РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 3 1999

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.272 : 621.391

Н. С. Демин, С. В. Рожкова
(Томск)

ФИЛЬТРАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПО СОВОКУПНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ АНОМАЛЬНЫХ ПОМЕХ

Осуществлен синтез оптимального в среднеквадратическом смысле несмещенного фильтра для многомерных стохастических сигналов с непрерывным временем в случае совместной его передачи по непрерывно-дискретным во времени каналам, когда в дискретном канале, кроме регулярной, действует аномальная помеха, и установлены некоторые его свойства.

1. **Постановка задачи.** Полезный сигнал представляет собой реализации n-мерного марковского процесса, который определяется уравнением

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + \dot{w}(t), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

где $\dot{w}(t)$ – белый гауссов процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивности $Q(t)$. Выход непрерывного и дискретного каналов наблюдения – соответственно l-мерный процесс $z(t)$ и q-мерный процесс $\eta(t_m)$ вида

$$z(t) = H_0(t)x(t) + H_1(t)x(\tau) + \dot{v}(t), \tag{1.2}$$

$$\eta(t_m) = G_0(t_m)x(t_m) + G_1(\tau)x(\tau) + \xi(t_m) + Cf(t_m), \qquad m = 0, 1, \ldots. \tag{1.3}$$

Здесь $0 < \tau < t_m \leq t$; $\dot{v}(t)$ – белый гауссов процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивности $R(t)$; $\xi(t_m)$ – белая гауссовская последовательность с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивности $V(t_m)$, которая является регулярной помехой; $f(t_m)$ – r-мерная ($r \leq q$) белая гауссовская последовательность с математическим ожиданием $f_0(t_m)$ и матрицей интенсивности $\Theta(t_m)$, которая является аномальной помехой. Матрица C размером $(q \times r)$, определяющая структуру действия компонент вектора аномальной помехи $f(t_m)$ на компоненты вектора наблюдений $\eta(t_m)$, является булевой и имеет следующий вид. Пусть i_j – номера компонент вектора $\eta(t_m)$, по которым действуют аномальные помехи ($1 \leq i_j \leq q$; $1 \leq j \leq r$). Тогда в j-м столбце матрицы C единица стоит на i_j-м месте, а на остальных –

нули. Предполагается: 1) x_0 имеет нормальное распределение с параметрами μ_0 и Γ_0; 2) x_0, $\dot{w}(t)$, $\dot{v}(t)$, $\xi(t_m)$, $f(t_m)$ независимы в совокупности; 3) матрицы Γ_0, $Q(t)$, $R(t)$, $V(t_m)$, $\Theta(t_m)$ положительно-определенные; 4) $f_0(t_m)$ неизвестно.

Задача. По совокупности реализаций $z_0^t = \{z(s): 0 \le s \le t\}$ и $\eta_0^m = \{\eta(t_0), \eta(t_1), \ldots, \eta(t_m)\}$ найти оптимальную в среднеквадратическом смысле (ОСКС) несмещенную оценку фильтрации $\mu(t)$ для $x(t)$.

Задача оценивания стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений характерна, например, для современных навигационных систем, когда $z(t)$ является выходом бортовых измерителей, а $\eta(t_m)$ формируется из показаний внешних источников. Зависимость $z(t)$ и $\eta(t_m)$ от прошлых значений $x(\tau)$ процесса $x(t)$ может определяться, например, инерционностью некоторых измерителей. Поскольку, как правило, $\eta(t_m)$ используются для коррекции оценок, построенных по $z(t)$, и поэтому являются более точными и более ценными, то учет наличия аномальных помех именно в дискретных наблюдениях – весьма актуальная задача. Используемая модель процессов $z(t)$ и $\eta(t_m)$ соответствует наблюдениям с фиксированной памятью при $\tau = \mathrm{const}$ и со скользящей памятью при $\tau = t - t^*$ в z, и $\tau = t_m - t^*$ в $\eta(t_m)$, где $t^* = \mathrm{const}$. В данной работе рассматривается только случай фиксированной памяти. Отметим, что задача синтеза ОСКС несмещенного фильтра при наличии аномальных помех, когда наблюдаемый и ненаблюдаемый процессы являются процессами с дискретным временем, причем дискретный канал наблюдения без памяти, а также анализ некоторых его свойств рассматривались в [1–3].

Всюду далее $M\{x\}$ означает математическое ожидание x; T и «+» – транспонирование и псевдообращение по Муру – Пенроузу [4], если стоят как правые верхние индексы; $\mathrm{tr}[A]$ – след матрицы A; $A > 0$ и $A \ge 0$ – свойства положительно- и неотрицательно-определенной матрицы A; I_k – единичная матрица размером $(k \times k)$; O – нулевая матрица соответствующего размера.

2. **Структура фильтра.** Пусть аномальные помехи отсутствуют. Тогда на интервалах времени $t_m \le t < t_{m+1}$ ОСКС оценка фильтрации $\mu(t)$ определяется уравнениями

$$\dot{\mu}(t) = F(t)\mu(t) + \widetilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\widetilde{z}(t), \tag{2.1}$$

$$\dot{\mu}(\tau, t) = \widetilde{H}_1^T(t)R^{-1}(t)\widetilde{z}(t), \tag{2.2}$$

$$\dot{\Gamma}(t) = F(t)\Gamma(t) + \Gamma(t)F^T(t) + Q(t) - \widetilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\widetilde{H}_0(t), \tag{2.3}$$

$$\dot{\Gamma}_{11}(\tau, t) = -\widetilde{H}_1^T(t)R^{-1}(t)\widetilde{H}_1(t), \tag{2.4}$$

$$\dot{\Gamma}_{01}(\tau, t) = F(t)\Gamma_{01}(\tau, t) - \widetilde{H}_0^T(t)R^{-1}(t)\widetilde{H}_1(t) \tag{2.5}$$

