^2 + (z-z')^2} E + K \right]. \quad (28)$$

Здесь J, r' – ток и радиус витка; z' – координата его центра в цилиндрических координатах r, z ; K, E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [8], для которых справедливы следующие представления в виде рядов:

$$\frac{1}{\pi} K = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right],$$

$$\frac{1}{\pi} E = \frac{1}{\pi} K - k^2 \left[\frac{1}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^2 + \frac{3}{5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^4 + \frac{4}{7} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 k^6 + \dots \right].$$

Из определения k, E и K следует, что $A(0, z) = B_r(0, z) = 0$.

Вычисление магнитного поля катушки прямоугольного сечения может быть проделано на основе интегрирования формул (27), (28) по сечению катушки:

$$S = \{0 < R_1 < r' < R_2, Z_1 < z' < Z_2\}. \quad (29)$$

Следующая формула, которую можно получить из (26), используется для вычисления граничных значений решения:

$$u(r, z) = \rho \int_{R_1}^{R_2} \int_{Z_1}^{Z_2} \sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2} M(k^2) dr' dz',$$

$$M(k^2) = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K - \frac{2}{\pi} E, \quad (30)$$

где ρ – постоянная по сечению катушки (29) плотность тока. Для подынтегрального члена $M(k^2)$ из представлений K, E может быть получено разложение

$$M(k^2) = k^4 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{8} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{2}{12} k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{3}{16} k^4 + \dots \right] = \sum_{p=0}^{\infty} c_p k^{4+2p}. \quad (31)$$

Для приближенного вычисления $M(k^2)$ используем при $k < 1$ отрезок ряда (31):

$$M_n(k^2) = \sum_{p=0}^n c_p k^{4+2p}. \quad (32)$$

Скорость сходимости $M_n(k^2)$ при $n \rightarrow \infty$ может быть оценена для точек (r, z) на границе расчетной области ($r = R_3$ или $z = Z_2$) и (r', z') в сечении катушки (29) следующим неравенством:

$$k^2 = \left(1 + \frac{(r-r')^2 + (z-z')^2}{4rr'} \right)^{-1} \leq \max \left\{ \left(1 + \frac{(R_3 - R_2)^2}{4R_3R_2} \right)^{-1}, \left(1 + \frac{(Z_3 - Z_1)^2}{4R_3R_2} \right)^{-1} \right\}.$$

Например, если взять $R_3 \geq 3R_2$ и $Z_3 - Z_1 \geq 2R_2$, то $k^2 \leq 0,75$. При удалении границы области от катушки значение k^2 уменьшается и ошибка аппроксимации $M(k^2)$ рядом $M_n(k^2)$ при фиксированном n также уменьшается, точнее, ошибка ε_n оценивается соотношением

$$\varepsilon_n = M(k^2) - M_n(k^2) = \sum_{p=n+1}^{\infty} c_p k^{4+2p} \leq c_{n+1} k^{4+2(n+1)} \sum_{l=0}^{\infty} k^{2l} \leq c_{n+1} k^{4+2(n+1)} / (1 - k^2) = \varepsilon_n.$$

Предлагается смешанная вычислительная стратегия, состоящая из аналитического интегрирования по z и численного интегрирования по r' с помощью квадратуры центральных прямоугольников

$$u(r, z) = \rho \int_{R_1}^{R_2} w_n(r') dr' + \tilde{\varepsilon}_n = \rho h_c \sum_{l=1}^m w_n(r'_l) + \tilde{\varepsilon}_n + \varepsilon_m^{(1)},$$

$$r'_i = R_1 + \left(l - \frac{1}{2} \right) h_c, \quad h_c = \frac{R_2 - R_1}{m}, \quad (33)$$

или квадратуры Симпсона

$$u(r, z) = \rho \frac{h_c}{6} (w_n(r_1'') + 4w_n(r_2'') + 2w_n(r_3'') + \dots + w_n(r_{2m+1}'')) + \tilde{\varepsilon}_n + \varepsilon_m^{(2)},$$

$$r_i'' = R_1 + \frac{(l-1)}{2} h_c, \quad (34)$$

или квадратуры Гаусса

$$u(r, z) = \rho h_c (c_1 w_n(r_1) + \dots + c_m w_n(r_m)) + \tilde{\varepsilon}_n + \varepsilon_m^{(3)}, \quad (35)$$

где

$$w_n(r') = \int_{Z_1}^{Z_2} \sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2} M_n(k^2) dz',$$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \rho \int_{R_1}^{R_2} \int_{Z_1}^{Z_2} \sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2} \varepsilon_n dr' dz' \leq$$

$$\leq \rho \sqrt{(R_2 + R_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} (R_2 - R_1)(Z_2 - Z_1) \varepsilon_n$$

