

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.2.08

Ю. В. Бондаренко, А. Н. Касперович

(Новосибирск)

НЕЛИНЕЙНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ  
ПО НЕРАВНОМЕРНЫМ ОТСЧЕТАМ

Рассматривается просто реализуемый метод нелинейного восстановления сигналов по неравномерным отсчетам. Устанавливаются ограничения на использование этого метода. Показывается, что восстановление сигналов рассмотренным способом неизбежно сопровождается возникновением погрешностей, вызываемых эффектами наложения и определяемых степенью неравномерности отсчетов. Изложение иллюстрируется результатами компьютерной симуляции.

В последние годы резко усилился интерес к проблеме восстановления сигналов по неравномерным отсчетам, с которой исследователям приходится сталкиваться в самых разных областях науки и техники. Это связано с тем, что классический метод восстановления, основанный на интерполяционной формуле Лагранжа – Иена [1], практически трудно применять из-за жестких требований к точности датировки отсчетов и необходимо прибегать к использованию других, может быть, неточных, но робастных методов.

В [2] дается подробный обзор результатов, полученных в этой области, и, в частности, описывается метод так называемого «нелинейного восстановления».

Прежде чем рассматривать его, напомним сначала соотношения, описывающие преобразования сигналов при их восстановлении. Процесс дискретизации непрерывного сигнала  $x(t)$  принято описывать выражением

$$x(t_k) = x(t)x_e(t_k),$$

где  $t_k$  – моменты выборки отсчетов, а  $x_e(t_k) = \sum_k \delta(t - t_k)$  – так называемая единичная выборочная функция.

Если считать процесс восстановления непрерывных сигналов по отсчетам как реакцию идеального фильтра нижних частот на последовательность

равномерных и неравномерных отсчетов, то эти реакции соответственно описываются следующими выражениями:

$$\tilde{x}(t) = \sum_k x(k\Delta) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{\Delta} (t - k\Delta),$$

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_k x(t_k) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{\Delta} (t - t_k),$$

$$\tilde{x}_e(t) = \sum_k \operatorname{sinc} \frac{\pi}{\Delta} (t - t_k),$$

где  $\Delta$  – интервал равномерной дискретизации.

В [2] указывается, что исходный сигнал  $x(t)$ , сигнал, восстановленный по неравномерным отсчетам,  $\tilde{x}_n(t)$  и восстановленная единичная функция  $\tilde{x}_e(t)$  связаны выражением  $\tilde{x}_n(t) = x(t)\tilde{x}_e(t)$  и для восстановления непрерывного сигнала по неравномерным отсчетам предлагается пользоваться выражением  $\tilde{x}(t) = \frac{\tilde{x}_n(t)}{\tilde{x}_e(t)}$ .

Тем самым подразумевается, что спектры этих сигналов связаны между собой соотношением свертки, поэтому восстановление сигналов по неравномерным отсчетам можно осуществлять как во временной, так и в частотной области.

Подобное восстановление в частотной области предлагалось в [3] выполнять путем преобразования спектра сигнала, полученного по неравномерным отсчетам, в спектр, соответствующий равномерным отсчетам методом десвертки, что позволяет далее восстановить непрерывный сигнал обычным образом. К сожалению, в [3] нет точностных оценок метода.

В связи с тем, что в [2] возможности метода «нелинейного восстановления» рассмотрены недостаточно тщательно, его погрешности не проанализированы, нет увязки этого метода с другими методами восстановления, и было выполнено настоящее исследование.

В первую очередь рассмотрим определяющий для использования метода нелинейного восстановления вопрос о ширине спектра сигнала  $\tilde{x}_n(t)$ , полученного по неравномерным отсчетам. Спектр входного сигнала  $x(t)$  предполагается ограниченным частотой, не превышающей половины средней частоты дискретизации  $f_d/2$ , спектр единичной функции  $\tilde{x}_e(t)$  (в зависимости от степени неравномерности) в общем случае также будет ограничен частотой  $f_d/2$ . Таким образом, спектр  $\tilde{x}_n(t)$ , который является сверткой этих спектров, будет ограничен уже частотой дискретизации, и тем самым будут иметь место наложения по всей ширине спектра.