с начальными условиями

$$\mu(t_m) = \mu(t_m - 0) + \widetilde{G}_0^T(t_m)W^{-1}(t_m)\widetilde{\eta}(t_m), \tag{2.6}$$

$$\mu(\tau, t_m) = \mu(\tau, t_m - 0) + \widetilde{G}_1^T(t_m)W^{-1}(t_m)\widetilde{\eta}(t_m), \tag{2.7}$$

$$\Gamma(t_m)=\Gamma(t_m-0)-\widetilde{G}_0^T(t_m)W^{-1}(t_m)\widetilde{G}_0(t_m), \tag{2.8}$$

$$\Gamma_{11}(\tau,t_m)=\Gamma_{11}(\tau,t_m-0)-\widetilde{G}_1^T(t_m)W^{-1}(t_m)\widetilde{G}_1(t_m), \tag{2.9}$$

$$\Gamma_{01}(\tau,t_m)=\Gamma_{01}(\tau,t_m-0)-\widetilde{G}_0^T(t_m)W^{-1}(t_m)\widetilde{G}_1(t_m), \tag{2.10}$$

где

$$\widetilde{z}(t)=z(t)-H_0(t)\mu(t)-H_1(t)\mu(\tau,t), \tag{2.11}$$

$$\widetilde{H}_0(t)=H_0(t)\Gamma(t)+H_1(t)\Gamma_{01}^T(\tau,t), \tag{2.12}$$

$$\widetilde{H}_1(t)=H_0(t)\Gamma_{01}(\tau,t)+H_1(t)\Gamma_{11}(\tau,t), \tag{2.13}$$

$$\widetilde{\eta}(t_m)=\eta(t_m)-G_0(t_m)\mu(t_m-0)-G_1(t_m)\mu(\tau,t_m-0), \tag{2.14}$$

$$\widetilde{G}_0(t_m)=G_0(t_m)\Gamma(t_m-0)+G_1(t_m)\Gamma_{01}^T(\tau,t_m-0), \tag{2.15}$$

$$\widetilde{G}_1(t_m)=G_0(t_m)\Gamma_{01}(\tau,t_m-0)+G_1(t_m)\Gamma_{11}(\tau,t_m-0), \tag{2.16}$$

$$W(t_m)=G_0(t_m)\Gamma(t_m-0)G_0^T(t_m)+G_1(t_m)\Gamma_{11}(\tau,t_m-0)G_1^T(t_m)+$$

$$+G_0(t_m)\Gamma_{01}(\tau,t_m-0)G_1^T(t_m)+G_1(t_m)\Gamma_{01}^T(\tau,t_m-0)G_0^T(t_m)+V(t_m). \tag{2.17}$$

Сформулированный результат следует очевидным образом как частный случай из теоремы 2 в [5], поскольку задача с фиксированной памятью – частный случай задачи со скользящей памятью. Задание процессов $x(t)$ и $z(t)$ через белые гауссовские процессы, а не через винеровские, как в [5], не является принципиальным.

Поскольку

$$\mu(t)=M\{x(t)\,|\,z_0^t,\eta_0^m\},\qquad \mu(\tau,t)=M\{x(\tau)\,|\,z_0^t,\eta_0^m\}, \tag{2.18}$$

то дифференциально-рекуррентные соотношения (2.1)–(2.17), кроме оценки фильтрации $\mu(t)$ для значения процесса $x(s)$ в текущий момент времени $s=t$, определяют и ОСКС оценку $\mu(\tau,t)$ для значения процесса $x(s)$ в момент времени $s=\tau$, характеризующий память каналов наблюдения, т. е. оценку интерполяции [6]. Поскольку правые части (2.3)–(2.5), (2.8)–(2.10) не зависят от $z(t)$ и $\eta(t_m)$, то

$$\Gamma(t)=M\{\mu^0(t)\mu^{0^T}(t)\},\qquad \Gamma_{11}(\tau,t)=M\{\mu^0(\tau,t)\mu^{0^T}(\tau,t)\}, \tag{2.19}$$

$$\Gamma_{01}(\tau,t)=M\{\mu^0(t)\mu^{0^T}(\tau,t)\}, \tag{2.20}$$

где $\mu^0(t)=x(t)-\mu(t)$, $\mu^0(\tau,t)=x(\tau)-\mu(\tau,t)$, и таким образом $J_0=\mathrm{tr}[\Gamma(t)]$ и $J_1=\mathrm{tr}[\Gamma_{11}(\tau,t)]$ определяют среднеквадратические ошибки $\mu(t)$ и $\mu(\tau,t)$. Исходные предпосылки для выбора структуры фильтра в момент времени t_m заключаются в следующем:

1. Поскольку $f_0(t_m)$ неизвестно, то естественно вместо $f_0(t_m)$ использовать некоторую оценку $\hat{f}(t_m)$ для $f(t_m)$, построенную по $\{z_0^t, \eta_0^m\}$. Так как, согласно (2.14), (2.18), $\tilde{\eta}(t_m) = \tilde{\eta}[t_m;\, z_0^{t_m},\, \eta_0^m]$, т. е. является функционалом от реализаций $z_0^{t_m}$ и η_0^m, и таким образом в момент времени t_m играет роль «обновляющего процесса» [6], то естественно строить $\hat{f}(t_m)$ по $\tilde{\eta}(t_m)$.