для заданного целого m . Здесь $\varepsilon_m^{(i)}$, $i=1,2,3$, суть ошибки различных квадратур. Общая ошибка аппроксимации для $i=1,2$ есть

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_n + \varepsilon_m^{(i)} = O(h_c^\gamma + \bar{k}^{2n+6}), \quad \bar{k} = \max_{\substack{(r', z') \in S, \\ (r, z) \in \partial\Omega}} \{k(r, r', z, z')\},$$

где $\gamma=2$ для квадратуры (33) и $\gamma=4$ для (34), и она может быть сделана сколь угодно малой для достаточно больших m, n . Оптимальные точки r_k квадратуры Гаусса и коэффициенты c_k в (35) определены, например, в [9]. Ошибка $\varepsilon_m^{(3)}$ гауссовой квадратуры оценивается неравенством

$$\varepsilon_m^{(3)} \leq \frac{(R_2 - R_1)^{2m+1} (m!)^4}{[(2m)!]^3 (2m+1)} \max_{R_1 < r' < R_2} \left\{ \left| \frac{d^{2m} w_n(r')}{(dr')^{2m}} \right| \right\}.$$

Что касается ошибок ε_n , то для $k^2 \leq 0,75$, например, получаем $\varepsilon_{23} \leq 4,2 \cdot 10^{-9}$, $\varepsilon_{33} \leq 9,5 \cdot 10^{-12}$.

Для вычисления $w(r')$ используются вспомогательные рекуррентные соотношения для следующих интегралов:

$$\phi_p(x, t) = \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + t})^p}, \quad \phi_3(x, t) = \int \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + t})^3} = \frac{x}{t\sqrt{x^2 + t}}.$$

$$\phi_{2p+3}(x, t) = \frac{1}{t(2p+1)} \left(\frac{x}{(\sqrt{x^2 + t})^{2p+1}} + 2p\phi_{2p+1} \right), \quad p=1, 2, \dots \quad (36)$$

Если обозначить

$$\bar{\phi}_p(r, r', z, Z_1, Z_2) = \phi_p(z - Z_2, (r + r')^2) - \phi_p(z - Z_1, (r + r')^2),$$

то можно вывести итоговую формулу для вычисления $w_n(r'_i)$:

$$w_n(r'_i) = \sum_{p=0}^n c_p (4r'_i r)^{p+2} \bar{\phi}_{2p+3}(r, r'_i, z, Z_1, Z_2), \quad (37)$$

где коэффициенты c_p определены в выражении (31).

Устойчивое вычисление $w_n(r'_i)$ проводится с помощью следующей рекуррентной процедуры. Вводятся новые функции $\tilde{\phi}_{2p+3} = (4rr')^{p+3/2} \bar{\phi}_{2p+3}$, $p=0, 1, \dots$, которые находятся из соотношений

$$\tilde{\phi}_{2p+3} = \frac{1}{(2p+1)\beta} \times \left[\left(\frac{z - Z_2}{\left(\sqrt{\beta + \frac{(z - Z_2)^2}{4rr'}} \right)^{2p+1}} - \frac{z - Z_1}{\left(\sqrt{\beta + \frac{(z - Z_1)^2}{4rr'}} \right)^{2p+1}} \right) \sqrt{4rr'} + 2p\tilde{\phi}_{2p+1} \right],$$

$\beta = \frac{(r + r')^2}{4rr'}$, и $w_n(r'_i)$ вычисляется по формуле

$$w_n(r'_i) = w_{n-1}(r'_i) + \tilde{\phi}_{2n+3} \frac{n}{8 + 4(n-1)} \prod_{m=1}^n \left(\frac{2m-1}{2m} \right)^2.$$

Представленные формулы обеспечивают высокую теоретическую точность вычисления граничных условий, если значение k^2 не очень близко к единице.

2. Численные эксперименты. В данном разделе представлены результаты численных экспериментов трех типов. Расчеты проводились с применением следующих программ и алгоритмов. Изложенные в п. 1.2 формулы конечно-объемных аппроксимаций на неравномерных сетках, совпадающие с девятиточечной конечно-разностной схемой (6), (7) порядка $O(h^4)$ в случае равномерной сетки и гладкой функции $f(r, z)$, реализованы в программе FVSDE2 [7], которая включает быстрый итерационный модуль решения IMF9 (неявный метод неполной факторизации с ускорением по методу сопряженных градиентов для систем девятиточечных сеточных уравнений [5]). Пятиточечная конечно-разностная система (10) решалась с помощью прямого метода исключения Гаусса.