В этом случае было бы естественным ввести передискретизацию сигнала и постфильтрацию. Так, если сузить полосу входного сигнала вдвое, то наложения займут только верхнюю половину спектра. При этом добавочная постфильтрация восстановленного сигнала  $\tilde{x}_n(t)$  с помощью фильтра нижних частот с этой суженной полосой позволит избежать вышеуказанных наложений.

Компьютерная симуляция процедуры нелинейного восстановления проводилась с помощью системы MatLab [4].

Было принято, что используемый для восстановления сигналов фильтр нижних частот имеет частоту среза, равную половине средней частоты дискретизации (неравномерных отсчетов)  $f_d = 1/\Delta$ . Симуляция осуществлялась при использовании известного «свернутого» выражения для весовой функции фильтра нижних частот, полученного для периодически повторяемых совокупностей неравномерных отсчетов входного сигнала и позволяющего тем самым заменить при восстановлении бесконечную сумму взвешенных отсчетов на конечную:

$$W_k(t) = c \frac{\sin[\pi(t - t_k)/\Delta]}{N \sin[\pi(t - t_k)/N\Delta]}, \quad c = \begin{cases} 1 & \text{для нечетных } N, \\ \cos[\pi(t - t_k)/N\Delta] & \text{для четных } N, \end{cases}$$

где  $N$  – число отсчетов на периоде существования сигнала.

Как указывалось выше, спектр единичной функции  $S_e(\omega_k)$  определяется неравномерностью отсчетов. Для описания степени неравномерности отсчетов обычно вводится дискретная функция  $\mu(k\Delta)$ , определяющая отклонения неравномерных отсчетов от соответствующих равномерных. Спектр непрерывной функции  $\tilde{\mu}(t)$ , восстановленной обычным способом по ее равномерным отсчетам, будет ограничен частотой  $f_d/2$ .

Приведем исходные данные моделирования, которые использовались при получении рис. 1–6. На временном интервале  $T = [-0,5; 0,5]$  было взято 45 равномерных отсчетов. В качестве исходного сигнала выбрана функция с ограниченным спектром:  $x(t) = [1 + \cos(4\pi t)/2 - \cos(8\pi t)/2]/1,563$ .

Положение неравномерных отсчетов задавалось либо случайным образом, либо, для удобства анализа, в виде детерминированной функции. В случае задания  $\mu(t)$  детерминированной функцией она представляется набором гармоник  $\mu(t) = A_\mu \Delta \sum_k a_k \sin(2\pi k t/T)$ , а значения  $\mu(t_k)$  вычисляются

для соответствующих моментов времени  $t_k$ . При случайном генерировании значений  $\mu(t_k)$  они вычислялись в соответствии с выражением  $\mu(t_k) = A_\mu \Delta [\text{rand} - 0,5]$ , где  $\text{rand}$  – случайные числа в интервале  $[0; 1]$ .

Компьютерная симуляция показывает, что если задавать функцию  $\mu(t)$  в виде одной синусоиды, то в спектре единичной функции наблюдаются кратные ей гармоники. Амплитуды возникающих гармоник пропорциональны производной  $\mu'(t)$ . При наличии в  $\mu(t)$  нескольких синусоид в спектре единичной функции  $S_e(\omega_k)$  появляются гармоники комбинационных частот. При дискретизации этого широкополосного сигнала гармоники, частота которых выше половины частоты дискретизации, отражаются и попадают в полосу пропускания фильтра. Все это хорошо видно на рис. 1, а, для которого  $\mu(t)$  содержит две гармоники – пятую и шестую (здесь  $A_\mu = 0,5$ ). Чтобы подчеркнуть этот эффект, на рис. 1, а и б приведены спектры не единичной функции  $\tilde{x}_e(t)$ , а функции  $\tilde{x}_e(t) - 1$ , т. е. с исключением постоянной составляющей.

При задании  $\mu(t_k)$  случайным образом спектр  $\tilde{x}_e(t)$  получается значительно более богатым и число отраженных в полосу пропускания гармоник значительно больше (см. рис. 1, б, здесь  $A_\mu = 0,5$ ).

