РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 3 1999

УДК 621.391

И. С. Грузман
(Новосибирск)

ДВУХЭТАПНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ БИНАРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Определены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых данные строк и столбцов бинарных случайных полей условно независимы относительно отсчета, лежащего на их пересечении, и возможно построение оптимальных двухэтапных оценок. Получен двухэтапный нелинейный фильтр, который для образования оценки бинарного изображения в произвольной точке растра использует данные соответствующих строки и столбца. Показано, что двухэтапные фильтры могут быть реализованы в виде параллельно-рекуррентных алгоритмов, обладающих высокой вычислительной эффективностью и помехоустойчивостью.

В работе [1] предложен метод синтеза байесовских двухэтапных алгоритмов обработки изображений, которые опираются на свойство условной независимости случайных полей и оптимальным образом используют неполные данные – данные строки и столбца, проходящих через текущую точку оценивания. При этом алгоритмы оценивания изображений сводятся к независимой одномерной обработке строк и столбцов на первом этапе с последующим оптимальным объединением результатов одномерного оценивания на втором этапе.

В основе этих алгоритмов лежат поля марковского типа [2], для которых свойство условной независимости в терминах условных вероятностей имеет вид [1, 3]:

$$P(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \Lambda^{(3)}, \Lambda^{(4)} \,|\, \lambda(i_1, i_2)) = P(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(3)} \,|\, \lambda(i_1, i_2))P(\Lambda^{(2)}, \Lambda^{(4)} \,|\, \lambda(i_1, i_2)), \tag{1}$$

где $\Lambda^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$,– векторы данных, принадлежащие вертикальным и горизонтальным лучам поля Λ, которые выходят из точки $\lambda(i_1, i_2) \notin \Lambda^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$, с координатами (i_1, i_2) (рис. 1); $P(\cdot)$ – распределение вероятностей. Здесь и далее для краткости опущен индекс (i_1, i_2) при $\Lambda^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$.

Для гауссовских полей доказано, что свойство (1) имеет место тогда и только тогда, когда двумерная ковариационная функция (КФ) поля разделима по пространственным координатам [1]. Кроме того, если КФ поля Λ биэкспоненциальна, то строки и столбцы поля образуют одномерные марковские последовательности, а данные $\Lambda^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$, расположенные на верти-

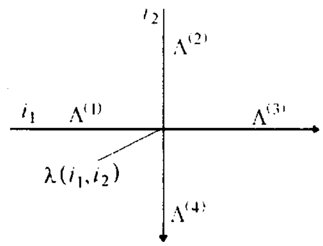

Рис. 1

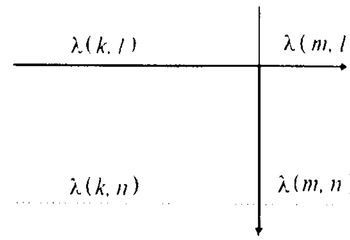

Рис. 2

кальных и горизонтальных лучах, условно независимы при известном значении $\lambda(i_1, i_2)$, т. е. условное распределение

$$P(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \Lambda^{(3)}, \Lambda^{(4)} \mid \lambda(i_1, i_2)) = \prod_{k=1}^{4} P(\Lambda^{(k)} \mid \lambda(i_1, i_2)). \tag{2}$$

В [1, 4–6] для гауссовских полей марковского типа, обладающих свойствами (1) и (2), были синтезированы экономичные линейные двухэтапные алгоритмы первичной обработки изображений. Расширить круг решаемых задач обработки изображений двухэтапными методами можно, распространив полученные результаты для бинарных полей, используемых, как правило, в тех случаях, когда информативной является форма объектов, наблюдаемых на изображениях, а их яркостная структура существенного значения не имеет.