Первый пример – одномерная задача с точным аналитическим решением

$$u(r) = \begin{cases} \left(\frac{R_2 - R_1}{2} - d\right)r^2, & 0 \leq r \leq R_1; \\ \left(\frac{R_2}{2} - d\right)r^2 - \frac{R_1^3}{6} - \frac{r^3}{3}, & R_1 \leq r \leq R_2; \\ d(R_3^2 - r^2), \quad d = \frac{R_2^3 - R_1^3}{6R_3^2}, & R_2 \leq r \leq R_3, \end{cases}$$

которое соответствует граничным условиям $u(0) = u(R_3) = 0$ и кусочно-постоянной плотности тока: $\rho = 1$ при $R_1 \leq r \leq R_2$ и $\rho = 0$ в противном случае. Параметры расчетной области и катушки следующие: $0 \leq r \leq R_3 = 1$; $R_1 = 0,4$; $R_2 = 0,6$; $0 \leq z \leq 0,4$. В экспериментах по программе FVSDE2 с весовым параметром $w = 16/15$ расчеты дают нулевую ошибку (т. е. с точностью до ошибки итерационного решения, которая может быть задана заведомо малой) как на равномерной, так и на неравномерной сетке. Можно было ожидать, что ошибка решения будет величиной порядка $O(h^2)$ из-за разрывной правой части и неравномерной сетки, но оказалось, что ошибка даже лучше, чем $O(h^4)$.

Применение пятиточечной схемы (10) для той же задачи с разными значениями: $R_3 = 1, 3, 10$ и $R_1 = 0,49$; $R_2 = 0,51$ – привело к следующим результатам, представленным на рис. 2. Здесь относительная ошибка определена как

$$\delta = \frac{\max_i \{|u(r_i) - u^h(r_i)|\}}{\max_i \{|u(r_i)|\}}. \quad (38)$$

Расчетная область $\Omega = [0, R_3]$ была разделена на пять подобластей: $\Omega_1 = [0, R_1/2]$, $\Omega_2 = [R_1/2, R_1]$, $\Omega_3 = [R_1, (R_1 + R_2)/2]$, $\Omega_4 = [(R_1 + R_2)/2, R_2]$, $\Omega_5 = [R_2, R_3]$. Неравномерная сетка сгущалась к следующим сингулярным точкам: $r = 0$, $r = R_1$ и $r = R_2$. В Ω_1 , Ω_3 и Ω_5 шаг сетки удовлетворяет соотношению $h_{i+1} = h_i \Delta h$, а в Ω_2 и Ω_4 – $h_{i+1} = h_i / \Delta h$, где $\Delta h > 1$ – коэффициент измене-

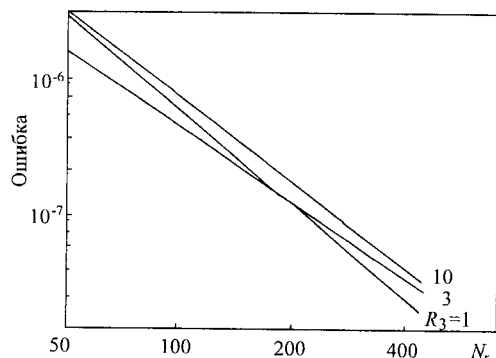


Рис. 2. Относительная ошибка одномерных расчетов по пятиточечной схеме (10) на неравномерной сетке

ния величины шага. Величина приращения выбиралась в широком диапазоне для минимизации относительной ошибки (38) при заданном числе точек сетки.

Графики для различных значений радиуса R_3 расчетной области показывают, что ошибка является квадратичной функцией числа узлов N_r и слабо зависит от R_3 .

Следующие примеры относятся к двумерным задачам с квадратной и вытянутой катушками, обозначаемыми далее через $c1$ и $c2$, с равномерной плотностью тока $\rho = 1$ и прямоугольными сечениями:

$$c1: R_1 = 0,5, R_2 = 1; Z_1 = -0,5, Z_2 = 0,5;$$

$$c2: R_1 = 0,049, R_2 = 0,053; Z_1 = -0,2, Z_2 = 0,2.$$

Рассмотрим сначала результаты моделирования магнитного поля по программе FVSDE2.