Таким образом, единичная функция на самом деле обладает неограниченной полосой, и при используемой частоте дискретизации будут иметь место наложения в спектре  $S_e(\omega_k)$ , а следовательно, и определение функции  $x_e(t)$  будет осуществляться с ошибками. Это по существу и является одной из

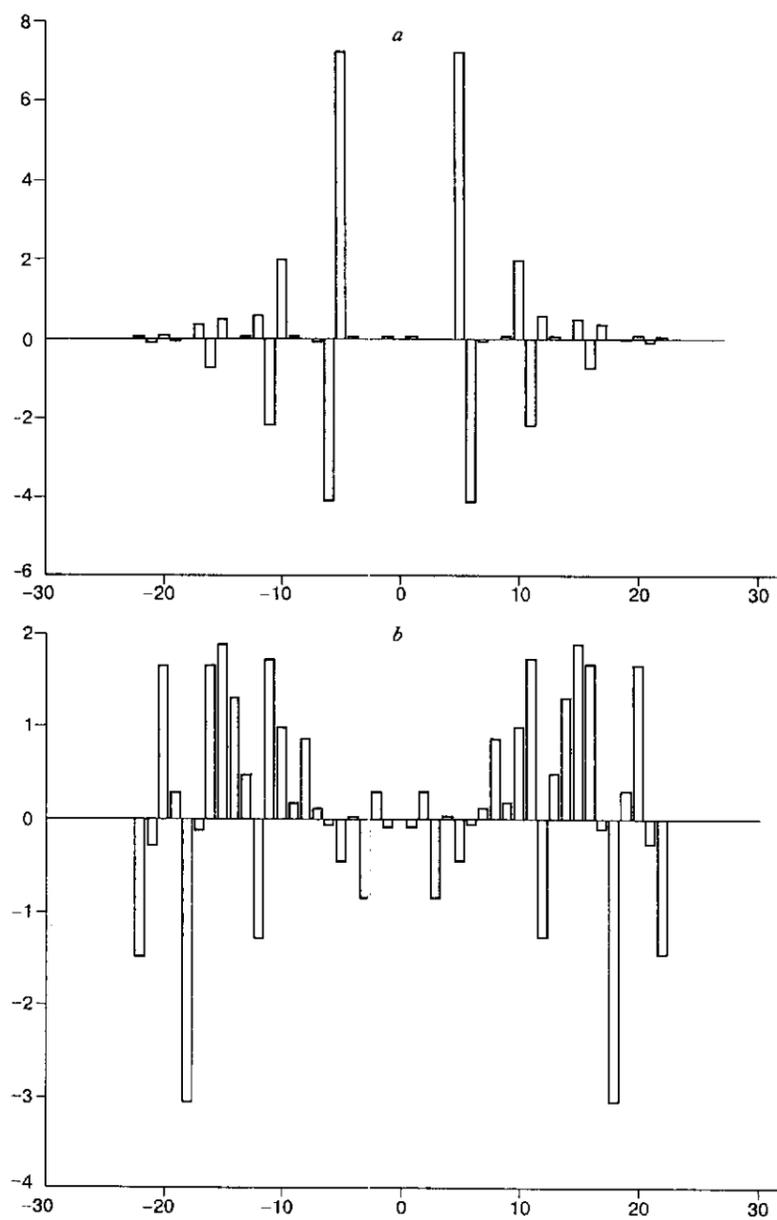


Рис. 1. Спектр функции  $\tilde{x}_e(t) - 1$  в случае детерминированной (а) и случайной (b) функции  $\mu$

основных причин возникновения погрешностей при нелинейном восстановлении. Метод работает успешно только тогда, когда гармоники  $\mu$  не порождают значимых высокочастотных гармоник вне полосы, определяемой частотой дискретизации, т. е. для достижения заданной точности восстановления сигнала необходимо ограничивать соответствующим образом девиацию

отсчетов, а также ее верхнюю частоту. При этом даже при больших амплитудах  $\mu$  значимых погрешностей не возникает.

Можно предположить, что аналогичные наложения в спектре  $S_e(\omega_k)$  будут присутствовать при восстановлении по методу, описанному в [3], и тем самым это восстановление будет сопровождаться аналогичными ошибками.

Заметим, что задание в качестве исходных данных других функций  $x(t)$  и  $\mu(k\Delta)$  с аналогичными ограничениями приводит к подобным результатам.

В [2] приводится следующее приближенное выражение для единичной функции:  $\tilde{x}_e(t) = 1 - \mu'(t)$ , в соответствии с которым спектр  $S_e(\omega_k)$  будет ограниченным, как и спектр функции  $\mu'(t)$ , что не позволяет объяснить эффекты размножения частот, возникающие при нелинейном восстановлении.