Сформулируем требования к КФ бинарного поля Λ, обеспечивающие выполнение (1) или (2) и возможность представления двумерных алгоритмов в виде совокупности одномерных процедур. Не нарушая общности, рассмотрим свойства бинарного поля Λ, принимающего значения 0 и 1. Очевидно, что бинарное поле с любыми другими значениями может быть получено из Λ путем масштабного преобразования, при этом изменятся лишь дисперсии и математические ожидания, а нормированная КФ $\dfrac{R_\Lambda(k, l, m, n)}{\sqrt{D_{(k,l)} D_{(m,n)}}}$, определяющая свойства поля, останется без изменений, где $R_\Lambda(k, l, m, n)$ – КФ бинарного поля, вычисленная для отсчетов с координатами (k, l) и (m, n); $D_{(k,l)}$ и $D_{(m,n)}$ – дисперсии поля, вычисленные для этих же точек. Для бинарных полей нижний индекс в $\lambda_j(\cdot)$ будет обозначать конкретное значение, которое принимают отсчеты поля в точке с координатами $(\cdot)$, т. е. $\lambda_j(\cdot) = j$.

Теорема 1. Для того чтобы двумерное бинарное поле Λ обладало свойством условной независимости (1), необходимо и достаточно, чтобы его КФ была разделима по пространственным координатам, т. е. могла быть представлена в виде

$$R_\Lambda(k, l, m, n) = R_{1\Lambda}(k, m)_l R_{2\Lambda}(l, n)_m \big/ D_{(m,l)} = R_{1\Lambda}(k, m)_n R_{2\Lambda}(l, n)_k \big/ D_{(k,n)}, \tag{3}$$

где $R_{1\Lambda}(k, m)_l$, $R_{1\Lambda}(k, m)_n$ и $R_{2\Lambda}(l, n)_m$, $R_{2\Lambda}(l, n)_k$ – КФ одномерных сечений поля Λ, вычисленные вдоль l-й и n-й строк и k-го и m-го столбцов соответственно (рис. 2).

Доказательство теоремы приведено в приложении 1.

Следствие. Для того чтобы двумерное бинарное поле Λ обладало свойством условной независимости (2), необходимо и достаточно, чтобы его КФ удовлетворяла соотношению (3), а одномерные последовательности, образуемые сечениями вдоль строки и столбца, были марковскими.

Это следствие вытекает непосредственно из теоремы 1 и свойств одномерных марковских последовательностей [7].

Теорема 2. Векторы отсчетов $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$, $\Lambda^{(3)}$ и $\Lambda^{(4)}$ стационарного бинарного поля Λ условно независимы относительно центрального отсчета $\lambda(\cdot)$ тогда и только тогда, когда КФ поля является биэкспоненциальной, т. е.

$$R_\Lambda(m-k, n-l) = D\rho_{1\Lambda}^{|m-k|}\rho_{2\Lambda}^{|l-n|},$$

где коэффициенты корреляции $\rho_{1\Lambda}$ и $\rho_{2\Lambda}$ соседних по строке и столбцу элементов поля с учетом (П1.9) и (П1.10) равны

$$\rho_{1\Lambda} = P(\lambda_1(k,l)\,|\,\lambda_1(k-1,l)) - P(\lambda_1(k,l)\,|\,\lambda_0(k-1,l)), \tag{4}$$

$$\rho_{2\Lambda} = P(\lambda_1(m,n)\,|\,\lambda_1(m,n-1)) - P(\lambda_1(m,n)\,|\,\lambda_0(m,n-1)). \tag{5}$$

Здесь учтено, что КФ стационарного поля зависит только от разности соответствующих аргументов, а дисперсия постоянна. КФ вертикального или горизонтального сечений поля с биэкспоненциальной КФ, очевидно, равна модульной экспоненте. Например, при $l = n$ КФ горизонтального сечения имеет вид

$$R_\Lambda(m-k, 0) = R_{1\Lambda}(m-k) = D\rho_{1\Lambda}^{|m-k|}. \tag{6}$$

Докажем, что в этом случае одномерные сечения образуют марковские бинарные процессы, и тогда теорема 2 с учетом теоремы 1, очевидно, справедлива.