2. Поскольку $\tilde{\eta}(t_m)$ зависит как от оценки фильтрации, так и от оценки интерполяции, то естественно в качестве критерия оптимальности несмещенного фильтра при неизвестном $f_0(t_m)$ выбрать

$$J = J_0 + J_1 = \operatorname{tr}[\Gamma(t_m)] + \operatorname{tr}[\Gamma_{11}(\tau, t_m)] = \operatorname{tr}[\tilde{\Gamma}(\tau, t_m)], \tag{2.21}$$

где

$$\tilde{\Gamma}(\tau, t) = \begin{bmatrix} \Gamma(t) & \Gamma_{01}(\tau, t) \\ \Gamma_{01}^T(\tau, t) & \Gamma_{11}(\tau, t) \end{bmatrix} = M\{\tilde{\mu}^0(\tau, t)\tilde{\mu}^{0T}(\tau, t)\}, \tag{2.22}$$

$$\tilde{\mu}(\tau, t) = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \mu(\tau, t) \end{bmatrix}, \qquad \tilde{x}(\tau, t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(\tau) \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

$$\tilde{\mu}^0(\tau, t) = \begin{bmatrix} x(t) - \mu(t) \\ x(\tau) - \mu(\tau, t) \end{bmatrix} = \tilde{x}(\tau, t) - \tilde{\mu}(\tau, t). \tag{2.24}$$

Введем блочные матрицы $G_{01}(t_m) \to (q \times 2n)$, $K(t_m) \to (2n \times q)$ вида

$$G_{01}(t_m) = [G_0(t_m) \vdots G_1(t_m)], \qquad K(t_m) = \begin{bmatrix} K_0(t_m) \\ K_1(t_m) \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

где $K_0(t_m) \to (n \times q)$, $K_1(t_m) \to (n \times q)$. В условиях присутствия аномальных помех структуру фильтра выбираем ту же, что и в случае отсутствия, т. е. (см. (2.6), (2.7), (2.23)–(2.25))

$$\tilde{\mu}(\tau,\, t_m) = \tilde{\mu}(\tau,\, t_m - 0) + K(t_m)\tilde{\eta}(t_m). \tag{2.26}$$

Здесь, согласно (1.3), (2.14), (2.23)–(2.25),

$$\tilde{\eta}(t_m) = G_{01}(t_m)\tilde{\mu}^0(\tau,\, t_m - 0) + \xi(t_m) + Cf(t_m). \tag{2.27}$$

Так как из (2.26), (2.27) следует, что $M\{\tilde{\eta}(t_m)\} = Cf_0(t_m)$ и $M\{\tilde{\mu}^0(\tau,\, t_m)\} = -K(t_m)Cf_0(t_m)$, то, чтобы устранить смещение, нужно вместо (2.26) использовать структуру

$$\tilde{\mu}(\tau,\, t_m) = \tilde{\mu}(\tau,\, t_m - 0) + K(t_m)\tilde{\eta}_1(t_m), \tag{2.28}$$

где $\tilde{\eta}_1(t_m)=\tilde{\eta}(t_m)-Cf_0(t_m)$. Поскольку $f_0(t_m)$ неизвестно, то в соответствии с п. 2 вместо $f_0(t_m)$ используем оценку $\hat{f}(t_m)$ вида $\hat{f}(t_m)=Y(t_m)\tilde{\eta}(t_m)$, где $Y(t_m)\to(r\times q)$. Тогда $\tilde{\eta}_1(t_m)=[I_q-CY(t_m)]\tilde{\eta}(t_m)$, что, согласно (2.28), приводит к структуре фильтра вида

$$\tilde{\mu}(\tau,\, t_m)=\tilde{\mu}(\tau,\, t_m-0)+\tilde{K}(t_m)\tilde{\eta}(t_m). \tag{2.29}$$

Здесь

$$\tilde{K}(t_m)=K(t_m)[I_q-CY(t_m)]. \tag{2.30}$$

Тогда, с учетом того что $M\{\tilde{\eta}(t_m)\}=Cf_0(t_m)$, из (2.29), (2.30) следует условие несмещенности

$$[I_q-CY(t_m)]C=O, \tag{2.31}$$

которое может быть удовлетворено соответствующим выбором матрицы $Y(t_m)$. Согласно [4], уравнение (2.31) имеет решение вида

$$Y(t_m)=C^{+}+A-ACC^{+}, \tag{2.32}$$

где A – произвольная $(r\times q)$-матрица. После умножения обеих частей (2.32) справа на C получаем

$$Y(t_m)C=C^{+}C+AC-ACC^{+}C. \tag{2.33}$$

Так как по построению C является матрицей с линейно независимыми столбцами, то $C^{+}C=I_r$ [4]. Тогда из (2.33) следует условие, которому должна удовлетворять матрица $Y(t_m)$, обеспечивающая несмещенность фильтра:

$$Y(t_m)C=I_r. \tag{2.34}$$

3. **Синтез.** Из (2.29), (2.30) следует, что

$$\tilde{\mu}^0(\tau,\, t_m)=\tilde{\mu}^0(\tau,\, t_m-0)-K(t_m)\tilde{Y}(t_m)\tilde{\eta}(t_m), \tag{3.1}$$

где

$$\tilde{Y}(t_m)=I_q-CY(t_m). \tag{3.2}$$

Тогда, согласно (2.22), (3.1),

$$\tilde{\Gamma}(\tau,\, t_m)=M\{\alpha\alpha^T\}. \tag{3.3}$$

Здесь $\alpha=[\tilde{\mu}^0(\tau,\, t_m-0)-K(t_m)\tilde{Y}(t_m)\tilde{\eta}(t_m)]$. С учетом условия 2 постановки задачи

$$M\{\tilde{\mu}^0(\tau,\, t_m-0)\xi^T(t_m)\}=O, \qquad M\{\tilde{\mu}^0(\tau,\, t_m-0)f^T(t_m)\}=O. \tag{3.4}$$

Согласно (2.22), (2.27), (3.4), получаем

$$M\{\tilde{\mu}^0(\tau,\, t_m-0)\tilde{\eta}^T(t_m)\} = \tilde{\Gamma}(\tau,\, t_m-0)G_{01}^T(t_m), \tag{3.5}$$

$$M\{\tilde{\eta}(t_m)\tilde{\eta}^T(t_m)\} = W(t_m) + C\Theta(t_m)C^T + Cf_0(t_m)f_0^T(t_m)C^T, \tag{3.6}$$

