РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1999

НАУЧНЫЕ ДИСКУССИИ

УДК 519.72 : 681.51

Е. Л. Кулешов
(Владивосток)

О ТЕСТИРОВАНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПО ВЫБОРКЕ

1. В статье [1] поставлена задача выбора наилучшей спектральной оценки $G_\nu(f)$ из числа конкурирующих оценок $G_1(f), \ldots, G_R(f)$ по M независимым конечным выборкам стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$. Решение задачи получено в виде решающего правила выбора одной из гипотез $H_1, \ldots, H_R$ (формулы (6) и (7) из [1]):

$$H_\nu(X)\colon (2F)^{-1}\int_{-F}^{F}[S_x(f)G_r^{-1}(f)+\ln G_r(f)]df\,\Big|_{r=\nu}=\min_r. \tag{1}$$

Здесь

$$S_X(f)=M^{-1}\sum_{m=1}^{M}(2Fn)^{-1}\left|\sum_{i=1}^{n}x_m(i)\exp(-j2\pi if\tau)\right|^2 \tag{2}$$

– оценка Бартлетта; $x_m(i)=x_m(t_i)$ – реализация с номером m; $\tau=t_i-t_{i-1}$ – интервал дискретизации по времени; $2F=1/\tau$; M – число реализаций.

Отметим, что эта задача имеет важное практическое значение и аналогичные проблемы нахождения в некотором смысле оптимальной оценки спектральной плотности ставились не один раз в спектральном анализе [2, 3]. Основным результатом статьи [1] являются «вывод и обоснование решающего правила (1), (2) в роли универсального критерия тестирования спектральных оценок по эффективности, которым охватывается широкий круг разнообразных методов, включая новые нелинейные методы...».

К сожалению, этот интересный результат – соотношения (1), (2) – не подходит на роль критерия спектральных оценок по их эффективности. По нашему мнению, причина состоит в следующем. Условие (1) выбора наилучшей оценки среди оценок $G_1(f), \ldots, G_R(f)$ можно заменить на более сильное:

$$(2F)^{-1}\int_{-F}^{F}[S_X(f)G^{-1}(f)+\ln G(f)]df\to\min_G, \tag{3}$$

которое представляет собой простейший вариант вариационной задачи с неподвижными границами [4]. При этом под интегралом (3) стоит функция $\varphi(f)=S_X(f)G^{-1}(f)+\ln G(f)$, зависимая только от G и не зависимая от производной dG/df и переменной интегрирования f. Поэтому уравнение Эйлера в задаче (3) имеет вид [4]:

$$\frac{d\varphi}{dG} = 0. \tag{4}$$

Его решение (при $G \neq 0$)

$$G(f) = S_X(f) \tag{5}$$

обеспечивает минимум функционала (3).

Таким образом, если одна из любых конкурирующих оценок $G_1(f), \ldots, G_R(f)$ совпадает с оценкой $S_X(f)$, то решающее правило (1), (2) выбирает в качестве наилучшей спектральную оценку Бартлетта $S_X(f)$. Поэтому нет смысла для каждой из оценок $G_1(f), \ldots, G_R(f)$ вычислять интегральные статистики (1), сравнивать их для поиска минимальной и т. д.; применение решающего правила (1), (2) дает заведомо известный результат: оптимальной оценкой является оценка Бартлетта $S_X(f)$. Однако в спектральном анализе известно, что во многих случаях оценка Бартлетта неудовлетворительна, а лучшие результаты могут быть получены с помощью новых нелинейных методов [3], обладающих более высокой разрешающей способностью.

2. Возникает вопрос, в чем причины свойства (5) решения оптимизационной задачи (1), (2)? Эти причины заключаются в самой постановке задачи, и в частности, в той информации об исследуемом процессе, которая используется при этом. Постановка задачи, рассмотренная в статье [1], состоит в выборе H_ν – одной из гипотез $H_1, \ldots, H_R$ по критерию максимального правдоподобия (формулы (2), (3) из [1]):

$$H_\nu(X)\colon p_\nu(X) = \max_r p_r(X), \tag{6}$$

где $p_r(X)$ – функция правдоподобия, имеющая вид

$$p_r(X) = (2\pi)^{-Mn/2} |\mathbf{K}_r|^{-M/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} \mathbf{x}_m^T \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{x}_m\right), \tag{7}$$

$\mathbf{K}_r$ – корреляционная матрица (точнее, матрица корреляционных оценок, поскольку элементы матрицы определяются через преобразование Фурье от спектральной оценки G_r); $|\mathbf{K}_r|$ – ее определитель; $\mathbf{K}_r^{-1}$ – матрица, обратная корреляционной; $\mathbf{x}_m$ – вектор-столбец с номером m размером n; T – символ транспонирования. Условиями (6), (7) определяется наиболее правдоподобная корреляционная матрица $\mathbf{K}_\nu$ и, следовательно, наиболее правдоподобная спектральная оценка G_ν. Информация об исследуемом процессе, которая используется при постановке задачи, сводится к двум условиям: 1) экспериментальные данные представлены M независимыми реализациями и 2) исследуемый процесс гауссов с нулевым средним. Решение (1), (2) задачи (6), (7) получено в [1] при дополнительном условии 3 больших объемов выборок ($n \to \infty$).

Таким образом, можно указать три причины, которые могут приводить к свойству (5) решающего правила (1), (2). Эти причины связаны соответственно с нарушением условий 1, 2 или 3, т. е. решающее правило (1), (2) на коррелированных выборках для случайного процесса с негауссовым распределением вероятностей или на коротких выборках может срабатывать не так, как объявлено в основном результате [1]. Особенно критичным с позиции основного результата [1] является последнее условие 3, что обусловлено следующими свойствами спектральных оценок.

Известно, что на реализациях большой длительности классические спектральные оценки имеют преимущество перед новыми нелинейными спектральными оценками с высоким разрешением [3. С. 451]. Асимптотические результаты (1), (2) и свойство (5) могут рассматриваться как обоснование этого факта. Кроме того, известно, что новые нелинейные спектральные оценки, например авторегрессионные, имеют преимущество перед классическими именно на коротких выборках [3]. Поэтому решающее правило (1), (2), справедливое только для реализаций большой длительности, не может выявить преимущество авторегрессионной оценки в области коротких реализаций, поскольку оно использует условие большой длительности реализаций, что и приводит к следствию (5), т. е. наилучшей оценкой по этому решающему правилу является оценка Бартлетта независимо от длительности реализаций, по которым вычислялись оценки G_r.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Савченко В. В.** Тестирование спектральных оценок по выборке // Автометрия. 1997. № 4. С. 107.
2. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. Вып. 2.
3. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
4. **Эльсгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 22 января 1998 г.