Теорема 3. Для того чтобы одномерный стационарный бинарный процесс был марковским, необходимо и достаточно, чтобы его КФ была модульной экспонентой (доказательство теоремы 3 приведено в приложении 2).

Таким образом, если КФ стационарного бинарного поля биэкспоненциальна, то векторы данных $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$, $\Lambda^{(3)}$ и $\Lambda^{(4)}$ условно независимы относительно центрального отсчета $\lambda(\cdot)$, т. е. бинарное поле обладает свойством условной независимости (2).

Доказанные теоремы и следствие определяют класс бинарных полей, для которых возможно построение байесовских двухэтапных нелинейных алгоритмов обработки, использующих неполные данные $Y^{(+)} = \{Y^{(1)}, Y^{(2)}, Y^{(3)}, Y^{(4)}, y(\cdot)\}$ наблюдаемого изображения Y и удовлетворяющих критерию максимума апостериорного распределения вероятностей (АРВ). Здесь $Y^{(k)}$, $k = \overline{1,4}$, – данные вертикальных и горизонтальных лучей, которые выходят из текущей точки оценивания с координатами $(\cdot)$.

Если оцениваемое бинарное поле Λ и поле помехи W являются статистически независимыми и обладают свойством условной независимости (2), то

АРВ $P(\lambda_j(i_1, i_2) | Y^{(+)})$ текущего отсчета $\lambda(i_1, i_2)$ может быть представлено в виде [1]

$$\begin{cases} P(\lambda_1(i_1, i_2) | Y^{(+)}) = \dfrac{C}{P^3(\lambda_1(i_1, i_2) | y(i_1, i_2))} \prod_{k=1}^{4} P(\lambda_1(i_1, i_2) | Y^{(k)}, y(i_1, i_2)), \\ P(\lambda_0(i_1, i_2) | Y^{(+)}) = 1 - P(\lambda_1(i_1, i_2) | Y^{(+)}), \end{cases} \qquad (7)$$

где $y(\cdot) = f(\lambda(\cdot), w(\cdot))$ – отсчеты поля Y, наблюдаемые в результате взаимодействия отсчетов полей Λ и W; $P(\lambda(\cdot) | Y^{(k)}, y(\cdot))$ – частные АРВ, определяемые независимо для каждого из вертикальных и горизонтальных лучей, выходящих из текущей точки оценивания; $P(\lambda(\cdot) | y(\cdot))$ – одноточечное АРВ; C – нормирующая константа. На вид взаимодействия $f(\cdot, \cdot)$ накладывается требование существования однозначной обратной функции относительно $w(\cdot)$. Следует отметить, что с учетом марковских свойств одномерных сечений бинарных полей с биэкспоненциальной КФ частные АРВ могут вычисляться рекуррентным способом [8]. Двухэтапная оценка бинарного поля Λ по критерию максимума АРВ определяется по правилу:

$$\hat{\Lambda} = \{\hat{\lambda}(i_1, i_2) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P(\lambda_1(i_1, i_2) | Y^{(+)}) \geq 0{,}5, \\ 0, & \text{если} \quad P(\lambda_1(i_1, i_2) | Y^{(+)}) < 0{,}5, \end{cases} \quad i_1 = \overline{1, n_1}, \ i_2 = \overline{1, n_2}\}, \qquad (8)$$

где n_1 и n_2 – размеры строки и столбца соответственно.

Независимая рекуррентная обработка данных лучей на первом этапе (рекуррентное вычисление частных АРВ $P(\lambda(\cdot) | Y^{(k)}, y(\cdot))$) и независимая поэлементная обработка полученных данных на втором этапе (вычисление АРВ $P(\lambda(\cdot) | Y^{(+)})$ и оценки $\hat{\lambda}(\cdot)$) позволяют реализовать двухэтапные фильтры в виде параллельно-рекуррентных алгоритмов. Это обеспечивает высокую вычислительную эффективность оценок, получаемых на основе (7) и (8). Отметим, что изложенный подход к обработке изображений (двумерных случайных полей) применим и для обработки случайных полей более высокой размерности.