Точность численного решения оценивалась по величине относительной ошибки z -компоненты расчетного магнитного поля B_z^h на оси

$$\delta_j = \left| \frac{B_z^a(0, z_j) - B_z^h(0, z_j)}{B_z^a(0, z_j)} \right|, \quad (39)$$

где точное значение B_z^a положительно в расчетной области и определяется следующим образом:

$$B_z(0, z) = \frac{\rho}{2} \left[(z - Z_1) \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + (z - Z_1)^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (z - Z_1)^2}} - (z - Z_2) \ln \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + (z - Z_2)^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (z - Z_2)^2}} \right]. \quad (40)$$

Его приближение B_z^h вычислялось на основе соотношения

$$B_z^a(0, z) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(0, z)$$

при помощи разностных аппроксимаций второго и четвертого порядков для второй производной:

$$\begin{aligned} B_z^a(0, z_j) &= \frac{2u_{1,j}}{(h_1^r)^2} + O(h^2) = \\ &= \frac{2}{h_1^r(2h_2^r + h_1^r)} \left[\left(\frac{h_1^r + h_2^r}{h_1^r} \right)^2 u_{1,j} - \left(\frac{h_1^r}{(h_1^r + h_2^r)} \right)^2 u_{2,j} \right] + O(h^4). \end{aligned} \quad (41)$$

Ошибки численного интегрирования для катушки с1

m	$\Omega_1: \delta_s$ $\Omega_1: \delta_r$	$\Omega_2: \delta_s$ $\Omega_2: \delta_r$	$\Omega_3: \delta_s$ $\Omega_3: \delta_r$
1	$1,1 \cdot 10^{-4}$ 0,045	$2,7 \cdot 10^{-5}$ 0,038	$5,6 \cdot 10^{-6}$ 0,036
2	$8,2 \cdot 10^{-6}$ 0,011	$1,7 \cdot 10^{-6}$ 0,0095	$3,5 \cdot 10^{-7}$ 0,0091
4	$5,7 \cdot 10^{-7}$ 0,0028	$1,1 \cdot 10^{-7}$ 0,0024	$2,2 \cdot 10^{-8}$ 0,0023
8	$3,7 \cdot 10^{-8}$ 0,00069	$6,7 \cdot 10^{-9}$ 0,00060	$1,4 \cdot 10^{-9}$ 0,00057
16	$2,3 \cdot 10^{-9}$ 0,00017	$4,2 \cdot 10^{-10}$ 0,00015	$8,6 \cdot 10^{-11}$ 0,00014

Эти выражения получены из разложения $u(r, z)$ в ряд Тейлора около оси при условиях $u_{1,j} = 0$, гладкости и симметричности решения. Отметим, что для тестовой функции $u = r^2 + ar^4$ точное значение есть $B_z^a = 2$, а его аппроксимации B_z^h второго и четвертого порядков равны $2(1 + ah_r^2)$ и 2 соответственно.

Ошибка вычисления магнитного поля зависит от нескольких факторов: расстояния $H = \min\{Z_3 - Z_2, R_3 - R_2\}$ от границы области до катушки, числа m точек квадратуры при численном интегрировании (33), числа n членов ряда (32) и характерного шага сетки h . Рассмотрим влияние этих величин на примере прямоугольной катушки с1.

Рассматриваются три варианта границы области на различном расстоянии от катушки. Границы определяются следующими расчетными областями ($\Omega = \{0 \leq r \leq R_3, 0 \leq z \leq Z_3\}$):

$$\Omega_1: R_3 = Z_3 = 2; \quad \Omega_2: R_3 = Z_3 = 4; \quad \Omega_3: R_3 = Z_3 = 8.$$

Здесь учтен тот факт, что благодаря симметричности поля отдельной катушки при $z = 0$ ставится граничное условие Неймана $\partial u / \partial z = 0$, а сама расчетная область включает половину катушки при $z > 0$. Следует различать эти три области, так как величина k^2 уменьшается при возрастании H , поэтому в ряду (32) можно брать меньшее количество членов n и уменьшать вычислительные затраты; кроме того, подынтегральная функция в (33) в этом случае является более гладкой, и в квадратурах возможно уменьшение числа m .

В табл. 1 представлены относительные ошибки

$$\hat{\delta} = \max_j \left\{ \hat{\delta}_j = \left| \frac{u^a(R_3, z_j) - u^{(m)}(R_3, z_j)}{u^a(R_3, z_j)} \right| \right\}$$

Таблица 2
Ошибки вычисления эллиптических
интегралов для катушки c1

n	Ω_1	Ω_2	Ω_3
2	0,44	0,19	0,067
4	0,22	0,045	0,0056
8	0,072	0,0034	$5,8 \cdot 10^{-5}$
16	0,011	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$
32	$5,9 \cdot 10^{-4}$	$8,4 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^{-15}$

граничных значений при различных m, R_3 и достаточно большом $n = \bar{n}$. Ошибки численного интегрирования обозначены δ_r и δ_s для квадратурных формул (33) и (34) соответственно. Фактически определяется $u^a(R_3, z_j) = u^{(m)}(R_3, z_j)$, где \bar{m} – минимальное значение m , удовлетворяющее условию

$$\max_j \left| \frac{u^{(m)}(R_3, z_j) - u^{(m/2)}(R_3, z_j)}{u^{(m)}(R_3, z_j)} \right| \leq \varepsilon = 10^{-13}.$$

Это означает, что в некотором смысле $u^{(m)}(R_3, z_j)$ есть «почти точное» численное решение на границе. Здесь взяты $\bar{m} = 200, \bar{n} = 32$.

