РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1999

УДК 621.391.266

Я. А. Фурман, И. Л. Егошина
*(Йошкар-Ола)*

# ОБРАБОТКА КОНТУРОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПРОТЯЖЕННЫМИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Рассмотрен процесс квантования на квадратной сетчатке протяженных прямолинейных границ изображения. Показано, что код проквантованной границы обладает свойством периодичности. Исследовано поведение ошибок квантования в зависимости от угла наклона границы и определены условия, при которых они достигают максимума и минимума. Синтезирован согласованный фильтр и показан процесс фильтрации кода проквантованной границы. Описаны возникающие при фильтрации резонансные явления, сопровождающиеся полным подавлением ошибок квантования.

1. **Введение и постановка задачи.** Объекты с протяженными прямолинейными границами чаще всего являются антропогенными. Это возделанные участки почвы, дороги, каналы, различные элементы конструкций машин и механизмов и др. Естественно, что изображения таких объектов представляют особый интерес при анализе сцены. В данной работе решается одна из важных задач, связанная с выделением границ таких объектов. Прямолинейный характер границы позволяет не только аналитическим путем сформировать описание границы, но и получить эффективные алгоритмы подавления ошибок квантования. Рассматривается следующая ситуация. Бинарное по яркости изображение объекта занесено в ЗУ с матричной организацией и квадратной формой пиксела. В его ячейках, относящихся к внутренним точкам изображения, записаны единицы, а в ячейках, относящихся к фону, – нули. В области границы фон/изображение в зависимости от степени перекрытия изображения с поверхностью соответствующего пиксела в ячейку ЗУ будет записан либо нуль, либо единица (рис. 1, *a*). Этот процесс назовем квантованием линии границы (контура) изображения.

Контурные ячейки, т. е. граничные пикселы, отнесенные к изображению, последовательно определяются по принципу четырехсвязности [1]. Центры этих ячеек соединяются векторами, называемыми элементарными (ЭВ). Последовательность ЭВ задает контур $\Gamma = \{\gamma(t)\}_{0,\, z-1}$, где $t$ – порядковый номер ЭВ, $t = 0, 1, \ldots, z-1$ (рис. 1, *b*). ЭВ $\gamma(t)$ будем рассматривать как комплексное число $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, принимающее одно из следующих восьми значений: $1; 1-i; -i; -1-i; -1; -1+i; i; 1+i$ [2]. Например, фрагмент изображенного на рис. 1 контура записывается как $\{1+i; 1, 1, 1+i; 1, 1, 1+i; 1\}$.

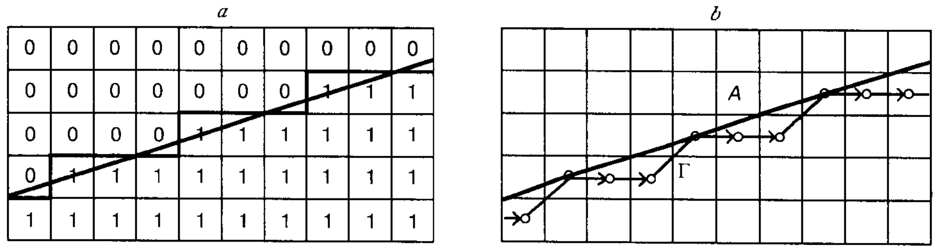


*Рис. 1.* Пример квантования прямолинейных границ на квадратной сетчатке: *a* – записанное в ЗУ бинарное цифровое изображение; *b* – исходная $A$ и проквантованная Г прямолинейные границы

Как показано в [2, 3], задание ЭВ в комплексном виде наиболее предпочтительно по сравнению с другими способами кодирования контуров, так как скалярное произведение двух векторов в пространстве $C^k$ за счет своей мнимой части более информативно, чем скалярное произведение в пространстве $E^{2k}$ [4]. Ошибки квантования зададим контуром $\Psi = \{\psi(t)\}_{0,\, z-1}$, определяемым из соотношения

$$\Gamma = A + \Psi, \tag{1}$$

где $A = \{\alpha(t)\}_{0,\, z-1}$ – контур изображения до его ввода в ЗУ. Если граница прямолинейна, то ЭВ контура $A$ представляют собой последовательность одинаковых комплексных чисел: $\alpha = |\alpha| \exp\{i\varphi\}$, где $\varphi$ – угол наклона прямолинейной границы.

Примем для определенности, что в ячейку ЗУ заносится единица, если площадь изображения $S_{\text{из}}$ в пределах пиксела не меньше половины площади пиксела, т. е. $S_{\text{из}} \geq 0{,}5\Delta^2 = 0{,}5$. Прямолинейный отрезок назовем полузакрепленным, если его начальная точка совпадает с углом клетки. Процесс квантования на сетчатке является цепочкой последовательных решений об обнаружении изображения в каждой граничной клетке. При этом часть граничных ячеек изображения будет отнесена к фону («пропуски»), а часть – к объекту. Как пропуски, так и правильные обнаружения контурных ячеек искажают форму изображения, что учитывается контуром $\Psi$. Детерминированный характер формы границы и последующая интерполяция обусловливают сильную коррелированность ошибок квантования и их зависимость от угла наклона $\varphi$ линии границы. В связи с этим общепринятый подход к оценке влияния ошибок квантования [5, 6], при котором они считаются независимыми между собой и некоррелированными с сигналом, в рассматриваемом случае неприемлем.