где

$$W(t_m) = V(t_m) + G_{01}(t_m)\tilde{\Gamma}(\tau,\, t_m-0)G_{01}^T(t_m). \tag{3.7}$$

Эквивалентность формул (2.17) и (3.7) с учетом (2.22), (2.25) очевидна. Использование (3.5), (3.6) с учетом (2.31) в (3.3), а затем в (2.21) дает явное выражение критерия оптимальности через матрицу $K(t_m)$, определяющую структуру фильтра:

$$J[K(t_m)] = \mathrm{tr}[\tilde{\Gamma}(\tau,\, t_m-0)] + \mathrm{tr}[K(t_m)\tilde{Y}(t_m)\tilde{W}(t_m)\tilde{Y}^T(t_m)K^T(t_m)] -$$

$$-\,\mathrm{tr}[\tilde{\Gamma}(\tau,\, t_m-0)G_{01}^T(t_m)\tilde{Y}^T(t_m)K^T(t_m)] - \mathrm{tr}[K(t_m)\tilde{Y}(t_m)G_{01}(t_m)\tilde{\Gamma}(\tau,\, t_m-0)], \tag{3.8}$$

где

$$\tilde{W}(t_m) = W(t_m) + C\Theta(t_m)C^T. \tag{3.9}$$

Из (3.8) следует, что учет условия несмещенности (2.31) исключает зависимость критерия оптимальности от неизвестного $f_0(t_m)$.

Таким образом произошла редукция исходной задачи к задаче следующего вида: в классе линейных фильтров вида (2.29) найти матрицу передачи $\tilde{K}(t_m)$ из условия минимума функционала (3.8) по $K(t_m)$ при ограничении (2.34).

Утверждение 1. На интервалах времени $t_m \le t < t_{m+1}$ ОСКС несмещенный фильтр определяется уравнениями (2.1)–(2.5), где $\tilde{z}(t)$, $\tilde{H}_0(t)$ и $\tilde{H}_1(t)$ имеют вид (2.11)–(2.13), с начальными условиями

$$\mu(t_m) = \mu(t_m-0) + \tilde{K}_0(t_m)\tilde{\eta}(t_m), \tag{3.10}$$

$$\mu(\tau,\, t_m) = \mu(\tau,\, t_m-0) + \tilde{K}_1(t_m)\tilde{\eta}(t_m), \tag{3.11}$$

$$\Gamma(t_m) = \Gamma(t_m-0) - \tilde{K}_0(t_m)\tilde{G}_0(t_m), \tag{3.12}$$

$$\Gamma_{11}(\tau,\, t_m) = \Gamma_{11}(\tau,\, t_m-0) - \tilde{K}_1(t_m)\tilde{G}_1(t_m), \tag{3.13}$$

$$\Gamma_{01}(\tau,\, t_m) = \Gamma_{01}(\tau,\, t_m-0) - \tilde{K}_0(t_m)\tilde{G}_1(t_m). \tag{3.14}$$

Здесь

$$\tilde{K}_0(t_m) = K_0(t_m)[I_q - CY(t_m)], \qquad K_0(t_m) = \tilde{G}_0^T(t_m)\tilde{W}^{-1}(t_m), \tag{3.15}$$

$$\tilde{K}_1(t_m) = K_1(t_m)[I_q - CY(t_m)], \qquad K_1(t_m) = \tilde{G}_1^T(t_m)\tilde{W}^{-1}(t_m), \tag{3.16}$$

$$Y(t_m) = [C^T\tilde{W}^{-1}(t_m)C]^{-1}C^T\tilde{W}^{-1}(t_m), \tag{3.17}$$

а $\widetilde{\eta}(t_m)$, $\widetilde{G}_0(t_m)$, $\widetilde{G}_1(t_m)$, $W(t_m)$, $\widetilde{W}(t_m)$ имеют вид (2.14)–(2.17), (3.9).

Доказательство. Согласно (3.8), необходимое условие оптимальности $\partial J[K(t_m)]/\partial K(t_m)=O$ приводит к уравнению для нахождения $K(t_m)$ вида

$$K(t_m)\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)=\widetilde{\Gamma}(\tau,t_m-0)G_{01}^T(t_m)\widetilde{Y}(t_m). \quad (3.18)$$

Условие существования решения уравнения (3.18) имеет вид [4]

$$\widetilde{\Gamma}(\tau,t_m-0)G_{01}^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)[\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)]^+\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)=$$

$$=\widetilde{\Gamma}(\tau,t_m-0)G_{01}^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m). \quad (3.19)$$

Докажем (3.19). Так как $\widetilde{W}(t_m)>0$, то $\widetilde{W}(t_m)=L(t_m)L^T(t_m)$, $L(t_m)$ – невырожденная нижняя треугольная матрица [7]. Обозначим левую часть (3.19) через $\Psi(t_m)$. Тогда

$$\Psi(t_m)=\widetilde{\Gamma}(\tau,\ t_m-0)G_{01}^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)[D^T(t_m)D(t_m)]^+D^T(t_m)D(t_m), \quad (3.20)$$

где $D(t_m)=L^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)$. Так как $[D^T(t_m)D(t_m)]^+D^T(t_m)=D^+(t_m)$ [4], то из (3.20) получаем

$$\Psi(t_m)=\widetilde{\Gamma}(\tau,\ t_m-0)G_{01}^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)[L^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)]^+[L^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)]. \quad (3.21)$$

Невырожденность $L^T(t_m)$ дает, что $[L^T(t_m)\widetilde{Y}(t_m)]^+[L^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)]=$ $=[\widetilde{Y}^T(t_m)]^+\widetilde{Y}^T(t_m)$ [4]. Таким образом (3.21) принимает вид

$$\Psi(t_m)=\widetilde{\Gamma}(\tau,\ t_m-0)G_{01}^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)[\widetilde{Y}^T(t_m)]^+\widetilde{Y}^T(t_m). \quad (3.22)$$