В соответствии с результатами симуляции выражение для  $\tilde{x}_e(t)$  может быть уточнено следующим образом:

$$\tilde{x}_e(t) = 1 - [\mu'(t) + [\mu'(t)]^2 + \mu''(t)\mu(t)].$$

Наличие комбинационных частот как раз и может быть объяснено добавочными членами разложения.

На рис. 2 представлены полученные при симуляции графики, которые иллюстрируют метод нелинейной интерполяции. Погрешности восстановления показаны на рис. 3, *a, b* (при тех же условиях, при которых получен рис. 1).

При использовании нелинейного восстановления возникают некоторые особенности. Нелинейная интерполяция основана на операции деления, ее применение должно быть ограничено такой неравномерностью отсчетов, при которой единичная выборочная функция  $\tilde{x}_e(t) > 0$ , так как при делении возможна ситуация, когда возникает неопределенность, если  $\tilde{x}_n(t)$  и  $\tilde{x}_e(t)$  одновременно равны нулю. Однако из-за помех, возникающих при восста-

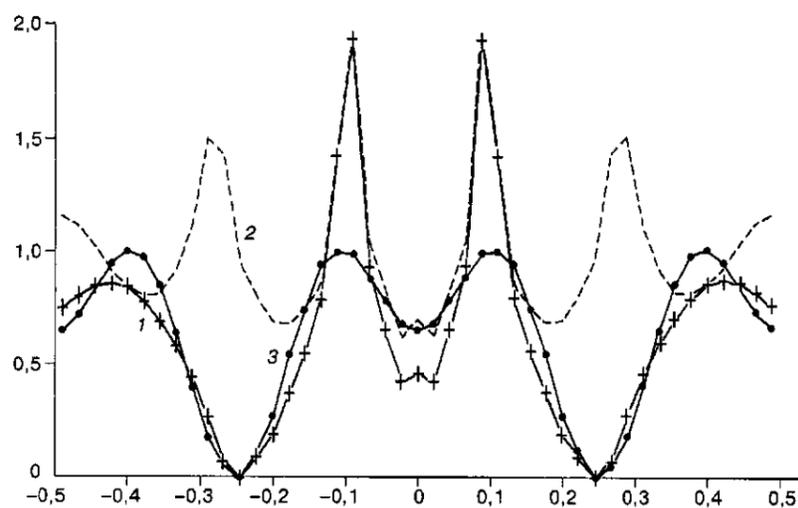


Рис. 2. Восстановление сигнала нелинейным методом:  $\tilde{x}_n$  – сигнал, восстановленный ФНЧ по неравномерным отсчетам (1),  $\tilde{x}_e$  – единичная функция, восстановленная ФНЧ по неравномерным отсчетам (2),  $\tilde{x}$  – результат нелинейного восстановления (3)