Значение угла $\varphi$ разобьем на восемь одинаковых секторов: $u = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Для нулевого сектора, который назовем базовым, $0 \leq \varphi < \pi/4$. Без значительной потери в общности результатов дальнейший анализ будем проводить лишь для этого сектора. На рис. 2 показано несколько взаимных положений прямолинейной границы и клетки сетчатки. Из центра нижней стороны клетки (точка $F$) проведен перпендикуляр до пересечения с линией границы – зонд $\Delta h$. Для случая на рис. 2, *a* площадь изображения в пределах квадрата равна $S_{\text{из}} = -0{,}5k + b = \Delta h$, где $b = AC$, $k = \operatorname{tg}\varphi$. Отсюда следует, что условие $S_{\text{из}} \geq 0{,}5\Delta^2$ эквивалентно условию $\Delta h \geq 0{,}5$. Это условие сохраняется и для случая, приведенного на рис. 2, *b*. Таким образом, клетка сетчатки отно-

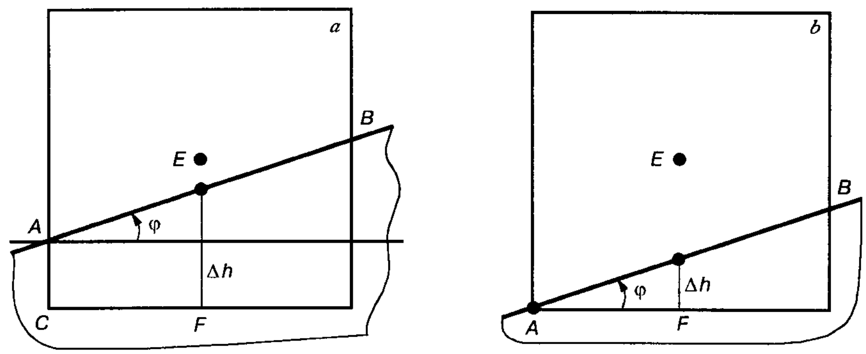


*Рис. 2.* Взаимные положения прямолинейной границы и клетки сетчатки

сится к изображению, если длина зонда составляет не менее половины длины стороны клетки.

В данной работе на основе анализа дискретной цепи Маркова, описывающей процесс квантования, решаются задачи получения аналитическим путем цепного кода $\Gamma = \{\gamma(t)\}$ границы, оценки влияния угла наклона $\varphi$ линии границы на процесс квантования, а также уменьшения и полного подавления ошибок квантования.

2. **Квантование границы, проходящей через базовый сектор.** Под шагом квантования будем понимать действие по формированию контурной клетки в пределах одной колонки сетчатки. Приращение ординаты $\Delta y$ границы за один шаг в пределах базового сектора $\Delta y = k = \text{tg}\varphi$, а максимальное приращение $\Delta y_{\max} \leq 1$. Поэтому за один шаг прямая может пройти не более чем через две соседние вертикально расположенные клетки (рис. 3). Максимально возможное значение зонда в верхней клетке, равное 0,5, достигается лишь для полузакрепленной границы при $\varphi = \pi/4$. Поэтому при пересечении границей двух соседних вертикально расположенных клеток площадь изображения в верхней клетке меньше, а в нижней больше 0,5. В результате нижняя клетка будет отнесена к изображению, а верхняя – к фону. Отсюда следует, что за один шаг квантования возможно появление только одной контурной клетки. Поскольку $k \geq 0$, то с ростом числа шагов квантования площадь под линией границы не уменьшается и в коде границы могут присутствовать только элементы вида $1, 1+i, i$. Элемент $i$ приводит к появлению за один шаг двух клеток, относящихся к изображению, что невозможно. Поэтому в базовом секторе код прямолинейной границы изображения содержит только два элемента: $1$ и $1+i$.

Рассмотрим вопрос о структуре кода. Приращение ординаты границы за один шаг равно $\Delta y = k = \text{tg}\varphi$. Пусть величина $n/k$ – точно целое число. Если прямая полузакреплена, то через $\frac{n}{k} = \frac{n}{\Delta y}$ шагов она снова пройдет через узел сет-

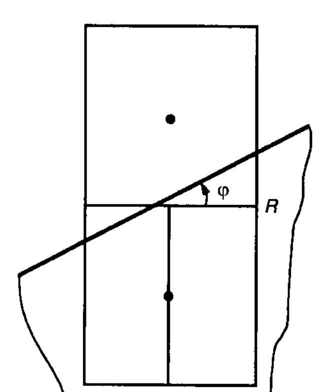


*Рис. 3.* Прохождение прямолинейной границы через соседние вертикально расположенные клетки