Из данных таблицы следует, что ошибка есть величина порядка $O(h^2)$ для квадратуры центральных прямоугольников и $O(h^4)$ для квадратуры Симпсона, причем последняя имеет значительно меньшую ошибку. Для больших расстояний H квадратуры точнее. Отметим, что вычисления с применением квадратур Гаусса гораздо эффективнее: ошибка при $m = 7$ удовлетворяет неравенству $\delta_g < 10^{-14}$ для всех трех расчетных областей.

Табл. 2 содержит ошибки

$$\tilde{\delta} = \max_j \left\{ \tilde{\delta}_j = \left| \frac{u^a(R_3, z_j) - u^{(n)}(R_3, z_j)}{u^a(R_3, z_j)} \right| \right\}$$

граничных значений для различного количества членов ряда (32). Используются квадратурные формулы Симпсона. Здесь $u^a(R_3, z_j)$ есть « ε -асимптотически» точное численное решение при $\bar{m} = 200, \bar{n} = 64$.

Точность конечно-объемных аппроксимаций высокого порядка для двух катушек проиллюстрирована в табл. 3, 4. Значения B_z^a на оси $r = 0$ вычислялись по формуле (40). Для итерационного решения системы уравнений критерий останова есть неравенство

$$\frac{\| \varepsilon^{(n)} \|}{\| \varepsilon^{(0)} \|} \leq \varepsilon_i = 10^{-11}, \quad \varepsilon^{(n)} = f_h - A^h u_h^{(n)}, \quad (42)$$

где $\varepsilon^{(n)}$ – невязка n -го итерационного приближения. Для различных расчетных областей и сеток число итераций $n(\varepsilon_i)$ находилось в пределах 20–40.

Результаты расчета прямоугольной катушки c1 с «большой» расчетной областью Ω_3 проиллюстрированы в табл. 3, где приведены значения ошибок δ_j из (39) на разных уровнях по z на трех квадратных сетках G_1, G_2, G_3 с числом точек $N_r \times N_z = 64 \times 64; 128 \times 128; 256 \times 256$. Граничные условия вычисляются по квадратурам Гаусса при $\bar{n} = 64$. В каждой клетке таблицы верх-

Ошибки конечно-объемных аппроксимаций катушки $c1$

z	B_z^a	G_1	G_2	G_3
0	0,2811	$5,038 \cdot 10^{-3}$ $3,624 \cdot 10^{-5}$	$1,258 \cdot 10^{-3}$ $2,579 \cdot 10^{-6}$	$3,144 \cdot 10^{-4}$ $1,669 \cdot 10^{-7}$
1	0,08271	$7,469 \cdot 10^{-2}$ $7,533 \cdot 10^{-5}$	$1,864 \cdot 10^{-3}$ $5,249 \cdot 10^{-6}$	$4,659 \cdot 10^{-4}$ $3,363 \cdot 10^{-7}$
2	0,01591	$4,610 \cdot 10^{-3}$ $6,534 \cdot 10^{-5}$	$1,154 \cdot 10^{-3}$ $4,113 \cdot 10^{-6}$	$2,886 \cdot 10^{-4}$ $2,575 \cdot 10^{-7}$
3	$5,097 \cdot 10^{-3}$	$2,363 \cdot 10^{-3}$ $1,679 \cdot 10^{-5}$	$5,916 \cdot 10^{-4}$ $1,058 \cdot 10^{-6}$	$1,480 \cdot 10^{-4}$ $6,628 \cdot 10^{-8}$
4	$2,207 \cdot 10^{-3}$	$1,389 \cdot 10^{-3}$ $4,679 \cdot 10^{-6}$	$3,479 \cdot 10^{-4}$ $2,947 \cdot 10^{-7}$	$8,701 \cdot 10^{-5}$ $1,845 \cdot 10^{-8}$
5	$1,143 \cdot 10^{-3}$	$9,036 \cdot 10^{-3}$ $1,307 \cdot 10^{-6}$	$2,270 \cdot 10^{-4}$ $8,243 \cdot 10^{-8}$	$5,676 \cdot 10^{-5}$ $5,163 \cdot 10^{-9}$
6	$6,658 \cdot 10^{-3}$	$6,358 \cdot 10^{-3}$ $2,836 \cdot 10^{-7}$	$1,592 \cdot 10^{-4}$ $1,801 \cdot 10^{-8}$	$3,982 \cdot 10^{-5}$ $1,129 \cdot 10^{-9}$
7	$4,208 \cdot 10^{-3}$	$4,701 \cdot 10^{-4}$ $8,975 \cdot 10^{-8}$	$1,177 \cdot 10^{-4}$ $5,729 \cdot 10^{-9}$	$2,943 \cdot 10^{-5}$ $3,604 \cdot 10^{-10}$

нее значение относится к аппроксимации B_z^h второго порядка, нижнее значение – четвертого порядка (41).