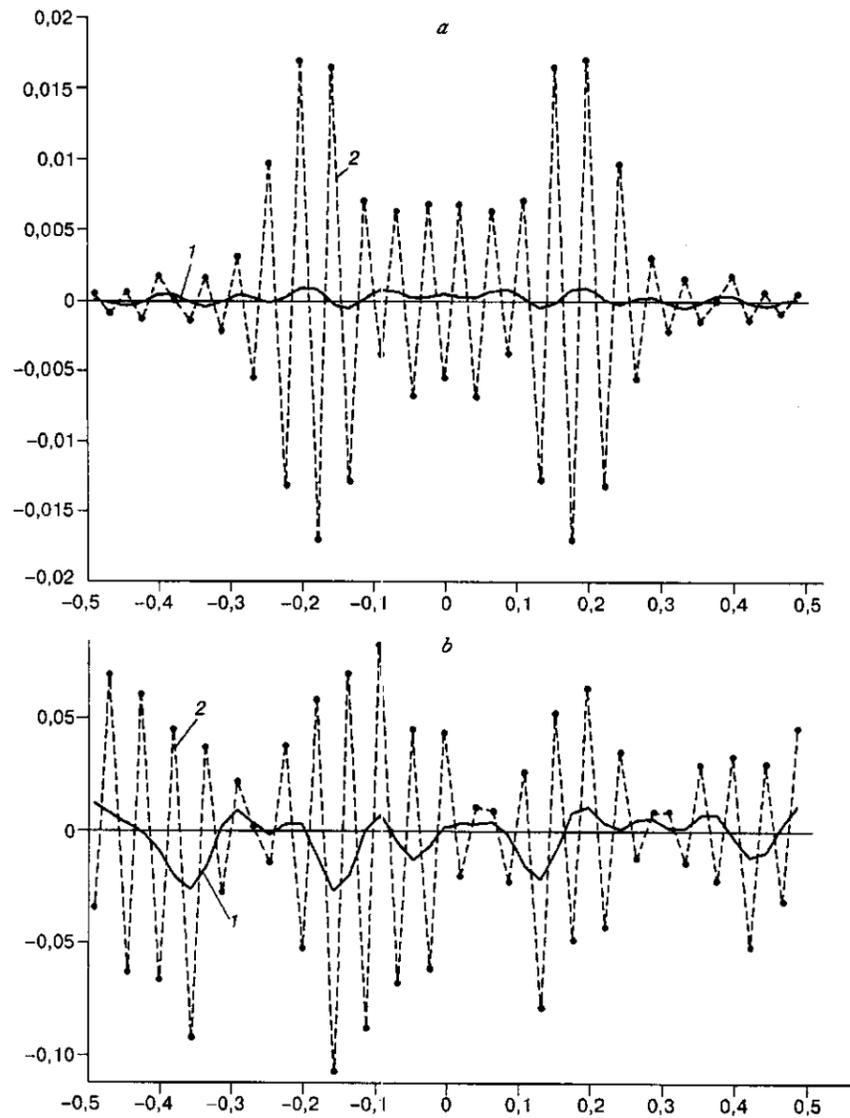


Рис. 3. Погрешность восстановления  $\tilde{x}(t) - x(t)$  для детерминированной (а) и случайной (б) функции  $\mu$ : с постфильтрацией (1), без постфильтрации (2)

новлении, эти функции обращаются в нуль в разные моменты времени, в результате чего могут образовываться выбросы.

Численная симуляция показала, что для обеспечения положительности единичной функции при использовании фильтра нижних частот с частотой среза, равной  $f_d/2$ , неравномерность отсчетов должна быть  $t_i - t_{i+1} < 2\Delta$  (т. е.  $\Delta\mu_{i,i+1} < 1$ ).

На рис. 4 представлена зависимость среднеквадратической ошибки восстановления (осредненной по пяти реализациям  $\mu(t_k)$ ) от амплитуды  $A_\mu$  с

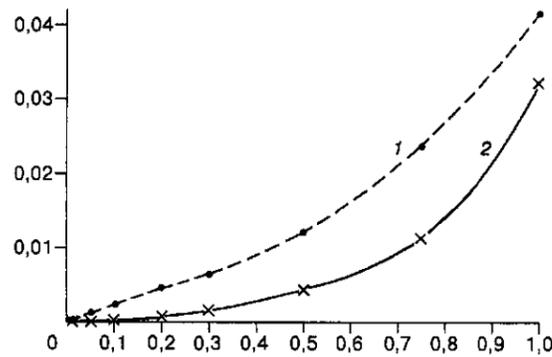


Рис. 4. Среднеквадратическая ошибка восстановления при случайной функции  $\mu$  в зависимости от  $A_\mu$ : без постфильтрации (1), с постфильтрацией (2)

постфильтрацией и без нее. Видно, что ошибка нелинейно зависит от  $A_\mu$ , быстро возрастая при  $A_\mu > 0,5$  (что соответствует девиации  $\pm \Delta/4$ ). Этот график позволяет оценивать характер связи допустимой девиации  $\mu$  с допустимым значением среднеквадратической погрешности. Эффективность постфильтрации падает с увеличением  $A_\mu$ . Здесь следует отметить, что максимальная погрешность восстановления при постфильтрации уменьшается быстрее среднеквадратической (при фиксированном коэффициенте передискретизации).

Симуляция показала, что изменение частоты дискретизации вдвое также примерно вдвое изменяет средний квадрат погрешности.

Важной была проверка робастности исследуемой процедуры. Для этого проводилось сравнение погрешностей восстановления по методу Лагранжа – Иена и методу нелинейной интерполяции при использовании квантованных по уровню и времени отсчетов.