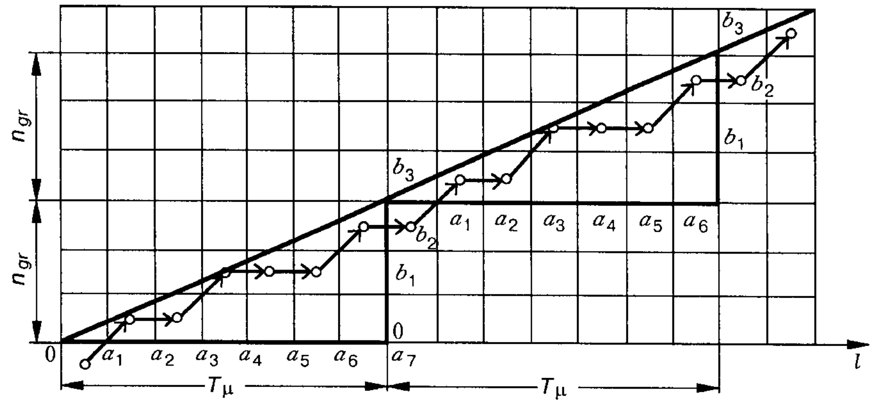


*Рис. 4.* Образование периодической структуры цепного кода прямолинейной границы ($k = 3/7,\ T_\mu = 7,\ n_{gr} = 3$)

чатки. Пусть, далее, $n_{gr}$ – значение $n$, при котором получается минимальное целое число $T_\mu = n_{gr}/k$. Число шагов квантования, равное $T_\mu$, является периодом последовательности элементов кода проквантованного отрезка (рис. 4), т. е. $\gamma(t) = \gamma(t + aT_\mu)$, $a = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь и далее $a$ – целочисленная константа.

Таким образом, код прямолинейной границы изображения в базовом секторе является периодической последовательностью комплексных чисел 1 и $1+i$ с периодом в $T_\mu$ элементов, задаваемым величиной тангенса угла наклона прямой $k = n_{gr}/T_\mu$, где $n_{gr}$ и $T_\mu$ – взаимно простые числа. Величина $n_{gr} = kT_\mu$ равна количеству элементов $1+i$ в одном периоде кода границы.

Внутри интервала $T_\mu$ имеются квазипериодические группы элементов кода границы. Поэтому величину $T_\mu$ назовем макропериодом кода. Количество элементов в группе и сами значения этих элементов зависят от предыстории процесса квантования. Так как данный процесс детерминирован, то следует ожидать, что он будет описан вырожденной цепью Маркова. В этой цепи вероятности переходов равны либо нулю, либо единице, а матрица вероятностей переходов будет перестановочной [7]. В работах [8, 9] описана такая цепь, осуществлен спектральный анализ ее матрицы вероятностей переходов и получено следующее выражение для $j$-й компоненты вероятностного вектора на $t$-м шаге квантования при начале процесса из состояния $\rho$:

$$\pi_j^{(\rho)}(t) = \frac{1}{T_\mu}\sum_{\nu=1}^{T_\mu} \varepsilon^{\nu(ct+j-\rho)} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad ct + j - \rho = aT_\mu; \quad c = T_\mu - n_{gr}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (2)$$

Часть состояний цепи образует подмножество $\Omega_{1+i}$, при попадании в которое формируется элемент кода $\gamma = 1 + i$. В других состояниях цепи код границы равен $\gamma = 1$. Первое состояние $j_0$ подмножества $\Omega_{1+i}$ равно [8]

$$j_0 = E\left(\frac{T_\mu}{2}\right) + \frac{1 + (-1)^{n_{gr}}}{2}, \qquad (3)$$

где $E(l)$ – ближайшее целое к числу $l$, не меньшее чем $l$. Подмножество $\Omega_{1+i}$ включает подряд $n_{gr}$ состояний цепи (от $j_0$ до $j_0 + n_{gr} - 1$). Тогда выражение для элемента кода проквантованной границы на $t$-м шаге при начале процесса из состояния $\rho$ с учетом (2) и (3) будет иметь вид

$$\gamma^{(\rho)}(t)=1+iP_{1+i}^{(\rho)}(t). \tag{4}$$

Здесь

$$P_{1+i}^{(\rho)}(t)=\sum_{j=j_0}^{j_0+n_{gr}-1}\pi_j^{(\rho)}(t)=\frac{1}{T_\mu}\sum_{j=j_0}^{j_0+n_{gr}-1}\sum_{\nu=1}^{T_\mu}\varepsilon^{\nu(ct+j-\rho)}. \tag{5}$$

В выражении (5) параметры $j$ и $\rho$, характеризующие соответственно сдвиг изображения в плоскости квадратной сетчатки и начало отсчета кода, одинаково влияют в конечном счете на величину $\gamma(t)$. В связи с этим можно сформулировать эргодическое свойство, в соответствии с которым код границы после сдвига изображения может быть найден путем смещения элементов кода любой проквантованной реализации.

