РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1999

УДК 519.24

А. Ж. Абденов

(Новосибирск)

К ВОПРОСУ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ НА ОСНОВЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ

Ставится и решается задача планирования ковариационной матрицы шумов измерителя для достижения заданной точности параметров в модели динамики процесса. Предлагается алгоритм активной идентификации, основанный на оптимизации ковариационной матрицы для достижения желаемой точности относительно динамических параметров. Приводится результат численного расчета для тестового примера.

Введение. При решении ряда прикладных задач статистической обработки информации приходится использовать методы оценивания параметров и состояния объекта по данным наблюдений за входом-выходом измерительной системы [1]. Такая потребность возникает, например, в задаче навигации по геофизическим полям [2] и в задаче диагностики технологических режимов космических ростовых установок [3]. В первой из этих задач необходимость использования методов оценивания обусловлена зависимостью значений измеряемых полей от подлежащих оцениванию координат объекта, а во второй задаче – зависимостью переменных от времени параметров как неизвестных в линейной дифференциальной модели динамики движения фронта кристаллизации от скорости роста кристаллов. При решении подобных задач оценивания наиболее предпочтительны в большинстве случаев алгоритмы, обеспечивающие минимальную среднеквадратическую ошибку оценивания. Ввиду сложности получения оптимальных алгоритмов решения задач нелинейного оценивания параметров, входящих в дифференциальную модель динамики, для приближенной оценки потенциальной точности в этих задачах целесообразно использовать нижние границы точности (НГТ), устанавливаемые на основании неравенства Рао – Крамера [4, 5]. Такие НГТ зачастую оказываются достаточно близки к потенциальной точности и могут быть определены с помощью методов теории планирования экспериментов. Существует множество рычагов управления экспериментом для повышения информативности данных наблюдений с целью наиболее точного оценивания неизвестных динамических параметров [4–6]. В данной работе предлагается методика планирования дисперсионной матрицы измерительной системы для идентификации линейных нестационарных непрерывно-дискретных систем, представленных в терминах пространства состояний.

Постановка задачи. Пусть объект описывается в форме одномерной дифференциальной модели с точностью до неизвестного переменного параметра $a(t)$:

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = a(t)\gamma(t), \qquad \gamma(t_0) = \gamma_0, \qquad t, t_0 \in [t_0, t_N], \tag{1}$$

где $\gamma(\cdot)$ – осевой градиент температуры на фронте кристаллизации (ФК) [3]. В отличие от модели динамики (1) модель измерителя описывается в виде стохастического дискретного алгебраического соотношения

$$V_\xi(t_k) = \mathbf{H}\gamma(t_k) + \nu(t_k), \qquad k = \overline{1, N}, \quad t, t_k \in [t_0, t_N]. \tag{2}$$

Здесь V_ξ – вектор измерений скорости движения ФК (или скорость роста кристаллов) размером m; $\{\nu(t_k),\ k = \overline{1, N}\}$ – гауссов белый шум измерений с характеристикой $(0, R)$; $\mathbf{H}$ – весовой вектор-столбец размером $m \times 1$; R – ковариационная матрица шумов измерений размером $m \times m$, характеризующая точность измерительной системы. Итак, имеются m видов измерителей, которые ведут наблюдение за осевым градиентом температуры на ФК.

Для обеспечения требуемой точности при идентификации поведения траектории для процесса $\{\gamma(t),\ t \in [t_0, t_N]\}$, а значит, необходимой точности оценивания функции $a(t)$ в дифференциальной модели представляет интерес исследование возможности использования измерителей с необходимыми точностными характеристиками. Формально ставится задача активной идентификации переходной функции $a(t)$ на основе наиболее информативных данных наблюдений, которая должна быть обеспечена оптимальным подбором значений диагональных элементов ковариационной матрицы R.

Планирование ковариационной матрицы шумов измерителя. Проанализируем возможность планирования точности измерений с помощью информационной матрицы Фишера (ИМФ), чтобы оценить с наперед заданной точностью параметры $\{a_i,\ i = \overline{1, M}\}$, которые соответствуют элементарным участкам $[t_{i-1}, t_i]$ из временного интервала $[t_0, t_N]$, где $\{[t_{i-1}, t_i] \subset \subset [t_0, t_N],\ i = \overline{1, M}\}$ (M – число элементарных участков). На каждом таком элементарном участке будем предполагать, что процесс $\{\gamma(t),\ t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = \overline{1, M}\}$ квазистационарный. После процедур восстановления оценочного ряда $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_M$ подберем к нему некоторую оценочную функцию $\hat{a}(t)$.