Использование в (3.22) теоремы о характеризации псевдообратной матрицы [4] приводит к формуле $\Psi(t_m)=\widetilde{\Gamma}(\tau,\ t_m-0)G_{01}^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)$, что доказывает справедливость (3.19). Тогда общее решение уравнения (3.18) имеет вид [4]

$$K(t_m)=\widetilde{\Gamma}(\tau,\ t_m-0)G_{01}^T(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)[\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)]^+-$$

$$-B(t_m)[\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)][\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)]^++B(t_m), \quad (3.23)$$

где $B(t_m)$ – произвольная $(2n\times q)$-матрица. Найдем матрицу $Y(t_m)$ (см. (3.2)), которая удовлетворяет условию (2.34) и приводит к виду $\widetilde{K}(t_m)$, не зависящему от $B(t_m)$, для чего потребуем выполнение условия

$$CY(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^T(t_m)=O. \quad (3.24)$$

Умножаем левую часть (3.24) слева на C^{+}; справа на $\tilde{W}^{-1}(t_m)C$, а затем учитываем (2.34), (3.2) и свойство матрицы с линейно независимыми столбцами $C^{+}C = I_r$ [4]. В результате получаем

$$I_r - Y(t_m)\widetilde{W}(t_m)Y^{T}(t_m)\widetilde{N}(t_m) = O, \tag{3.25}$$

где

$$\widetilde{N}(t_m) = C^{T}\widetilde{W}^{-1}(t_m)C. \tag{3.26}$$

Умножая левую часть (3.25) справа на $\widetilde{N}^{-1}(t_m)$, которая существует, так как по построению матрица C полного ранга, а также учитывая, что $I_r = C^{T}Y^{T}(t_m)$ (см. (2.34)), получаем выражение $[\widetilde{N}^{-1}(t_m)C^{T} - Y(t_m)\widetilde{W}(t_m)]\times Y^{T}(t_m) = O$, являющееся уравнением для нахождения $Y(t_m)$. Тривиальное решение отбрасывается как противоречащее (2.34), а другое решение с учетом (3.26) есть (3.17). Использование (3.2), (3.24) в (3.23) приводит общее решение уравнения (3.18) к виду

$$K(t_m) = \widetilde{\Gamma}(\tau,\, t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m)\widetilde{Y}(t_m)[\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)]^{+} -$$

$$- B(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)[\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)]^{+} + B(t_m). \tag{3.27}$$

Произвольную матрицу $B(t_m)$ выбираем из условия $\widetilde{\Gamma}(\tau,\, t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m) = B(t_m)\widetilde{W}(t_m)$, использование которого в (3.27) приводит к формуле

$$K(t_m) = \widetilde{\Gamma}(\tau,\, t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m)\widetilde{W}^{-1}(t_m). \tag{3.28}$$

Поблочное расписывание (3.28) с учетом (2.22), (2.25), (2.30), где $\widetilde{K}^{T}(t_m) = [\widetilde{K}_0^{T}(t_m) \vdots \widetilde{K}_1^{T}(t_m)]$, приводит к (3.15), (3.16), а поблочное расписывание (2.29) – к (3.10), (3.11). Согласно (2.21), (3.8),

$$\widetilde{\Gamma}(\tau,\, t_m) = \widetilde{\Gamma}(\tau,\, t_m - 0) + K(t_m)\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)K^{T}(t_m) -$$

$$- \widetilde{\Gamma}(\tau,\, t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)K^{T}(t_m) - K(t_m)\widetilde{Y}(t_m)G_{01}(t_m)\widetilde{\Gamma}(\tau,\, t_m - 0). \tag{3.29}$$

Используя (3.28), получаем

$$K(t_m)\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)K^{T}(t_m) - \widetilde{\Gamma}(\tau,\, t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)K^{T}(t_m) =$$

$$= \widetilde{\Gamma}(\tau,\, t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m)[\widetilde{W}^{-1}(t_m)\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m) - \widetilde{Y}^{T}(t_m)]K^{T}(t_m). \tag{3.30}$$

Использование последовательно (3.2), а затем (3.24) приводит к тому, что

$$\widetilde{W}^{-1}(t_m)\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m) = \widetilde{W}^{-1}(t_m)[I_q - CY(t_m)]\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m) =$$

$$= \widetilde{W}^{-1}(t_m)[\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m) - CY(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)] =$$

$$= \widetilde{W}^{-1}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m) = Y^{T}(t_m). \tag{3.31}$$

Тогда из (3.28)–(3.31) следует, что

$$\widetilde{\Gamma}(\tau, t_m) = \widetilde{\Gamma}(\tau, t_m - 0) - \widetilde{\Gamma}(\tau, t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m)\widetilde{W}^{-1}(t_m)\widetilde{Y}(t_m)G_{01}(t_m)\widetilde{\Gamma}(\tau, t_m - 0). \tag{3.32}$$

Из (2.15), (2.16), (2.22), (2.25) получаем

$$G_{01}(t_m)\widetilde{\Gamma}(\tau, t_m - 0) = [\widetilde{G}_0(t_m) \vdots \widetilde{G}_1(t_m)]. \tag{3.33}$$

Поблочное расписывание (3.32) с учетом (3.2), (3.15), (3.16), (3.33) приводит к (3.12)–(3.14). Доказательством независимости матрицы передачи $\widetilde{K}(t_m)$ фильтра от произвольной матрицы $B(t_m)$, участвующей в представлении общего решения (3.23) уравнения (3.18), завершается доказательство утверждения. Так как, согласно (2.30), (3.2), $\widetilde{K}(t_m) = K(t_m)\widetilde{Y}(t_m)$, то из (3.23) следует, что

$$\widetilde{K}(t_m) = \widetilde{\Gamma}(\tau, t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)[\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)]^{+}\widetilde{Y}(t_m) -$$

$$- B(t_m)[\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)][\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)]^{+}\widetilde{Y}(t_m) + B(t_m)\widetilde{Y}(t_m). \tag{3.34}$$