Участок проквантованной границы из $T_\mu$ элементов назовем репрезентативным. Такой участок, полученный при начальном состоянии $\rho$, обозначим как $\Gamma^{(\rho)}=\{\gamma^{(\rho)}(t)\}_{0,\,T_\mu-1}$. Модель (1) проквантованной границы запишется в виде $\Gamma^{(\rho)}=A+\Psi^{(\rho)}$, $A=\{\alpha(t)\}_{0,\,T_\mu-1}$, $\Psi^{(\rho)}=\{\psi^{(\rho)}(t)\}_{0,\,T_\mu-1}$, $\rho=1,2,\ldots,T_\mu$. Для составляющих данной модели в пределах базового сектора получим

$$\begin{gathered}\sum_{t=1}^{T_\mu}\gamma^{(\rho)}(t)=T_\mu(1+ki);\qquad \sum_{t=1}^{T_\mu}\alpha(t)=T_\mu(1+ki);\qquad \sum_{t=1}^{T_\mu}\psi^{(\rho)}(t)=0;\\ \left\|\Gamma^{(\rho)}\right\|^2=T_\mu(1+k);\qquad \left\|A\right\|^2=T_\mu(1+k^2);\qquad \left\|\Psi^{(\rho)}\right\|^2=T_\mu(k-k^2).\end{gathered} \tag{6}$$

Отметим, что данные выражения сохраняют свой вид при любом значении $\rho$, т. е. не зависят от сдвига начальной точки контура. При масштабировании угол поворота рассматриваемого участка границы не меняется, а также сохраняется положение его начальной точки. Преобразование приводит лишь к изменению количества ЭВ, составляющих прямолинейную границу. Условие репрезентативности обеспечивает постоянство значений ЭВ проквантованной границы в пределах макропериода. Отсюда следует, что код репрезентативного участка границы при масштабировании не изменяется.

Для оценки влияния на уровень ошибок квантования угла поворота изображения и сдвига начальной точки проквантованного участка его контура рассмотрим основные соотношения при согласованной фильтрации прямолинейной границы.

Контурный фильтр, согласованный с линией границы, вырабатывает меру схожести фильтруемого участка границы до и после квантования. Чем больше величина этой меры, тем меньше влияние на конфигурацию линии оказывает процесс квантования и тем меньше уровень ошибок. Контур импульсной характеристики такого фильтра имеет вид [3]:

$$\Lambda=\{\lambda(n)\}_{1,\,T_\mu}=\{\alpha^*(n)\}_{1,\,T_\mu}=\{1-ki\}_{1,\,T_\mu},$$

т. е. все ЭВ контура одинаковы и равны $1 - ki$. Нормированный выходной эффект фильтра с учетом (6)

$$\eta_N(m) = \frac{1}{\|A\| \|\Gamma^{(\varphi)}\|} \sum_{t=1}^{T_\mu} \gamma^{(\varphi)}(t)(1-ki) = \frac{\|A\|}{\|\Gamma^{(\varphi)}\|} = \sqrt{\frac{1+k^2}{1+k}}. \qquad (7)$$

Из полученного выражения видно, что результат фильтрации определяется лишь тангенсом угла наклона $\varphi$ границы. Влияние величины этого угла на уровень ошибок квантования можно оценить по нормированной реакции фильтра, задаваемой выражением (7). При $k = 0$ и $k = 1$ величина $\eta_N = 1$, т. е. $A$ и $\Gamma^{(\varphi)}$ максимально схожи между собой. Это значит, что при углах поворота $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$ ошибки квантования равны нулю. Анализ последнего выражения в (7) показывает, что величина $\eta_N$ имеет при $k = 0{,}414$ ($\varphi = 22{,}48°$) минимум, равный 0,91 (рис. 5) [10]. Таким образом, уровень ошибок квантования становится максимальным, когда линия границы проходит под углом $\varphi = 22{,}48°$.

3. **Подавление ошибок квантования репрезентативного участка границы.** *Условие полного подавления ошибок квантования.* Скалярное произведение векторов $A$ и $\Gamma^{(\varphi)}$ границы до и после квантования равно $(A, \Gamma^{(\varphi)}) = (A, A + \Psi^{(\varphi)}) = (A, A) + (A, \Psi^{(\varphi)})$. Второе слагаемое с учетом (6) запишется как $(A, \Psi^{(\varphi)}) = (1+ki)\sum_{t=1}^{T_\mu} \psi(t) = 0$, поэтому $(A, \Gamma^{(\varphi)}) = (A, A) = \|A\|^2 = T_\mu(1+k^2)$.

Так как работа согласованного фильтра сводится к образованию отсчетов в виде набора скалярных произведений вектора фильтруемого сигнала с вектором импульсной характеристики, из полученного соотношения следует, что результаты фильтрации репрезентативного участка границы до и после квантования одинаковы. Следовательно, согласованный фильтр с импульсной характеристикой $\Lambda = \{\alpha^*(n)\}_{1,T_\mu} = \{1-ki\}_{1,T_\mu}$, т. е. с окном шириной $s = T_\mu$, при фильтрации подобных участков производит полное подавление ошибок квантования: $\eta(t) = \sum_{t=1}^{T_\mu} \gamma^{(\varphi)}(t)(1-ki) = T_\mu(1+ki)(1-ki) = \|A\|^2$.