В качестве примера рассмотрим задачу оценивания бинарного изображения Λ из гауссовской дельта-коррелированной помехи W при наблюдении их аддитивной смеси: $Y = \{y(i_1, i_2) = \lambda(i_1, i_2) + w(i_1, i_2),\ i_1 = \overline{1, n_1},\ i_2 = \overline{1, n_2}\}$. Поля Λ и W обладают свойством условной независимости (2). Для указанных условий был синтезирован двухэтапный алгоритм оценивания бинарного изображения Λ, где для вычисления частных АРВ $P(\lambda_j(\cdot) | Y^{(k)}, y(\cdot))$, $k = \overline{1, 4}$, входящих в (7), были использованы рекуррентные соотношения, полученные в [8].

Результаты экспериментального исследования алгоритма фильтрации приведены на рис. 3, где *a* – бинарное изображение, наблюдаемое на фоне дельта-коррелированной гауссовской помехи (*b*) при отношении сигнал/шум

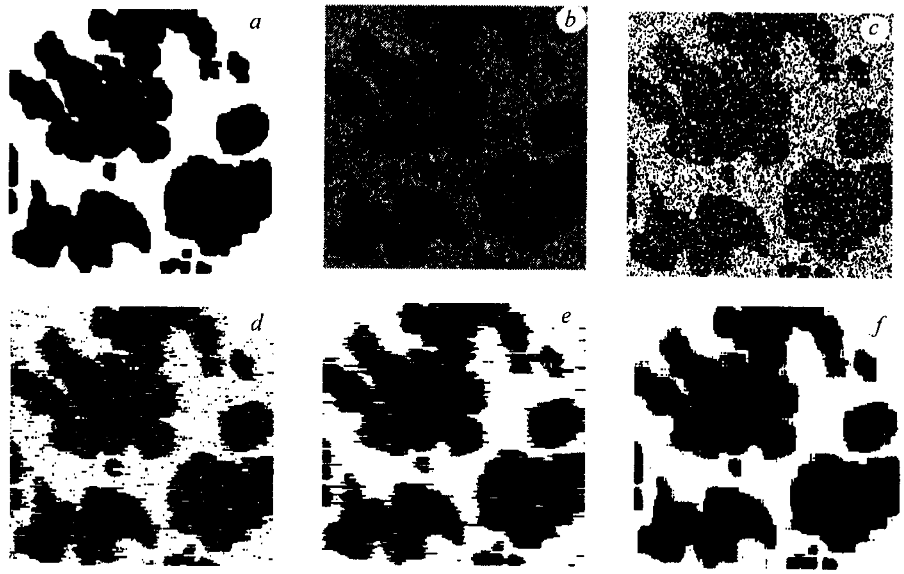

Рис. 3

$q^2 = D_\Lambda / D_W = 1$, c – результат одноточечной пороговой обработки наблюдаемого изображения (порог выбирался по критерию максимума апостериорной вероятности, $P_{\text{ош}} = 0{,}23$); d–f – результаты одномерной каузальной ($P_{\text{ош}} = 0{,}086$), одномерной некаузальной ($P_{\text{ош}} = 0{,}041$) [8] и двумерной двухэтапной фильтрации ($P_{\text{ош}} = 0{,}022$) соответственно. Здесь $P_{\text{ош}} = P(\lambda(\cdot) \neq \hat{\lambda}(\cdot))$ – вероятность ошибки. При одномерной обработке данные строк наблюдаемого изображения обрабатывались независимо. Из приведенных данных следует, что применение одномерной некаузальной оценки позволяет уменьшить вероятность ошибки в 5 раз по сравнению с пороговой обработкой, а двумерной некаузальной оценки – почти в 10 раз.