Известно, что нижняя граница Рао – Крамера определяется с помощью неравенства [4]

$$I \le G, \tag{3}$$

где диагональный элемент G_i ковариационной матрицы G относительно ошибок оценок динамических параметров $\hat{a}_i = E_{a_i | V_\xi}[a_i]$ определяется выражением

$$G_i = E_{a_i}[(a_i(t_k) - \hat{a}_i)^2], \qquad t_k \in [t^{i-1}, t^i] \subset [t_0, t_N], \quad i = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, N_i}. \tag{4}$$

Здесь E – оператор математического ожидания. В частности, для G_i можно использовать следующее соотношение (из двух известных [4]):

$$G_i = \left(E_{a_i}\left[\frac{\partial^2 \ln P(V_\xi^i \mid a_i)}{\partial a_i^2} \right] \right)^{-1}, \qquad i = \overline{1, M}, \tag{5}$$

где $P(V_\xi^i \mid a_i)$ – условная плотность вероятности.

Исходя из предположения о гауссовости шумов измерения, можно записать логарифмическую функцию для модели и измерителей (2) следующим образом:

$$L(a_i) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_i}\{\nu^T(t_k^i)R^{-1}\nu(t_k^i) + \log|R| + \log(2\pi)\}, \qquad i = \overline{1, M}, \tag{6}$$

где $\nu(t_k^i) = V_\xi(t_k) - \mathbf{H}\gamma(t_k^i)$ и N_i – объем выборки для i-го элементарного участка. Для вычисления ИМФ будем использовать формулы (5), (6) и $L(a_i) = \log P(V_\xi \mid \hat{a}_i)$, которые позволят записать соотношение [4, 7, 8]

$$M_{a_i} = \sum_{k=1}^{N} E_{V_\xi^i \mid a_i}\left[\frac{\partial\gamma(t_k^i)}{\partial a_i}\mathbf{H}^T R^{-1}\mathbf{H}\,\frac{\partial\gamma(t_k^i)}{\partial a_i}\right], \qquad i = \overline{1, M}, \tag{7}$$

$$M_{a_i} = G_i^{-1}. \tag{8}$$

Для обеспечения минимальной среднеквадратической ошибки оценивания (см. соотношение (4)) можно выполнить процедуру минимизации на основе ковариационной матрицы шумов измерения, т. е. необходимо планировать дисперсию (или точность) относительно каждого измерителя, чтобы минимизировать соотношение (4) или максимизировать (7). На практике для достижения желаемой точности для динамических параметров можно планировать точность измерителей. Рассмотрим один алгоритм активной идентификации неизвестных параметров на основе планирования точности измерительной системы.

Пусть $t \in [0, T]$, $x(0) = x(t_0) = x_0$, $x(T) = x(t_N)$. Необходимо оценить $\tilde{a}(t)$ с точностью $\varepsilon = \mathrm{const}$, т. е. $|\tilde{a}(t) - a(t)| < \varepsilon$, $t \in [t_0,\ t_N]$, где $\tilde{a}(t)$ – эмпирическая функция при переменной состояния, которая может быть восстановлена для ряда $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_M$.

Запишем систему (1), (2), которая формально будет соответствовать каждому элементарному участку из $t \in [t_0,\ t_N]$:

$$\dot{\gamma}(t) = a(t)\gamma(t), \qquad \gamma(t_0) = \gamma_0, \qquad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1, M}, \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} V_{\xi 1}(t_k^i) \\ V_{\xi 2}(t_k^i) \\ \vdots \\ V_{\xi m}(t_k^i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}\gamma(t_k^i) + \begin{pmatrix} \nu_1(t_k^i) \\ \nu_2(t_k^i) \\ \vdots \\ \nu_m(t_k^i) \end{pmatrix}, \qquad k = \overline{1, N_i}, \quad i = \overline{1, M}. \tag{10}$$

Аналитическое решение для (9) запишется в виде

$$\tilde{\gamma}(t) = e^{a(t)\Delta t}\,\tilde{\gamma}(t_1^i), \qquad i = \overline{1, M}, \quad \tilde{\gamma}(t_0) = \gamma_0, \tag{11}$$

подставив которое в (10), получим

$$V_\xi(t_k^i) = \mathbf{H}\tilde{\gamma}(t_k^i) + \nu(t_k^i), \qquad t_k^i \in [t^{i-1}, t^i] \subset [t_0, t_N], \quad k = \overline{1, N_i}, \tag{12}$$