*Расчет коэффициента подавления ошибок квантования.* Зададим коэффициент подавления ошибок квантования в виде $r_s = G_A / G_h(s)$, где $G_A$ – энергия сигнала; $G_h$ – энергия вектора ошибок квантования $\Psi^{(\varphi)}$. Обработка

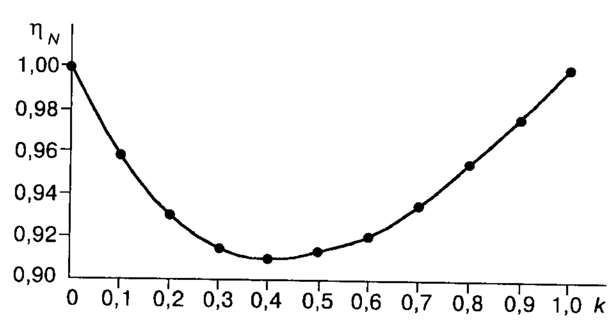


*Рис. 5.* Зависимость меры схожести прямолинейной границы до и после квантования от тангенса угла ее наклона

заключается либо в формировании среднего арифметического $s$ участков границы $\Gamma^{(\rho)}$, $\rho = 1, 2, \ldots, s$, либо в соответствии со свойством эргодичности в скользящем суммировании ЭВ границы в окне из $s$ элементов на $T_\mu$ шагах. Подставляя в выражение для коэффициента подавления $r_s$ в качестве числителя выражение (6), а знаменателя – выражение (П2.3) (см. приложение 2), имеем

$$r_s = \frac{s^2 T_\mu (1 + k^2)}{2 \sum_{\tau=1}^{s-1} \tau\eta(s-\tau) + skT_\mu (1 - ks)}. \tag{8}$$

Приведем полученные с помощью прямого представления для АКФ (см. таблицу в приложении 1) формулы расчета коэффициента $r_s$ для значений $s = 1, 2, 3, 4$:

$$s = 1: \ r_1 = (1 + k^2)/(k - k^2) \quad \text{при } 0 \le k \le 0{,}5;$$

$$s = 2: \ r_2 = (1 + k^2)/(0{,}5k - k^2) \quad \text{при } 0 \le k \le 0{,}5;$$

$$s = 3: \ r_3 = \begin{cases} 1 + k^2/0{,}33k - k^2 & \text{при } 0 \le k \le 0{,}33; \\ 1 + k^2/k - k^2 - 2/9 & \text{при } 0{,}33 < k \le 0{,}5; \end{cases}$$

$$s = 4: \ r_4 = \begin{cases} 1 + k^2/0{,}25k - k^2 & \text{при } 0 \le k \le 0{,}25; \\ 1 + k^2/0{,}75k - k^2 - 1/8 & \text{при } 0{,}25 < k \le 0{,}5. \end{cases}$$

На рис. 6 представлены рассчитанные по этим формулам графики зависимостей $r_s(k)$. Из них видно, что коэффициент подавления сильно зависит от величины $k = \mathrm{tg}\varphi$. В области малых значений $k$, $0 \le k \le 1/s$, выигрыш от накопления $s$ реализаций приближенно равен $s/k$, т. е. пропорционален количеству накопленных реализаций. Для одной проквантованной реализации коэффициент $r$ растет с уменьшением $k$. Накопление двух реализаций целесообразно при значениях $k$, близких к 0,5, т. е. когда величина $r$ стремится к бесконечности. Накопление трех реализаций целесообразно при значениях

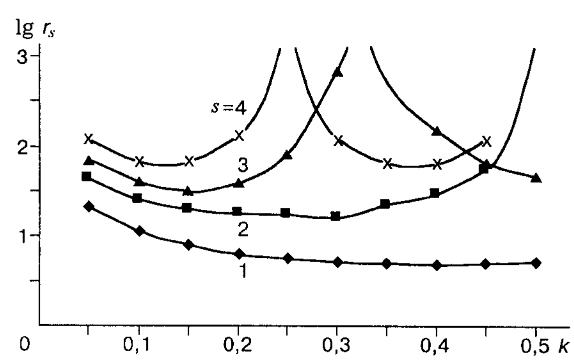


*Рис. 6.* Зависимость логарифма коэффициента подавления ошибок квантования репрезентативных участков границы от величины $k$ при фильтрации скользящего среднего с окном шириной $s$

$k$, близких к 0,33. В этих случаях коэффициент подавления стремится к бесконечности. Графики на рисунке иллюстрируют резонансный характер накопления $s$ репрезентативных реализаций проквантованной границы или в соответствии с принципом эргодичности при фильтрации скользящего среднего одной реализации проквантованной границы с окном шириной $s$. В общем случае из анализа выражения (8) можно показать, что при $k=1/s$ коэффициент подавления ошибок квантования стремится к бесконечности.

4. **Ошибки квантования в отрезках границы произвольной длины.** Энергия отрезка кода $\Gamma^{(\rho)}$ длиной $\ell$ с учетом (4) и (5) равна

$$G_\ell^{(\rho)} = \left\|\Gamma^{(\rho)}\right\|^2 = \sum_{t=1}^{\ell}\left|1+\frac{i}{T_\mu}\sum_{j=j_0}^{j_0+n_{gr}-1}\sum_{\nu=1}^{T_\mu}\exp\left\{i\frac{2\pi}{T_\mu}\nu(ct+j-\rho)\right\}\right|^2.$$

Раскрывая данное выражение, получим, что $G_\ell^{(\rho)} = \ell + F^{(\rho)}(\ell)$, где

$$F^{(\rho)}(\ell) = \sum_{t=1}^{\ell}\sum_{j=j_0}^{j_0+n_{gr}-1}\sum_{\nu=1}^{T_\mu}\exp\left\{i\frac{2\pi}{T_\mu}\nu(ct+j-\rho)\right\}. \qquad (9)$$