Таким образом, для бинарных полей, обладающих свойством условной независимости, возможно построение двухэтапных двумерных параллельно-рекуррентных алгоритмов фильтрации, имеющих высокую вычислительную эффективность и помехоустойчивость.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1. Нетрудно показать, что для бинарных полей, принимающих значения 0 и 1, математическое ожидание $E\{\lambda(\cdot)\}$, дисперсия $D_{(\cdot)}$ и КФ $R_\Lambda(k,l,m,n)$ определяются следующими соотношениями:

$$E\{\lambda(\cdot)\} = P(\lambda_1(\cdot)), \qquad D_{(\cdot)} = P(\lambda_1(\cdot)) - P^2(\lambda_1(\cdot)), \qquad (\text{П}1.1)$$

$$R_\Lambda(k,l,m,n) = P(\lambda_1(k,l),\ \lambda_1(m,n)) - P(\lambda_1(k,l))P(\lambda_1(m,n)). \qquad (\text{П}1.2)$$

Необходимость. Рассмотрим условие (3) для k-го столбца и n-й строки (см. рис. 2), которые пересекаются в точке с координатами (k,n), т. е. когда

$$R_\Lambda(k,l,m,n) = R_{1\Lambda}(k,m)_n R_{2\Lambda}(l,n)_k / D_{(k,n)}. \qquad (\text{П}1.3)$$

Используя известные соотношения [9], выразим совместную вероятность $P(\lambda_1(k,l),\ \lambda_1(m,n))$ и вероятности $P(\lambda_1(k,l))$ и $P(\lambda_1(m,n))$, входящие в (П1.1) и (П1.2), через условные $P(\lambda_1(\cdot)\,|\,\lambda_j(k,n))$ и безусловные $P(\lambda_j(k,n))$ вероятности следующим образом:

$$P(\lambda_1(k,l)) = \sum_{j=0}^{1} P(\lambda_1(k,l)\,|\,\lambda_j(k,n))P(\lambda_j(k,n)), \tag{П1.4}$$

$$P(\lambda_1(m,n)) = \sum_{j=0}^{1} P(\lambda_1(m,n)\,|\,\lambda_j(k,n))P(\lambda_j(k,n)), \tag{П1.5}$$

$$P(\lambda_1(k,l),\ \lambda_1(m,n)) = \sum_{j=0}^{1} P(\lambda_1(k,l),\ \lambda_1(m,n)\,|\,\lambda_j(k,n))P(\lambda_j(k,n)). \tag{П1.6}$$

Если отсчеты k-го столбца и n-й строки бинарного поля Λ условно независимы относительно значения центрального отсчета $\lambda(k,n)$, то совместная вероятность (П1.6) имеет вид

$$P(\lambda_1(k,l),\ \lambda_1(m,n)) = \sum_{j=0}^{1} P(\lambda_1(k,l)\,|\,\lambda_j(k,n))P(\lambda_1(m,n)\,|\,\lambda_j(k,n))P(\lambda_j(k,n)). \tag{П1.7}$$

Тогда КФ (П1.2) с учетом (П1.4)–(П1.7) равна

$$\begin{aligned} R_\Lambda(k,l,m,n) &= \sum_{j=0}^{1} P(\lambda_1(k,l)\,|\,\lambda_j(k,n))P(\lambda_1(m,n)\,|\,\lambda_j(k,n))P(\lambda_j(k,n)) - \\ &\quad - \sum_{j=0}^{1} P(\lambda_1(k,l)\,|\,\lambda_j(k,n))P(\lambda_j(k,n)) \times \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{1} P(\lambda_1(m,n)|\lambda_j(k,n))P(\lambda_j(k,n)) = \\ &= R_{1\Lambda}(k,m)_n R_{2\Lambda}(l,n)_k \big/ D_{(k,n)}, \end{aligned} \tag{П1.8}$$