Таким образом, применение формул порядка $O(h^2)$ и $O(h^4)$ для получения $B_z^h(0, z)$ дает скорость сходимости в соответствии с теоретическими оценками, несмотря на то что функция правой части f имеет скачок. Аппроксимация высокого порядка (41) имеет значительное преимущество.

В табл. 4 представлены результаты, как и в табл. 3, для трех сеток, но для «длинной» катушки $c2$. Граничные условия вычислялись при $\bar{m} = 200$, $\bar{n} = 32$. Расчетная область – прямоугольник Ω : $0 \leq r \leq R_3 = 0,153$, $0 \leq z \leq Z_3 = 0,8$. Грубая сетка равномерна по z -направлению с числом шагов 100 и «почти равномерная» по r -направлению: она имеет три зоны с границами 0; 0,049; 0,053; 0,153 и числами одинаковых по зонам шагов 12, 1, 25 соответственно. Средняя сетка G_2 и мелкая G_3 имеют в 2 и 4 раза меньшие шаги.

Отметим также значительное преимущество вычисления $B_z(0, z_j)$ по формуле порядка $O(h^4)$. Однако в отличие от катушки $c1$ на практике скорость сходимости оказалась меньшей, чем $O(h^4)$. Дополнительные экспериментальные расчеты показали, что причиной является неравномерность сет-

Т а б л и ц а 4

Ошибки конечно-объемных аппроксимаций катушки $c2$

z	B_z^a	G_1	G_2	G_3
0	$3,876 \cdot 10^{-3}$	$8,896 \cdot 10^{-6}$ $5,305 \cdot 10^{-8}$	$2,210 \cdot 10^{-6}$ $2,978 \cdot 10^{-8}$	$5,516 \cdot 10^{-7}$ $8,479 \cdot 10^{-9}$
0,096	$3,767 \cdot 10^{-3}$	$4,416 \cdot 10^{-5}$ $2,103 \cdot 10^{-7}$	$1,093 \cdot 10^{-5}$ $8,960 \cdot 10^{-8}$	$2,724 \cdot 10^{-6}$ $3,114 \cdot 10^{-8}$
0,192	$2,293 \cdot 10^{-3}$	$3,122 \cdot 10^{-4}$ $4,525 \cdot 10^{-6}$	$7,713 \cdot 10^{-5}$ $9,601 \cdot 10^{-7}$	$1,922 \cdot 10^{-5}$ $2,295 \cdot 10^{-7}$
0,288	$2,588 \cdot 10^{-4}$	$1,014 \cdot 10^{-3}$ $4,648 \cdot 10^{-6}$	$2,512 \cdot 10^{-4}$ $1,920 \cdot 10^{-6}$	$6,265 \cdot 10^{-5}$ $6,724 \cdot 10^{-7}$
0,384	$6,511 \cdot 10^{-5}$	$3,559 \cdot 10^{-4}$ $1,563 \cdot 10^{-6}$	$8,833 \cdot 10^{-5}$ $1,144 \cdot 10^{-6}$	$2,204 \cdot 10^{-5}$ $3,331 \cdot 10^{-7}$
0,48	$2,768 \cdot 10^{-5}$	$1,747 \cdot 10^{-4}$ $1,737 \cdot 10^{-6}$	$4,352 \cdot 10^{-5}$ $6,104 \cdot 10^{-7}$	$1,087 \cdot 10^{-5}$ $1,636 \cdot 10^{-7}$
0,576	$1,385 \cdot 10^{-5}$	$1,047 \cdot 10^{-4}$ $1,203 \cdot 10^{-6}$	$2,613 \cdot 10^{-5}$ $3,460 \cdot 10^{-7}$	$6,530 \cdot 10^{-6}$ $8,932 \cdot 10^{-8}$
0,672	$8,166 \cdot 10^{-6}$	$7,030 \cdot 10^{-5}$ $8,347 \cdot 10^{-7}$	$1,757 \cdot 10^{-5}$ $2,217 \cdot 10^{-7}$	$4,391 \cdot 10^{-6}$ $5,622 \cdot 10^{-8}$

ки, даже малая, а именно расчеты подобной катушки с сечением $0,048 < r < 0,056$, $-0,2 < z < 0,2$ на равномерной сетке дают скорость сходимости $O(h^4)$.