Найдем отношение $r_1^{(\rho)}(\ell)$ энергий $\left\|A_\ell\right\|^2 = \ell(1+k^2)$ исходной границы $A$ и энергии $G_{h,\ell}^{(\rho)}(\ell)$ ошибок ее квантования. В общем случае энергия ошибок квантования равна

$$G_{h,\ell}^{(\rho)} = (\Gamma_\ell^{(\rho)} - A_\ell, \Gamma_\ell^{(\rho)} - A_\ell) = \left\|\Gamma_\ell\right\|^2 + \left\|A_\ell\right\|^2 - 2\mathrm{Re}(\Gamma^{(\rho)}, A_\ell).$$

Для реальной части скалярного произведения, используя (4), (5) и (9), получим $\mathrm{Re}(\Gamma_\ell^{(\rho)} - A_\ell) = \ell + kF^{(\rho)}(\ell)$. Теперь для коэффициента $r_1^{(\rho)}(\ell)$ можно записать:

$$r_1^{(\rho)}(\ell) = \frac{\left\|A_\ell\right\|^2}{G_{h,\ell}^{(\rho)}} = \frac{\ell(1+k^2)}{\ell k^2 + (1-2k)F^{(\rho)}(\ell)}. \qquad (10)$$

Проведем анализ данного выражения, учитывая, что значение функции $F^{(\rho)}(\ell)$ равно количеству ЭВ $\gamma = 1+i$ в цепном коде границы за $\ell$ шагов.

*Влияние начального состояния* $\rho$ *(сдвига начала кода)*. Величина $\rho$ задает момент включения второго слагаемого в знаменателе выражения (10). Влияние начального состояния будет сказываться на интервале длительностью $1/k$, в течение которого обязательно появится один ЭВ $\gamma = 1+i$. При этом коэффициент $r_1^{(\rho)}(\ell)$ будет меняться в пределах от $(1+k^2)/(1+k^2-2k)$ до $(1+k^2)/k^2$.

*Влияние поворота изображения.* При малых значениях $k$ до появления первого ЭВ $\gamma = 1+i$ коэффициент $r_1^{(\rho)}(\ell) \approx 1/k^2$, а затем происходит резкое уменьшение этого коэффициента за счет того, что знаменатель становится близким к единице. В результате $r_1^{(\rho)}(\ell) \approx \ell$. При $k$, близком к 0,5, величина $1-2k$ в знаменателе становится очень малой и $r_1(\ell) \approx 5$, т. е. исчезает его зависимость как от угла наклона $\varphi$, так и от начального состояния $\rho$.

*Влияние длины отрезка кода.* При $\ell = aT_\mu$ величина $F^{(\rho)}(\ell)$ перестает зависеть от начального состояния и равна $akT_\mu$, а выражение (10) принимает вид $r_1(aT_\mu) = (1+k^2)/(k-k^2)$, $a = 1, 2, \ldots$. При $\ell \gg kT_\mu^2$ функция $F^{(\rho)}(\ell)$ приближенно становится равной $\ell k$ и $r_1(\ell) \approx (1+k^2)/(k-k^2)$. Таким образом, при $\ell \gg kT_\mu^2$ коэффициент $r_1(\ell)$ стабилизируется и определяется значением при $\ell = T_\mu$. При этом, как и следовало ожидать, исчезает зависимость от начального состояния ρ. Минимальное значение $r_1 = 4{,}83$ достигается при $k = 0{,}414$ ($\varphi = 22{,}48°$).

5. **Ошибки квантования на выходе согласованного фильтра.** *Основные соотношения.* Фильтр, согласованный с прямолинейным отрезком границы длиной $\ell$, производит, как следует из (7), равновесное суммирование элементов кода проквантованной границы:

$$\eta^{(\rho)}(\ell) = (1-ki)\sum_{t=1}^{\ell}\gamma^{(\rho)}(t). \tag{11}$$

Учитывая, что $\gamma^{(\rho)}(t) = \alpha + \psi^{(\rho)}(t)$, а также выражения (4) и (5), найдем реакцию фильтров $\eta_A(\ell)$ и $\eta_\Psi(\ell)$ соответственно на сигналы в виде исходной границы $A = \{\alpha\}_{1,\ell}$ и ошибок ее квантования $\Psi^{(\rho)} = \{\psi^{(\rho)}(t)\}_{1,\ell}$:

$$\eta_A = G_{A,\ell} = \ell(1+k^2); \qquad \eta_\psi(\ell) = (k+i)[F^{(\rho)}(\ell) - \ell k]. \tag{12}$$

На основании (12) отношение сигнал/помеха по энергии на выходе фильтра будет равно

$$r_2^{(\rho)}(\ell) = \ell^2(1+k^2)/[F^{(\rho)}(\ell) - k\ell]^2. \tag{13}$$

Функция $F^{(\rho)}(\ell) - k\ell$ имеет период $\ell = T_\mu$. Это следует из того, что количество элементарных векторов $\gamma = 1 + i$ на отрезке с периодом $T_\mu$ и длиной $\ell$ равно $F^{(\rho)}(\ell)$, а $k\ell$ есть среднее число данных векторов за это же число шагов. Следствием периодического характера этой функции является возможность ее представления через главные значения на интервале $\ell = 1, 2, \ldots, T_\mu$:

$$F^{(\rho)}(\ell) - kl = F^{(\rho)}(L) - Lk, \tag{14}$$

где $L$ – числитель несократимой дробной части числа $\ell/T_\mu$.