Обозначим второе слагаемое в правой части (3.34) через $\Phi(t_m)$. Тогда аналогично (3.20)

$$\Phi(t_m) = B(t_m)D^{T}(t_m)D(t_m)[D^{T}(t_m)D(t_m)]^{+}\widetilde{Y}(t_m). \tag{3.35}$$

Так как $D(t_m)[D^{T}(t_m)D(t_m)]^{+} = [D^{T}(t_m)]^{+}$ [4], а $D(t_m) = L^{T}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)$, то (3.35) принимает вид $\Phi(t_m) = B(t_m)[\widetilde{Y}(t_m)L(t_m)][\widetilde{Y}(t_m)L(t_m)]^{+}\widetilde{Y}(t_m)$. Так как $[\widetilde{Y}(t_m)L(t_m)][\widetilde{Y}(t_m)L(t_m)]^{+} = \widetilde{Y}(t_m)\widetilde{Y}^{+}(t_m)$ [4], то с использованием теоремы о характеризации псевдообратной матрицы [4] получаем окончательно, что $\Phi(t_m) = B(t_m)\widetilde{Y}(t_m)$. Использование полученного представления для $\Phi(t_m)$ в (3.34) дает представление для $\widetilde{K}(t_m)$ в виде

$$\widetilde{K}(t_m) = \widetilde{\Gamma}(\tau, t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)[\widetilde{Y}(t_m)\widetilde{W}(t_m)\widetilde{Y}^{T}(t_m)]^{+}\widetilde{Y}(t_m),$$

что и требовалось доказать.

4. **Анализ.** Синтез фильтра осуществлен при точном знании матрицы интенсивности аномальной помехи $\Theta(t_m)$. Относительно фильтра Калмана известно [8], что неточное знание параметров модели может вызвать явление расходимости. Таким образом, в нашей задаче важным является вопрос о чувствительности синтезированного фильтра к неточному знанию $\Theta(t_m)$ [9]. Это исследование проведем аналогично [2], следуя методике [9] с учетом специфики рассматриваемой здесь задачи.

Пусть $\Theta^{*}(t_m)$ – истинная, $\Theta(t_m)$ – используемая в фильтре матрица интенсивности аномальной помехи, а $\widetilde{\mu}_r^{0}(\tau, t_m)$ – ошибка реальной оценки

$\widetilde{\mu}_r(\tau, t_m)$, т. е., согласно (2.23), совместной оценки фильтрации и интерполяции. Тогда из (2.27), (2.29) следует, что

$$\widetilde{\mu}_r^0(\tau, t_m) = [I_{2n} - \widetilde{K}(t_m)G_{01}(t_m)]\widetilde{\mu}^0(\tau, t_m - 0) - \widetilde{K}(t_m)\xi(t_m) - \widetilde{K}(t_m)Cf(t_m). \quad (4.1)$$

Из (4.1) с учетом (3.4) следует, что матрица вторых моментов ошибки реальной оценки $\widetilde{\Gamma}_r(\tau, t_m) = M\{\widetilde{\mu}_r^0(\tau, t_m)\widetilde{\mu}_r^{0'}(\tau, t_m)\}$ определяется формулой

$$\widetilde{\Gamma}_r(\tau, t_m) = [I_{2n} - \widetilde{K}(t_m)G_{01}(t_m)]\widetilde{\Gamma}(\tau, t_m - 0)[I_{2n} - \widetilde{K}(t_m)G_{01}(t_m)]^T +$$

$$+ \widetilde{K}(t_m)[V(t_m) + Cf_0(t_m)f_0^T(t_m)C^T]\widetilde{K}(t_m) + \widetilde{K}(t_m)C\Theta^*(t_m)C^T\widetilde{K}^T(t_m). \quad (4.2)$$

Тогда $\psi_{ij}(t_m) = \partial\widetilde{\Gamma}(\tau, t_m)\big/\partial\Theta_{ij}^*\big|_{\Theta_{ij}^* = \Theta}$ является функцией чувствительности фильтра относительно элемента $\Theta_{ij}(t_m)$ матрицы $\Theta(t_m)$ $(1 \le i, j \le r)$. Из (4.2) получаем

$$\psi_{ij}(t_m) = \widetilde{K}(t_m)C\Psi_{ij}C^T\widetilde{K}^T(t_m), \quad (4.3)$$

где Ψ_{ij} – $(r \times r)$-матрица, у которой (i, j)-й элемент равен единице, а остальные – нулю. Учет (2.30), (2.31) в (4.3) дает, что $\psi_{ij}(t_m) = 0$ для всех $(1 \le i, j \le r)$, т. е. получаем следующее

У т в е р ж д е н и е 2. Фильтр (2.1)–(2.5), (3.10)–(3.14) является нечувствительным к неточному знанию матрицы интенсивности $\Theta(t_m)$ аномальной помехи $f(t_m)$.