где $\Delta t = t^i_{N_i} - t^i_1$ – шаг квантования, внутри которого процесс предполагается квазистационарным; $t^i_1 = t^{i-1}_{N_i}$, $t^1_1 = t_0$, $t^{M-1}_{N_{M-1}} = t^M_1$, $i=\overline{1,M}$. Матрица наблюдения $\mathbf{H}$ имеет следующую структуру: $\mathbf{H}^T=(h_1, ..., h_m)$. Если каждое соотношение в (12) поделить на соответствующее h_l, $l=\overline{1,m}$, то весовой вектор наблюдения ($\mathbf{H}$) преобразуется в столбец из единиц. Далее исходя из предположения, что внутри элементарных участков $[t^{i-1}, t^i]$ процесс $\{\gamma(t), t\in[t_0, t_N]\}$ обладает свойством квазистационарности, мы вправе считать $a(t^i_k) = \hat{a}_i =$ $=\text{const}$, $t^i_k \in [t^{i-1}, t^i]$, $i=\overline{1,M}$, $k=\overline{1,N_i}$. Тогда можно записать следующие соотношения:

$$\tilde{\gamma}(t^i_k) \approx e^{a_i\delta}\tilde{\gamma}(t^i_{k-1}), \quad k=\overline{2,N_i}, \quad i=\overline{1,M}, \quad \tilde{\gamma}(t_0)=\gamma(t^1_1)=\gamma_0, \tag{13}$$

$$V_\xi(t^i_k) = \mathbf{H}\tilde{\gamma}(t^i_k) + \nu(t^i_k), \quad k=\overline{2,N_i}, \quad i=\overline{1,M}, \tag{14}$$

где $\delta = t^i_k - t^i_{k-1}$ – шаг интегрирования. С помощью субоптимального алгоритма из [7] можно оценить неизвестные параметры для каждого элементарного участка. Такая процедура дает нам оценочный ряд $\hat{a}_1, ..., \hat{a}_M$.

Тогда из (13), (14) запишем соотношения

$$\frac{\partial\tilde{\gamma}(t^i_k)}{\partial a_i} = e^{a_i\delta}\tilde{\gamma}(t^i_1)\delta, \quad \tilde{\gamma}(t^1_1)=\gamma(t_0), \quad k=\overline{1,N_i}. \tag{15}$$

Решение задачи пассивной идентификации обозначим через $\{\tilde{a}_i, i=\overline{1,M}\}$. Теперь можно ставить задачу оптимизации величины M_{a_i} в зависимости от ковариационной матрицы R:

$$M_{a_i} \to \max_R, \tag{16}$$

где структура ковариационной матрицы R имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{mm} \end{pmatrix}.$$

Тогда функционал качества (16) можно записать более упрощенно в виде

$$M_{a_i} \to \max_{r_{11}, ..., r_{mm}}. \tag{17}$$

Исходя из (7) и (15), получим

$$M_{a_i} = \sum_{k=2}^{N_i}\left[\frac{\partial\tilde{\gamma}(t^i_k)}{\partial a_i}\mathbf{H}^T R^{-1}\mathbf{H}\frac{\partial\tilde{\gamma}(t^i_k)}{\partial a_i}\right] =$$

$$= \sum_{k=2}^{N_i} e^{\hat{a}_i\delta}\delta\tilde{\gamma}(t^i_{k-1})((r^i_{11})^{-1} + ... + (r^i_{mm})^{-1})e^{\hat{a}_i\delta}\delta\tilde{\gamma}(t^i_{k-1}) =$$

$$= e^{2\hat{a}_i\delta}(\delta)^2\sum_{j=1}^{m}(r_{jj})^{-1}\sum_{k=2}^{N_i}\tilde{\gamma}^2(t^i_{k-1}). \tag{18}$$

Пусть потребности практики для ширины коридора относительно истинного поведения процесса $a(t)$ диктуют точность, которая бы не превышала малое число ε. Формально это требование запишется в виде

$$G = (M_{a_i})^{-1} < \varepsilon, \qquad i = \overline{1, M}. \tag{19}$$

Тогда соотношение (19) в развернутом виде будет выглядеть следующим образом:

$$\left(e^{2\hat{a}_i \delta} (\delta)^2 \sum_{j=1}^{m} (r_{jj})^{-1} \sum_{k=2}^{N_i} \tilde{\gamma}^2 (t_{k-1}^i) \right)^{-1} < \varepsilon$$