Коэффициент $q^{(\rho)}(\ell)$ подавления при фильтрации ошибок квантования определим как отношение величин $r_2^{(\rho)}(\ell)$ и $r_1^{(\rho)}(\ell)$ (см. (13) и (10)):

$$q^{(\rho)}(\ell) = \frac{\ell F^{(\rho)}(\ell) - 2k\ell F^{(\rho)}(\ell) + \ell^2 k^2}{[F^{(\rho)}(\ell)]^2 - 2k\ell F^{(\rho)}(\ell) + \ell^2 k^2}. \tag{15}$$

Анализ выражения (15) показывает, что при $\ell = aT_\mu$ знаменатель становится равным нулю, а коэффициент подавления стремится к бесконечности.

Рассматривая поведение коэффициента $q$ на главном интервале длины отрезка, получим соотношение

$$q^{(\rho)}(\ell)=\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 q^{(\rho)}(L), \tag{16}$$

т. е. выигрыш в подавлении ошибок квантования растет пропорционально квадрату объема входной выборки, но с учетом тонкой структуры поведения величины $q$ на главном интервале значений $\ell$.

При усреднении по начальным состояниям $\rho$ отношение сигнал/помеха $\bar{r}_2(\ell)$ на выходе фильтра и коэффициент подавления согласованного фильтра ошибок квантования $\bar{q}(\ell)$ соответственно будут равны

$$\bar{r}_2(\ell)=\frac{\ell^2 T_\mu (1+k^2)}{2\sum\limits_{\tau=1}^{\ell-1}\tau\eta(\ell-\tau)+\ell k T_\mu (1-k\ell)}, \tag{17}$$

$$\bar{q}(\ell)=\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 \bar{q}(L). \tag{18}$$

Из выражения (18) видно, что для определения коэффициента подавления ошибок квантования отрезка границы произвольной длины необходимо знать значения этого коэффициента на главном интервале длины границы.

## ВЫВОДЫ

Показано, что код проквантованной прямолинейной границы представляет собой последовательность двух чисел с макропериодом, определяемым тангенсом угла наклона прямой.

Исследована зависимость ошибок квантования от угла наклона $\varphi$ прямолинейной границы в пределах базового сектора $0 \le \varphi < \pi/4$, достигающих максимального значения при угле 22,48° и совершенно отсутствующих при углах 0° и $\pi/4$.

Синтезирован фильтр, согласованный с линией прямолинейной границы до ее квантования. При ширине окна импульсной характеристики, равной величине макропериода кода, при фильтрации происходит полное подавление ошибок квантования.

Получены энергетические характеристики ошибок квантования на входе и выходе согласованного фильтра. Показано, что выигрыш в подавлении ошибок квантования растет пропорционально длине границы, но с учетом тонкой структуры процесса подавления ошибок квантования на главном интервале значений длины, равном макропериоду.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**АКФ проквантованной прямолинейной границы изображения.** АКФ позволяет оценить влияние угла наклона границы и ошибок квантования на искажение этой границы до и после согласованной фильтрации кода границы. В работе [11] на основании выражения (5) для вероятности $P^{(\rho)}_{1+i}(t)$ по-

| $\tau$ | $\eta(\tau)$ | Интервал для $k=\mathrm{tg}\varphi$ | $\tau$ | $\eta(\tau)$ | Интервал для $k=\mathrm{tg}\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $kT_\mu$ | $0 \le k < 1$ | 3 | $T_\mu(2-2k)$ | $2/3 < k \le 0{,}75$ |
| | | | | $T_\mu(2k-1)$ | $0{,}75 < k < 1$ |
| 1 | 0 | $0 \le k \le 0{,}5$ | 4 | 0 | $0 \le k \le 0{,}2$ |
| | $T_\mu(2k-1)$ | $0{,}5 < k \le 1$ | | $T_\mu(5k-2)$ | $0{,}2 < k \le 0{,}25$ |
| 2 | 0 | $0 \le k \le 1/3$ | | $T_\mu(1-3k)$ | $0{,}25 < k < 1/3$ |
| | $T_\mu(3k-1)$ | $1/3 < k \le 0{,}5$ | | 0 | $1/3 \le k \le 0{,}4$ |
| | $T_\mu(1-k)$ | $0{,}5 < k \le 2/3$ | | $T_\mu(5k-2)$ | $0{,}4 < k \le 0{,}5$ |
| | $T_\mu(2k-1)$ | $2/3 < k < 1$ | | $T_\mu(2-3k)$ | $0{,}5 < k \le 0{,}6$ |
| 3 | 0 | $0 \le k \le 0{,}25$ | | $T_\mu(2k-1)$ | $0{,}6 < k < 2/3$ |
| | $T_\mu(4k-1)$ | $0{,}25 < k \le 1/3$ | | $T_\mu(5k-3)$ | $2/3 \le k \le 0{,}75$ |
| | $T_\mu(1-2k)$ | $1/3 < k \le 0{,}5$ | | $T_\mu(3-3k)$ | $0{,}75 < k \le 0{,}8$ |
| | $T_\mu(4k-2)$ | $0{,}5 < k \le 2/3$ | | $T_\mu(2k-1)$ | $0{,}8 < k < 1$ |

лучено несколько представлений для АКФ последовательности значений $P_{1+i}^{(\rho)}(t)$. В таблице представлены выражения АКФ $\eta(\tau)$ для значенийτ $=1,2,3,4$.