Для сравнения эффективности разных алгоритмов расчеты катушек $c1$ и $c2$ производились по пятиточечной схеме (10) с нулевыми граничными условиями Дирихле на всей границе области с числом узлов сетки 150×90 (почти с теми же точками, что и у сетки G_2). Для улучшения точности была построена адаптивная сетка независимо по r - и z -направлениям, как было описано в одномерном случае. Полученные относительные ошибки δ_j равны 0,0014 для $c1$ и 0,0003 для $c2$. В этих экспериментах расчетные области были определены как $\Omega = \{0 < r < R_3, -Z_3 < z < Z_3\}$, где R_3 меняется и $Z_3 = Z_3(R_3)$. Относительная ошибка вычислялась по формуле

$$\delta = \frac{\max_j \{ |B_z^a(0, z_j) - B_z^h(0, z_j)| \}}{\max_j \{ |B_z^a(0, z_j)| \}}. \quad (43)$$

Зависимость ошибки ϵ от R_3 для катушек $c1$ и $c2$ представлена на рис. 3. Так как общее число узлов в данном случае фиксировано (150×90), то графи-

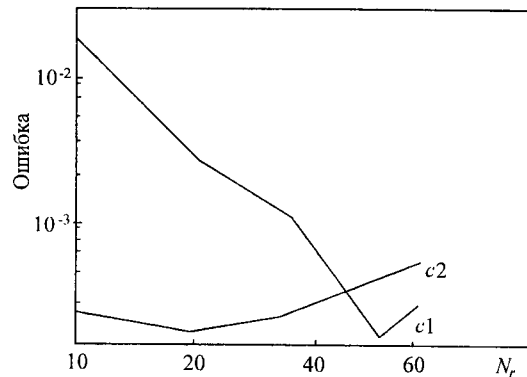


Рис. 3. Относительная ошибка двумерного теста по пятиточечной схеме (10) на неравномерных сетках для катушек $c1$ и $c2$

ки имеют минимумы при $R_{3,0}$. Для $R_3 > R_{3,0}$ ошибка в основном является ошибкой конечно-разностной аппроксимации, а большие значения ошибок при малых R_3 объясняются увеличением ошибок граничных условий.

3. Сравнительные оценки трудоемкости алгоритмов. Для сравнения сложности рассмотренных алгоритмов оценим вычислительные затраты и требования к памяти для реализации итерационного и прямого модулей решения. Для итерационной процедуры IMIF9 число арифметических операций Q и объем памяти P следующие:

$$Q \approx 45N_r N_z n(\epsilon_i), \quad P \approx 12N_r N_z. \quad (44)$$

Здесь $n(\epsilon_i) = c_i |\ln \epsilon_i| N^{1/2}$, где $N = \min\{N_r, N_z\}$ есть число итераций, при котором выполнено неравенство (42).

Из описанных и других экспериментов следует, что для обеспечения точности 0,01 % для решения u достаточно использовать сетку 64×64 и $\epsilon_i \approx 10^{-6}$. При этом $n(\epsilon_i) \approx 15$ и из (44) получаем $Q \approx 700N_r N_z$.

Для решения прямым методом Гаусса вместо (44) находим

$$Q \approx \frac{2}{3} N_r N_z N^2, \quad P \approx N_r N_z N, \quad (45)$$

т. е. для больших N затраты ресурсов получаются значительно большими.

Сделаем несколько замечаний по математической постановке краевой задачи для вычисления магнитного поля катушки по программе FVSDE2. Теоретически возможно вычислить решение $u(r, z)$ непосредственно по формулам (30)–(37). Это приемлемо, если требуется поле только в нескольких точках. Особенно просто такая процедура реализуется для осевых точек, когда $u = B_r = 0$, и формула для B_z получается интегрированием (28) по сечению катушки (29) с равномерной плотностью тока ρ и имеет вид (40). В общем случае при вычислении поля в $N_r N_z$ точках по формулам (30)–(37) с использованием m точек в квадратуре (33) и n членов ряда в (31) суммарное число арифметических операций

$$Q_v = O(N_r N_z mn) \quad (46)$$

может быть очень большим. Это справедливо, если даже использовать для непосредственного вычисления B_r , B_z вычисление эллиптических интегралов K , E не только с помощью рядов по k^2 , но и с помощью быстрого итерационного метода «арифметико-геометрического» среднего [10].

Если вычислять граничные условия по этим же формулам, то затраты пропорциональны

$$Q_b = O((N_r + N_z)mn). \quad (47)$$

Например, для $k^2 < 0,75$ точность $2 \cdot 10^{-8}$ может быть получена при $m = 4$, $n = 16$ с применением квадратуры Гаусса. В этом случае реализация квадратурных формул и ряда (35), (37) требует $Q_b \approx 1600(N_r + N_z)$.