где КФ одномерных сечений поля вдоль n-й строки и k-го столбца, как нетрудно убедиться, равны

$$\begin{aligned} R_{1\Lambda}(k,m)_n &= P(\lambda_1(m,n),\lambda_1(k,n)) - P(\lambda_1(m,n))P(\lambda_1(k,n)) = \\ &= D_{(k,n)}(P(\lambda_1(m,n)\,|\,\lambda_1(k,n)) - P(\lambda_1(m,n)\,|\,\lambda_0(k,n))), \end{aligned} \tag{П1.9}$$

$$\begin{aligned} R_{2\Lambda}(l,n)_k &= P(\lambda_1(k,l),\lambda_1(k,n)) - P(\lambda_1(k,l))P(\lambda_1(k,n)) = \\ &= D_{(k,n)}(P(\lambda_1(k,l)\,|\,\lambda_1(k,n)) - P(\lambda_1(k,l)\,|\,\lambda_0(k,n))). \end{aligned} \tag{П1.10}$$

Таким образом, если данные n-й строки и k-го столбца бинарного поля Λ условно независимы относительно $\lambda(k,n)$, то его КФ разделима по пространственным координатам, т. е. удовлетворяет (П1.3). Следовательно, условие разделимости КФ является *необходимым*.

Достаточность. Соотношения (П1.2), (П1.9) и (П1.10) определяют двумерные и одномерные КФ бинарного поля с произвольным условным распределением $P(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \Lambda^{(3)}, \Lambda^{(4)} \mid \lambda)$. Пусть $R_\Lambda(k,l,m,n)$ разделима по пространственным координатам и удовлетворяет (П1.3). Тогда из (П1.2), (П1.9) и (П1.10) следует, что

$$P(\lambda_1(k,l),\lambda_1(m,n)) - P(\lambda_1(k,l))P(\lambda_1(m,n)) =$$

$$= D_{(k,n)}(P(\lambda_1(m,n)\mid\lambda_1(k,n)) - P(\lambda_1(m,n)\mid\lambda_0(k,n)))\times$$

$$\times D_{(k,n)}(P(\lambda_1(k,l)\mid\lambda_1(k,n)) - P(\lambda_1(k,l)\mid\lambda_0(k,n)))/D_{(k,n)}.$$

Приведя подобные, нетрудно убедиться, что условные вероятности удовлетворяют уравнению Колмогорова – Чепмена [9]

$$P(\lambda(k,l)\mid\lambda(m,n)) = \sum_{j=0}^{1} P(\lambda(k,l)\mid\lambda_j(k,n))P(\lambda_j(k,n)\mid\lambda(m,n)) \qquad (П1.11)$$

и что любые два отсчета n-й строки и k-го столбца бинарного поля Λ условно независимы относительно значения центрального отсчета $\lambda(k,n)$, т. е.

$$P(\lambda(k,l),\lambda(m,n)\mid\lambda(k,n)) = P(\lambda(k,l)\mid\lambda(k,n))P(\lambda(m,n)\mid\lambda(k,n)). \qquad (П1.12)$$

Поскольку условные вероятности, удовлетворяющие решению уравнения Колмогорова – Чепмена, соответствуют (единственным образом) некоторому марковскому процессу [9], то отсчеты n-й строки и k-го столбца условно независимы относительно значения центрального отсчета $\lambda(k,n)$.

Следовательно, если КФ бинарного поля удовлетворяет условию (П1.3), то свойство условной независимости (1) справедливо для n-й строки и k-го столбца, которые пересекаются в точке с координатами (k,n), т. е. для данных n-й строки и k-го столбца это условие является *достаточным*.