По мере роста $\tau$ в представлении АКФ происходит сильное дробление интервалов для $\eta(\tau)$. Это приводит к громоздкой записи АКФ при больших $\tau$. Однако отсчеты, полученные для ограниченного количества значений аргумента, на основании приведенных ниже свойств АКФ позволяют получить достаточную информацию о всей функции: 1) максимальное значение $\eta(\tau) = \eta(0) = n_{gr} = kT_\mu$; 2) периодичность $\eta(\tau) = \eta(\tau \pm aT_\mu)$; 3) внутрипериодная симметрия $\eta(\tau) = \eta(-\tau) = \eta(T_\mu - \tau)$; 4) непрерывность значений: АКФ $\eta(\tau)$ принимает за макропериод каждое целое значение в интервале от 0 до $n_{gr} = kT_\mu$; 5) сумма всех элементов АКФ за макропериод равна $n_{gr}^2$.

АКФ $K(\tau)$ цепного кода проквантованной границы связана с АКФ $\eta(\tau)$ соотношением вида $K(\tau) = \eta(\tau) + T_\mu$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

**Энергия среднего арифметического репрезентативных векторов ошибок квантования размерностью $T_\mu$.** Используя (1) и (7), получим

$$(\Psi^{(\rho)}, \Psi^{(\theta)}) = (\Gamma^{(\rho)} - A, \Gamma^{(\theta)} - A) = (\Gamma^{(\rho)}, \Gamma^{(\theta)}) - T_\mu - k^2 T_\mu .$$

Скалярное произведение $(\Gamma^{(\rho)}, \Gamma^{(\theta)})$ равно отсчету АКФ $K(\tau), \tau = |\rho - \varepsilon|$, кода проквантованной границы. С учетом приложения 1 будем иметь

$$(\Psi^{(\rho)}, \Psi^{(\theta)}) = \eta|\rho - \theta| - k^2 T_\mu = \eta(\tau) - k^2 T_\mu . \qquad (\text{П}2.1)$$

Энергия среднего арифметического $s$, $1 \le s \le T_\mu$, различных репрезентативных векторов ошибок квантования в общем случае равна квадрату нормы вектора среднего арифметического этих векторов:

$$G_h(s) = \left\| \frac{1}{s} \sum_{\rho=1}^{s} \Psi^{(\rho)} \right\|^2 = \frac{1}{s^2} \left( \sum_{\rho=1}^{s} \Psi^{(\rho)}, \sum_{\rho=1}^{s} \Psi^{(\rho)} \right) =$$

$$= \frac{1}{s^2} [s(\Psi^{(1)}, \Psi^{(1)}) + 2(s-1)(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}) + \ldots + 2(\Psi^{(1)}, \Psi^{(s)})]. \qquad (П2.2)$$

Последнее выражение найдено с учетом того, что скалярное произведение вектора ошибок квантования зависит лишь от модуля разности индексов сомножителей. Используя (П2.1), окончательно получим

$$G_h(s) = \frac{1}{s^2} \left[ 2 \sum_{\tau=1}^{s-1} \tau \eta(s-\tau) + skT_\mu (1-ks) \right]. \qquad (П2.3)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Розенфельд А.** Распознавание и обработка изображений. М.: Мир, 1972.
2. **Furman Y. A., Yanshin W. W.** Extraction and linear filtering of closed polygonal contours of images // Pattern Recogn. and Image Analysis. 1994. 4, N 2. P. 148.
3. **Фурман Я. А.** Основы теории обработки контуров изображений: Уч. пособие для вузов. Йошкар-Ола: МарГТУ, 1997. С. 255.
4. **Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.** Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974. С. 544.
5. **Введение** в цифровую фильтрацию /Под ред. Р. Богнера, А. Константинидиса: Пер. с англ. под ред. Л. И. Филиппова. М.: Мир, 1976. С. 215.
6. **Лихарев В. А.** Цифровые методы и устройства в радиолокации. М.: Сов. радио, 1967. С. 456.
7. **Маркус М., Минк Х.** Обзор по теории матриц и матричных неравенств: Пер. с англ. М.: Наука, 1972.
8. **Фурман Я. А.** Марковская модель процесса квантования прямолинейной границы изображений на квадратной сетчатке // ВИНИТИ. 1987. № 6187-В87. С. 16.
9. **Фурман Я. А., Яншин В. В.** Многошаговые процедуры принятия решений. Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1992. С. 296.
10. **Фурман Я. А., Егошина И. Л.** Выделение контуров изображений с протяженными прямолинейными границами // Тр. конф. РОАИ-4-98. Ч. 1. Новосибирск: Изд. ИАиЭ СО РАН, 1998. С. 397.
11. **Фурман Я. А.** Аналитические представления и свойства автокорреляционной функции цепного кода прямолинейной границы изображений // ВИНИТИ. 1987. № 6188-В87. С. 10.


*Поступила в редакцию 21 января 1999 г.*