Восстановление непрерывных сигналов по Лагранжу – Иену выполнялось также по «свернутой» формуле (9) из [1] для весовой функции:

$$W_k(t) = c \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq k}}^{N-1} \frac{\sin \frac{\pi}{N\Delta} (t - t_r)}{\sin \frac{\pi}{N\Delta} (t_k - t_r)}$$

Симуляция показала, что с увеличением погрешности квантования отсчетов погрешности восстановления для этих двух методов увеличиваются с разной скоростью. Использование квантованных отсчетов при выполнении нелинейной интерполяции слабо влияет на результат. Процедура Лагранжа значительно более критична к точности отсчетов. Это подтверждает робастность метода нелинейного восстановления.

На рис. 5, а, б показаны ошибки восстановления, когда значение сигнала «измерялось» 10-разрядным АЦП, а времени – 12-разрядным. В том случае, когда спектр  $\mu$  ограничен и свертка спектров  $x(t)$  и  $\tilde{x}_c(t)$  не выходит за пределы  $f_d/2$ , метод нелинейной интерполяции работает эффективно и при наличии дискретизации по уровню и времени не уступает методу Лагранжа – Иена, обеспечивая в этом случае при неравномерностях  $\sim \Delta/4$  среднеквадра-

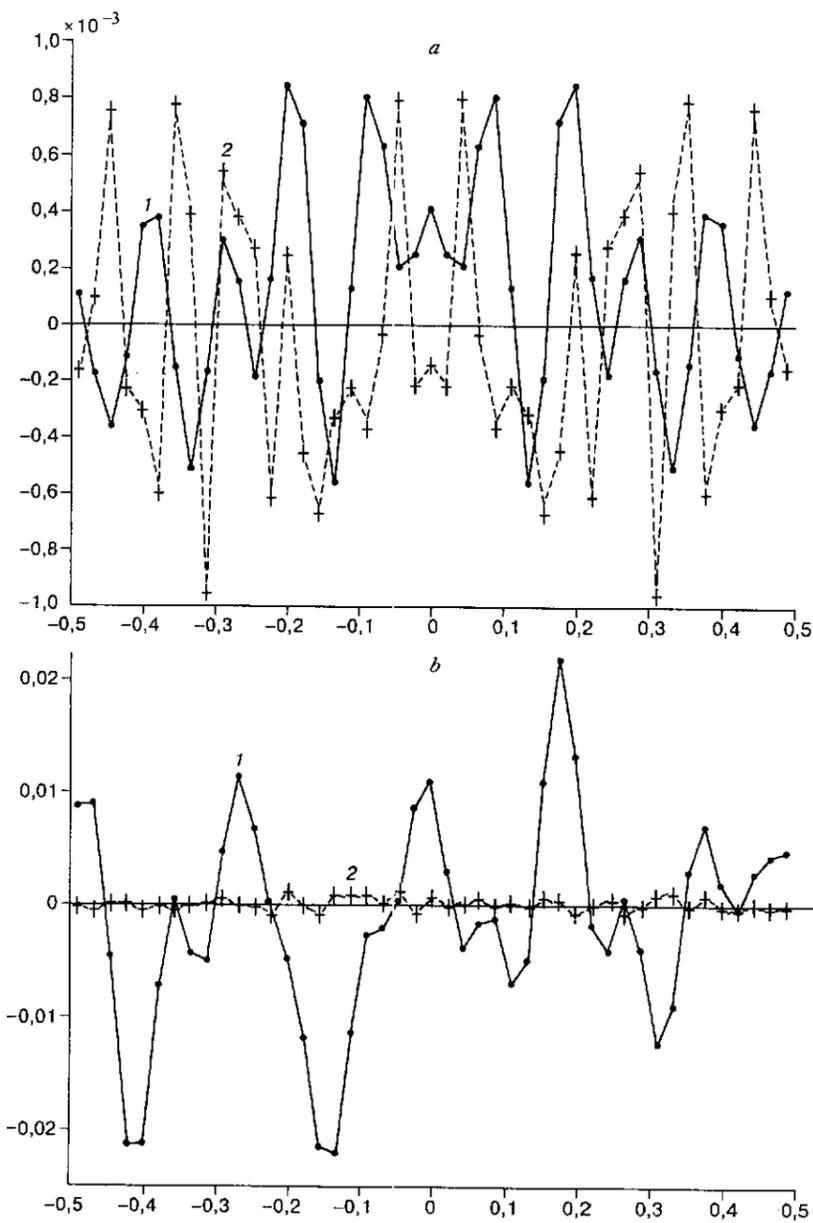


Рис. 5. Ошибки восстановления для детерминированной (а) и случайной (б) функции  $\mu$ : нелинейная интерполяция с постфильтрацией (1), метод Лагранжа – Иена (2)

тическую ошибку восстановления (вычисленную по данным рис. 5) менее  $6 \cdot 10^{-5}$ . Однако если спектр  $\mu$  не ограничен, то при высокой точности исходных данных преимущества метода Лагранжа – Иена очевидны.