или

$$e^{2\hat{a}_i \delta} (\delta)^2 \sum_{j=1}^{m} (r_{jj})^{-1} \sum_{k=2}^{N_i} \tilde{\gamma}^2 (t_{k-1}^i) > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\sum_{j=1}^{m} (r_{jj})^{-1} > \frac{1}{\varepsilon e^{2\hat{a}_i \delta} (\delta)^2 \sum_{k=2}^{N_i} \tilde{\gamma}^2 (t_{k-1}^i)}.$$

Пусть для простоты $r_{11} = \ldots = r_{mm} = r$. Тогда из последнего соотношения будем иметь:

$$r_{jj}^{-1} > \frac{1}{\varepsilon m e^{2\hat{a}_i \delta} (\delta)^2 \sum_{k=2}^{N_i} \tilde{\gamma}^2 (t_{k-1}^i)},$$

откуда окончательно получаем

$$r_{jj} < \varepsilon m e^{2\hat{a}_i \delta} (\delta)^2 \sum_{k=2}^{N_i} \tilde{\gamma}^2 (t_{k-1}^i). \tag{20}$$

Подставляя на каждом элементарном участке начальные значения, получим ограничения на точность измерений сверху. Далее для ряда $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_M$ можно подобрать оценочную функцию $\hat{a}(t)$ с помощью методов вычислительной математики [8].

Рассмотрим частный случай, когда $M = 1$, $m = 1$, $\delta = 0{,}01$, $\gamma(t_0) = x(t_0) = 1$, $\varepsilon = 0{,}01$, $N_1 = 10$, $\hat{a} = F = 1$, т. е. когда $\gamma(t)$ – стационарный процесс на всем интервале наблюдения $[t_0, t_N]$ и тип измерителя только один. Тогда применение соотношения (20) позволит определить величину дисперсии ошибок измерения для измерителя.

Результаты расчета при решении задачи активной идентификации показывают, что повышение информативности выхода измерителя за счет повышения точности измерений повышает и точность оценок параметров. Если для простоты соотношение (1) преобразовать к конечно-разностному виду:

$$x(t_{k+1}) = F x(t_k), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{21}$$

то при фиксированных значениях для (21) результаты расчета сведены в таблицу.

Результаты расчета активной идентификации на основе оптимальной ковариационной матрицы шумов измерения

$F_{\text{ист}}$	$R_{\text{ист}}$	
	0,1	1
-0,9	$\hat{R} = 0{,}133054$ $\hat{F} = -0{,}900356$	$\hat{R} = 1{,}01538$ $\hat{F} = -0{,}609968$
ln det	$M = 7{,}527923$	$M = 3{,}598670$
-0,5	$\hat{R} = 0{,}04207$ $\hat{F} = -0{,}5001$	$\hat{R} = 1{,}00834$ $\hat{F} = -0{,}375966$
ln det	$M = 11{,}143061$	$M = 4{,}827935$

Заключение. Применительно к задачам активной идентификации нестационарных процессов разработан алгоритм, позволяющий планировать дисперсию измерителей для достижения заданной точности относительно переменного параметра как неизвестной функции. Рассмотрен пример, подтверждающий работоспособность процедуры оценивания на элементарных участках, где нестационарный процесс предполагается квазистационарным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сейдж Э., Мелса Дж.** Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.
2. **Ярлыков М. С., Миронов М. А.** Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
3. **Озерных И. Л., Забудько М. А., Саяпин С. Н.** Системы информационно-технологического обеспечения экспериментов по выращиванию кристаллов в условиях микрогравитации // Тр. IV Междунар. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения». АПЭП-98. Новосибирск, 1998. Т. 3. С. 62.
4. **Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалай А. М.** Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). М.: Металлургия, 1978.
5. **Mehra R. K.** Optimal input signals for parameter estimation in dynamic system. Survey and new results // IEEE Trans. Aut. Control. 1974. **19**. P. 753.
6. **Абденов А. Ж.** Повышение информативности измерений для стохастических динамических систем на основе спектральной плотности мощности входного сигнала // Автометрия. 1999. № 1. С. 74.
7. **Абденов А. Ж.** Субоптимальное планирование ковариационных матриц и динамических параметров с целью повышения точности калмановской фильтрации для линейных дискретных систем // Тр. IV Междунар. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения». АПЭП-98. Новосибирск, 1998. Т. 10. С. 53.
8. **Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.** Анализ данных на компьютере. М.: Финансы и статистика, 1995.

Поступило в редакцию 1 марта 1999 г.