Обозначим через $\overline{\eta}(t_m)$ вектор дискретных наблюдений размером $(q - r)$, который получается из вектора $\eta(t_m)$ путем исключения компонент с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$, по которым действуют аномальные помехи. Пусть $\overline{G}_0(t_m)$, $\overline{G}_1(t_m)$, $\overline{G}_{01}(t_m)$ – матрицы размерами $[(q-r)\times n]$, $[(q-r)\times n]$ и $[(q-r)\times 2n]$, которые получаются из матриц $G_0(t_m)$, $G_1(t_m)$ и $G_{01}(t_m)$ исключением строк, а $\overline{V}(t_m)$ – матрица размером $[(q-r)\times(q-r)]$, которая получается из матрицы $V(t_m)$ исключением строк и столбцов с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$. Тогда ОСКС фильтр, в котором используется вектор наблюдений $\overline{\eta}(t_m)$, свободный от аномальных помех, будем называть «усеченным». Очевидно, что если t_m – первый момент появления аномальной помехи, то «усеченный» фильтр определяется системой дифференциально-рекуррентных соотношений (2.1)–(2.17), где всюду $G_0(t_m)$, $G_1(t_m)$, $V(t_m)$, $\eta(t_m)$ и $\widetilde{\eta}(t_m)$ заменяются на $\overline{G}_0(t_m)$, $\overline{G}_1(t_m)$, $\overline{V}(t_m)$, $\overline{\eta}(t_m)$ и $\overline{\widetilde{\eta}}(t_m)$. Соответственно черта сверху также ставится над $\mu(t_m)$, $\mu(\tau, t_m)$, $\Gamma(t_m)$, $\Gamma_{11}(\tau, t_m)$, $\Gamma_{01}(\tau, t_m)$, $\widetilde{G}_0(t_m)$, $\widetilde{G}_1(t_m)$, $W(t_m)$. Смысл предыдущего результата объясняет следующее

У т в е р ж д е н и е 3. Фильтр, определенный утверждением 1, и «усеченный» фильтр эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для «усеченного» фильтра (2.6), (2.7) в блочном виде могут быть расписаны следующим образом:

$$\overline{\widetilde{\mu}}(\tau, t_m) = \overline{\widetilde{\mu}}(\tau, t_m - 0) + \overline{K}(t_m)\overline{\widetilde{\eta}}(t_m), \quad (4.4)$$

где $\overline{K}(t_m) = \widetilde{\Gamma}(\tau, t_m - 0)\overline{G}_{01}^T(t_m)\overline{W}^{-1}(t_m)$, $\overline{\widetilde{\eta}}(t_m) = \overline{\eta}(t_m) - \overline{G}_{01}(t_m)\widetilde{\mu}(\tau, t_m - 0)$. Таким образом, из (2.29), (4.4) следует, что доказательство сформулированного результата сводится к доказательству равенства $\overline{K}(t_m)\overline{\overline{\eta}}(t_m) = \widetilde{K}(t_m)\widetilde{\eta}(t_m)$. Пусть E – булева матрица размером $[(q-r)\times q]$, которая получается из матрицы I_q исключением строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Очевидно, что $\overline{\eta}(t_m) = E\eta(t_m)$, $\overline{G}(t_m) = EG(t_m)$, $\overline{\overline{\eta}}(t_m) = E\widetilde{\eta}(t_m)$. Следовательно, доказательство указанного равенства сводится к доказательству матричного тождества $\overline{K}(t_m)E = \widetilde{K}(t_m)$, которое с учетом (2.30), (3.2), (3.28) расписывается в виде

$$\widetilde{\Gamma}(\tau,\ t_m - 0)\overline{G}_{01}^{T}(t_m)\overline{W}^{-1}(t_m)E = \widetilde{\Gamma}(\tau,\ t_m - 0)G_{01}^{T}(t_m)\widetilde{W}^{-1}(t_m)\widetilde{Y}(t_m). \qquad (4.5)$$

Так как $\overline{G}_{01}(t_m) = EG_{01}(t_m)$, $\overline{V}(t_m) = EV(t_m)E^T$, то $\overline{W}(t_m) = EW(t_m)E^T$, и доказательство (4.5) сводится к доказательству матричного соотношения

$$E^T[EW(t_m)E^T]^{-1}E = \widetilde{W}^{-1}(t_m)\widetilde{Y}(t_m). \qquad (4.6)$$

По формуле Фробениуса [10] с учетом (3.9)

$$\widetilde{W}^{-1}(t_m) = W^{-1}(t_m) - W^{-1}(t_m)C[\Theta^{-1}(t_m) + N(t_m)]^{-1}C^T W^{-1}(t_m), \qquad (4.7)$$

где

$$N(t_m) = C^T W^{-1}(t_m)C. \qquad (4.8)$$

Умножая обе части (4.7) слева на C^T и справа на C, а затем сворачивая правую часть по формуле Фробениуса с учетом (4.8), получаем

$$C^T\widetilde{W}^{-1}(t_m)C = [\Theta(t_m) + N^{-1}(t_m)]^{-1}. \qquad (4.9)$$

Из (4.9) с учетом (3.26) следует, что

$$\Theta(t_m) = \widetilde{N}^{-1}(t_m) - N^{-1}(t_m). \qquad (4.10)$$

Умножение обеих частей (4.10) слева на C и справа на C^T с последующим прибавлением к обеим частям $W(t_m)$ приводит с учетом (3.9) к представлению $\widetilde{W}(t_m)$ в виде

$$\widetilde{W}(t_m) = W(t_m) + C\widetilde{N}^{-1}(t_m)C^T - CN^{-1}(t_m)C^T. \qquad (4.11)$$

Учитывая, что $\widetilde{W}(t_m)\widetilde{W}^{-1}(t_m) = I_q$, $W(t_m)W^{-1}(t_m) = I_q$, (4.11) приводит к соотношению

$$\widetilde{W}(t_m)[\widetilde{W}^{-1}(t_m) - \widetilde{W}^{-1}(t_m)C\widetilde{N}^{-1}(t_m)C^T\widetilde{W}^{-1}(t_m)]\widetilde{W}(t_m) =$$

$$= W(t_m)[W^{-1}(t_m) - W^{-1}(t_m)CN^{-1}(t_m)C^T W^{-1}(t_m)]W(t_m). \qquad (4.12)$$

Пусть $\widetilde{\Psi}(t_m)$ – левая часть (4.12). Используя для $\widetilde{W}(t_m)$, которые стоят в качестве сомножителей при квадратной скобке слева и справа, формулу (3.9), а затем (3.26), получаем, что

$$\widetilde{\Psi}(t_m) = W(t_m)[\widetilde{W}^{-1}(t_m) - \widetilde{W}^{-1}(t_m)C\widetilde{N}^{-1}(t_m)C^T\widetilde{W}^{-1}(t_m)]W(t_m),$$