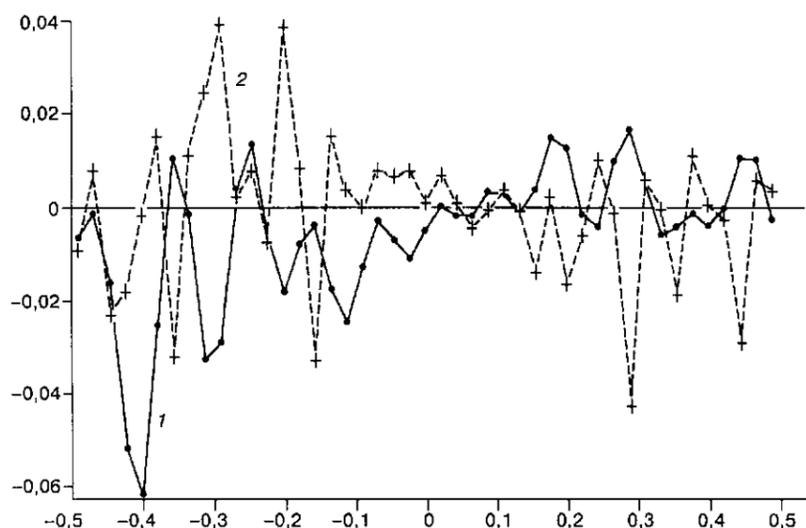


Рис. 6. Ошибка восстановления при квантовании отсчетов по времени и амплитуде для случайной функции  $\mu$ : нелинейная интерполяция с постфильтрацией (1), метод Лагранжа – Иена (2)

На рис. 6 представлены результаты, полученные при использовании более грубых квантователей (6 разрядов по амплитуде и 7 разрядов по времени), когда оба метода дают примерно одинаковую среднеквадратическую ошибку, но в этом случае ее значение много больше – порядка  $2,5 \cdot 10^{-3}$ .

В заключение отметим, что метод нелинейного восстановления сигналов по своей природе близок к методу восстановления сигнала, основанного на преобразовании спектра неравномерных отсчетов в спектр равномерных, отличаясь тем, что он реализуется во временной, а не в частотной области и в непрерывной, а не в дискретной форме.

Достоинством нелинейного восстановления является то, что в отличие от классического способа при его реализации используются обычные весовые функции типа sinc и нет необходимости осуществлять вычисления весовых функций Лагранжа – Иена, которые при больших неравномерностях в промежутках между отсчетами становятся много больше единицы и требуют точного задания отсчетов сигнала и значительного времени для вычислений.

Недостатком этого способа восстановления является наличие погрешностей, возникающих вследствие эффекта наложения спектров, определяемого степенью неравномерности отсчетов.

Для получения приемлемых результатов при применении нелинейной интерполяции необходима передискретизация и последующая постфильтрация, а также ограничение значений девиации отсчетов.

Значения девиации, при которых получают приемлемые погрешности, соответствуют тому, что достигнуто в других процедурах, например, в итерационных процедурах восстановления [2]. Описанная процедура восстановления (использованная при симуляции) может быть использована на практике.

Работа выполнена при содействии Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00610).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yen J. I. On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals // IRE Trans. Circuit Theory. 1956. CT-3. N 4.
2. Marvasti F. Nonuniform sampling // Advanced Topics in Shennon Sampling and Interpolation Theory /Ed. R. Marks II. N. Y.: Springer Verlag, 1993.
3. Jenq Y-C. Perfect reconstruction of digital spectrum from nonuniformly sampled signals // IEEE Trans. Instrumentation and Measurement. 1997. 46, N 3.
4. Дьяконов В. П. Справочник по применению системы PC MatLab. М.: Наука, 1993.

*Поступила в редакцию 30 апреля 1999 г.*

---

---

---

**Реклама продукции в нашем журнале – залог Вашего успеха!**