Важно, что число n в (46) может быть очень большим для близких точек (r', z') и (r, z) , т. е. когда значение k^2 близко к единице. Величины m, n в (47) можно взять меньшими, если граничное условие ставится достаточно далеко от катушки, однако при этом обычно увеличиваются N_r, N_z .

Заключение. Представлены три технологии расчета магнитного поля: применение адаптивных сеток для пятиточечной конечно-разностной схемы, конечно-объемная девятиточечная аппроксимация четвертого порядка на равномерной сетке и полуаналитическое вычисление граничных условий, которое может быть применено к обеим аппроксимациям.

При невысокой точности решения, которая требуется при проверке расчетов физическими экспериментами, пятиточечная аппроксимация дает удовлетворительные результаты, однако и в этом случае схема четвертого порядка имеет значительное преимущество по вычислительным затратам. Например, при расчете катушки $c1$ для девятиточечной схемы ошибка на сетке 32×32 оказывается меньше, чем для пятиточечной на адаптивной сетке 150×90 . Отметим также, что итерационный алгоритм неполной факторизации оказывается намного экономичней (по памяти и по числу операций) прямого метода Гаусса.

Самостоятельной представляющей практический интерес задачей является вычисление поля вдали от катушки. Для нее может быть полезной техника, основанная на аналитическом вычислении осевых значений $B_z(0, z)$ по формуле (37) и применении ряда [11]:

$$u(r, z) = \frac{r^2}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!(v+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2v} \frac{\partial^{2v} B_z(0, z)}{\partial z^{2v}}. \quad (48)$$

В действительности этот подход представляет решение некорректно поставленной задачи Коши для уравнения Лапласа в смысле продолжения поля с оси в область с большими значениями r . Некоторые примеры численной реализации этого ряда можно найти в [12]. Применение этого метода вместе с формулой (40) является эффективным для моделирования тонких параксиальных пучков заряженных частиц, но в общем случае оно приводит к численной неустойчивости, которую можно преодолеть регуляризацией, сопровождаемой некоторой потерей точности.

Применение ряда (48) может быть использовано для повышения эффективности численного решения граничной задачи. Например, по формуле (40)

можно вычислить значения $B_z(0, z_j)$ и найти решение для $0 < R_0 < R_1$ из усеченной формы (48):

$$u(R_0, z_j) = \frac{R_0^2}{2} \times \left[B_z(0, z_j) - \frac{R_0^2}{8h_z^2} (B_z(0, z_{j-1}) - 2B_z(0, z_j) + B_z(0, z_{j+1})) + \psi_j \right], \quad (49)$$

где применена аппроксимация вторых производных $B_z''(0, z)$, а ошибка оценивается формулой

$$|\psi_j| \leq \frac{R_0^4}{192h_z^4} \max_{0 < r < R_0} \left\{ \left| \frac{\partial^4}{\partial z^4} B_z(r, z_j) \right| \right\}.$$

Таким образом, с помощью (48) можно определить новое граничное условие при не очень больших $r = R_0$ с высокой точностью и уменьшить размер расчетной области для повышения общей эффективности метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ilin A. V., Chang Diaz F. R., Squire J. P., Carter M. D. Monte-Carlo particle dynamics in a variable specific impulse magnetoplasma rocket // Proc. Internat. Conf. on Open Magnetic Systems for Plasma Confinement. Novosibirsk, Russia, July, 1998: Trans. of Fusion Technology. 1999. **35**. P. 330.
2. Ильин В. П. Численные методы задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
3. Гласко В. Б., Ольховская Н. И. Об одной задаче синтеза в ЯМР-томографии // ЖВММФ. 1989. **29**, № 7. С. 1036.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
5. Ильин В. П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Наука, 1995.
6. Ильин В. П. Балансные аппроксимации повышенной точности для уравнения Пуассона // Сиб. мат. журн. 1996. **37**, № 1. С. 151.
7. Gurieva Y. L., Ilin V. P. Finite volume approaches for 2-D BVPs: algorithms, data structures, software and experiments // Report. Netherlands: University of Nijmegen, 1997. N 9715.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
9. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962.
10. Bartky W. Numerical calculation of a generalized complete elliptic integral // Rev. of Modern Phys. 1938. **10**. P. 264.
11. Глазер В. Основы электронной оптики. М., 1957.
12. Урев М. В. О продолжении магнитного поля с оси симметрии в пространство // Радиотехника и электроника. 1983. **28**. С. 772.

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
E-mail: ilin@comcen.nsk.su

Поступила в редакцию
30 марта 1999 г.