Кроме того, два отсчета $\lambda(k,l)$ и $\lambda(m,n)$ двумерного поля Λ также принадлежат l-й строке и m-му столбцу (см. рис. 2), которые пересекаются в точке с координатами (m,l). Если поле обладает свойством условной независимости (1), то любые два отсчета $\lambda(k,l)$ и $\lambda(m,n)$ условно независимы относительно значения как отсчета с координатами (k, n), так и отсчета с координатами (m,l). Поэтому, чтобы данные l-й строки и m-го столбца были условно независимы относительно значения центрального отсчета $\lambda(m,l)$, наряду с (П1.3), КФ

$$R_\Lambda(k,l,m,n) = R_{1\Lambda}(k,m)_l R_{2\Lambda}(l,n)_m / D_{(m,l)}. \qquad (П1.13)$$

Таким образом, условие (3), объединяющее (П1.3) и (П1.13), является *необходимым* и *достаточным*.

При доказательстве теоремы вид распределений вероятностей $P(\Lambda^{(1)}, \lambda(\cdot), \Lambda^{(3)})$ и $P(\Lambda^{(2)}, \lambda(\cdot), \Lambda^{(4)})$ одномерных данных строки и столбца никак не задавался. Иными словами, одномерные сечения бинарного поля, обладающего свойством условной независимости (1), в общем случае могут не быть марковскими.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 3. В [7] показано, если стационарный бинарный процесс является марковским, то его КФ удовлетворяет условию (6), т. е. данное условие является *необходимым*.

Достаточность. С другой стороны, если справедливо (6), то

$$R_{1\Lambda}(m-k)=R_{1\Lambda}(s-k)R_{1\Lambda}(m-s)/D \tag{П2.1}$$

для $k \le s \le m$. КФ одномерного стационарного бинарного процесса с учетом (П1.9) равна

$$R_{1\Lambda}(m-k)=P(\lambda_1(m),\lambda_1(k))-P(\lambda_1(m))P(\lambda_1(k))=$$

$$=D(P(\lambda_1(m)\,|\,\lambda_1(k))-P(\lambda_1(m)\,|\,\lambda_0(k))). \tag{П2.2}$$

Подставляя (П2.2) в (П2.1), получим

$$P(\lambda_1(m)\,|\,\lambda_1(k))-P(\lambda_1(m)\,|\,\lambda_0(k))=$$

$$=(P(\lambda_1(m)\,|\,\lambda_1(s))-P(\lambda_1(m)\,|\,\lambda_0(s)))(P(\lambda_1(s)\,|\,\lambda_1(k))-P(\lambda_1(s)\,|\,\lambda_0(k))).$$

Откуда, как нетрудно убедиться, следует, что условные вероятности удовлетворяют уравнению Колмогорова – Чепмена, а значит, соответствуют (единственным образом) некоторому марковскому процессу [9]. Следовательно, условие (6) является *достаточным*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-00489).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Грузман И. С., Микерин В. И., Спектор А. А.** Двухэтапная фильтрация изображений на основе ограниченных данных // Радиотехника и электроника. 1995. № 5.
2. **Дерин Х., Келли А. П.** Случайные процессы марковского типа с дискретными аргументами // ТИИЭР. 1989. № 10.
3. **Грузман И. С.** Теорема Дуба для векторных гауссовских полей // Радиотехника, электроника и физика: Сб. науч. тр. Новосибирск: НГТУ. 1996.
4. **Gruzman I. S.** A two-stage method for the restoration of defocused images // Pattern Recognition and Image Analysis. 1996. N 1.
5. **Грузман И. С.** Двухэтапная фильтрация случайных полей при действии комбинированной помехи // Радиотехника. 1997. № 10.
6. **Грузман И. С.** Двухэтапное восстановление дефокусированных изображений // Автометрия 1997. № 2.
7. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
8. **Грузман И. С., Спектор А. А.** Применение свойства условной независимости для симметричного сглаживания марковских процессов // Радиотехника и электроника. 1997. № 6.
9. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 6 мая 1998 г.