и таким образом из (4.12) следует, что

$$\widetilde{W}^{-1}(t_m) - \widetilde{W}^{-1}(t_m)C\widetilde{N}^{-1}(t_m)C^T\widetilde{W}^{-1}(t_m) =$$
$$= W^{-1}(t_m) - W^{-1}(t_m)CN^{-1}(t_m)C^TW^{-1}(t_m). \tag{4.13}$$

Используя (4.13) в (4.6) с учетом (3.2), (3.17), (3.26), получаем, что доказательство (4.5) свелось к доказательству соотношения

$$W(t_m)E^T[EW(t_m)E^T]^{-1}E + CN^{-1}(t_m)C^TW^{-1}(t_m) = I_q. \tag{4.14}$$

Обозначим

$$W(t_m)E^T[EW(t_m)E^T]^{-1}E = A_1, \qquad CN^{-1}(t_m)C^TW^{-1}(t_m) = A_2. \tag{4.15}$$

По построению матриц C и E следует, что $EC = O$. Использование этого свойства приводит к тому, что для матриц A_1 и A_2 вида (4.15)

$$A_1A_2 = O, \qquad A_2A_1 = O. \tag{4.16}$$

Для рангов произвольных матриц A и B имеют место свойства [4]

$$\mathrm{rk}[AB] = \mathrm{rk}[A^+AB] = \mathrm{rk}[ABB^+]. \tag{4.17}$$

Учитывая, что для обратимой матрицы $D^+ = D^{-1}$, получаем в результате последовательного применения (4.17) к A_1 и A_2

$$\mathrm{rk}[A_1] = \mathrm{rk}[E^T[EW(t_m)E^T]^{-1}EE^+], \tag{4.18}$$

$$\mathrm{rk}[A_2] = \mathrm{rk}[C^+C[C^TW^{-1}(t_m)C]^{-1}C^T]. \tag{4.19}$$

Так как E и C по построению являются матрицами соответственно с линейно независимыми строками и столбцами, то [4]

$$EE^+ = I_{q-r}, \qquad C^+C = I_r. \tag{4.20}$$

Используя последовательно (4.20) и (4.17) в (4.18), (4.19), получаем $\mathrm{rk}[A_1] = \mathrm{rk}[E^T] = q - r$, $\mathrm{rk}[A_2] = \mathrm{rk}[C^T] = r$. Отсюда

$$\mathrm{rk}[A_1] + \mathrm{rk}[A_2] = q. \tag{4.21}$$

Из (4.15) получаем, что $A_1^2 = A_1$, $A_2^2 = A_2$, т. е. матрицы A_1 и A_2 являются проекционными [11]. Поскольку проекционные матрицы, удовлетворяющие условиям (4.16), (4.21), обладают свойством $A_1 + A_2 = I_q$, то это с учетом (4.15) доказывает (4.14), а тем самым (4.5), чем и завершается доказательство сформулированного утверждения.

Заключение. Из полученных результатов следуют как частные случаи соответствующие результаты для дискретного канала без памяти ($G_1(t_m) = O$) либо с чистым запаздыванием ($G_0(t_m) = O$), когда непрерывные наблюдения без памяти ($H_1(t) = O$) либо с чистым запаздыванием ($H_0(t) = O$). Утверждение 3, как и утверждение 2 в [2] и теорема 1 в [3], в рассматриваемой задаче доказывает оптимальность процедуры исключения аномальных компонент вектора наблюдения, но доказательство в отличие от [2] осуществлено в общем случае произвольных n, q, $G_0(t_m)$, $G_1(t_m)$. В случае отсутствия аномальных помех ($C = O$) $\widetilde{K}_0(t_m) = K_0(t_m)$, $\widetilde{K}_1(t_m) = K_1(t_m)$, т. е. (3.10)–(3.14) переходят соответственно в (2.6)–(2.10). В случае когда $r = q$ ($C = I_r$), $\widetilde{K}_0(t_m) = O$, $\widetilde{K}_1(t_m) = O$, $\mu(\tau, t_m) = \mu(\tau, t_m - 0)$. Это означает, что если аномальные помехи действуют по всем компонентам вектора $\eta(t_m)$, то фильтр не решается их использовать и осуществляет фильтрацию только по непрерывным наблюдениям. Исследование вопросов, рассмотренных в теореме 2 из [3], а также в [12], для предлагаемого здесь класса систем остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Демин Н. С., Жадан Л. И.** Об оптимальности процедуры исключения аномальных измерений // Автометрия. 1983. № 4. С. 29.
2. **Демин Н. С., Жадан Л. И.** Синтез и анализ оптимального алгоритма фильтрации для дискретных сигналов с аномальными помехами // Радиотехника и электроника. 1984. **29.** № 2. С. 250.
3. **Жадан Л. И.** К процедуре исключения аномальных измерений // Автометрия. 1985. № 2. С. 19.
4. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
5. **Демин Н. С.** Фильтрация случайных процессов при непрерывно-дискретных каналах наблюдения с памятью // Автоматика и телемеханика. 1987. № 3. С. 59.
6. **Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
7. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
8. **Сейдж Э., Мелс Д.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
9. **Гриффин Р., Сейдж Э.** Анализ чувствительности для дискретных алгоритмов фильтрации и сглаживания // Ракетная техника и космонавтика. 1969. № 10. С. 85.
10. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966.
11. **Абгарян К. А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М.: Наука, 1973.
12. **Демин Н. С., Лузина Л. И.** Точность оценивания и возможность обнаружения отказов в системах фильтрации при резервировании измерительных комплексов // Автометрия. 1989. № 4. С. 82.

Поступила в редакцию 24 февраля 1998 г.