РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1999

УДК 519.21 : 681.518

Ю. С. Харин, М. С. Абрамович

(Минск, Беларусь)

ОБ ОБНАРУЖЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ РАЗЛАДКИ ДВУМЕРНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Предлагаются критерий обнаружения разладки во взаимной спектральной плотности двумерного временного ряда и оценка момента разладки, основанные на спектральных статистиках второго порядка. Аналитически и с помощью численных экспериментов исследуются свойства критерия и оценки.

Введение. Спектральный анализ двумерных временных рядов находит широкое применение в исследовании реальных процессов, которые описываются характеристиками, изменяющимися во времени [1–3]. Так, в [1] проводится спектральный анализ двумерных временных рядов ежемесячных средних температур, в [2] рассматривается его применение для анализа индикаторов экономических циклов.

В этих и аналогичных им задачах двумерные временные ряды с течением времени могут изменять свои характеристики «скачкообразно», т. е. происходят разладки временного ряда. В связи с этим актуальна задача определения моментов разладки таких рядов. Обнаружение разладок одномерных временных рядов на основе спектральных статистик или функционалов от них рассмотрено во многих работах [4–9]. Настоящая статья посвящена задачам обнаружения момента разладки взаимной спектральной плотности двумерного временного ряда с использованием спектральных статистик второго порядка.

Математическая модель и постановка задачи. Пусть $X_1(t)$, $X_2(t) \in \mathbf{R}^2$ – два независимых стационарных в широком смысле двумерных временных ряда: $X_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t))'$, $x_{ij}(t)$ – значение j-й компоненты i-го временного ряда ($i = 1,2$; $j = 1,2$) в момент времени $t = 1,2,\ldots$; $'$ – символ транспонирования. Определим (2×2)-матрицу ковариации двумерного временного ряда $X_i(t)$:

$$c_i(u) = \mathrm{cov}\{X_i(t+u), X_i(t)\} = \mathbf{E}\{(X_i(t+u) - \mu_i)(X_i(t) - \mu_i)'\}, \tag{1}$$

где $\mu_i = \mathbf{E}\{X_i(t)\}$ – вектор среднего значения временного ряда $X_i(t)$.

Обозначим $c_{ikl}(u)$ – (k,l)-й элемент матрицы $c_i(u)$, который является взаимной ковариационной функцией временных рядов $x_{ik}(t)$ и $x_{il}(t)$ $(k,l \in \{1,2\},\ k \neq l)$. При $k = l$ имеем автоковариационную функцию ряда $x_{ik}(t)$.

Предполагая, что $\sum_{u=-\infty}^{\infty}|c_{ikl}(u)|<\infty$ для $i,k,l=1,2,$ определим (2×2)-матрицу спектральной плотности [1]:

$$S_i^0(\lambda)=(s_{ikl}^0(\lambda))=\frac{1}{2\pi}\sum_{u=-\infty}^{\infty}\exp(-i^*\lambda u)c_i(u), \tag{2}$$

где i^* – мнимая единица; $\lambda\in[-\pi,+\pi]$ – частота.

Элемент матрицы спектральной плотности $s_{ikl}^0(\lambda)=s_{ikl}^{0R}(\lambda)+i^*s_{ikl}^{0I}(\lambda)$ является спектральной плотностью временного ряда $x_{il}(t)$, если $k=l$, и взаимной спектральной плотностью временных рядов $x_{ik}(t)$ и $x_{il}(t)$, если $k\neq l$. Будем предполагать, что матрицы спектральных плотностей $S_1^0(\lambda)=(s_{1kl}^0(\lambda))$ и $S_2^0(\lambda)=(s_{2kl}^0(\lambda))$ не известны и могут различаться лишь взаимными спектральными плотностями: $s_{112}^0(\cdot)\neq s_{212}^0(\cdot)$, $s_{111}^0(\cdot)=s_{211}^0(\cdot)$, $s_{122}^0(\cdot)=s_{222}^0(\cdot)$.

Это означает, что различие временных рядов $X_1(t)$, $X_2(t)$ проявляется в типе взаимной зависимости компонент, образующих временные ряды.

Наблюдается двумерный временной ряд $X(t)$ длительностью T с разладкой в неизвестный момент времени $t_0\in\{2,3,\dots,T,T+1\}$, составленный из фрагментов исходных временных рядов $X_1(t)$, $X_2(t)$:

$$X(t)=\begin{cases}X_1(t), & 1\le t\le t_0-1,\\ X_2(t), & t\ge t_0.\end{cases} \tag{3}$$

Разладка двумерного временного ряда $X(t)$, $t=\overline{1,T}$, в момент времени t_0 порождается изменением взаимной спектральной плотности. Если $t_0=T+1$, то $X(t)=X_1(t)$, $t=\overline{1,T}$, – однородный временной ряд, т. е. в наблюдаемом ряду разладка отсутствует.

Рассмотрим следующие задачи для модели (1)–(3): 1) обнаружение разладки в наблюдаемом временном ряду $X(t)$, $t=\overline{1,T}$; 2) оценивание момента разладки t_0; 3) исследование свойств этих статистических выводов.

Спектральная статистика для обнаружения момента разладки и ее свойства. Для произвольного момента времени $\tau\in\{2,\dots,T-1\}$ определим гипотезу $H_{1\tau}$: $t_0=\tau$, состоящую в том, что в момент времени τ имеет место разладка вида (3) наблюдаемого двумерного временного ряда, и гипотезу $H_{0\tau}$, состоящую в том, что наблюдаемый двумерный временной ряд является однородным $(s_{112}^0(\cdot)=s_{212}^0(\cdot))$ и не содержит разладок. Будем предполагать, что для произвольного момента времени τ, относительно которого проверяются гипотезы $H_{0\tau}$, $H_{1\tau}$, выделены два фрагмента двумерного временного ряда $X(t)$: $X_1=(x_1,\dots,x_{\tau-1})'$ и $X_2=(x_\tau,\dots,x_T)'$ – длиной соответственно $T_1=\tau-1$ и $T_2=T-\tau+1$ $(T_1+T_2=T)$.

В качестве оценки $\hat{s}_{i12}(\lambda)$ спектральной плотности $s_{i12}^0(\lambda)$ по фрагменту X_i рассмотрим согласно [1] следующую статистику:

$$\hat{s}_{i12}(\lambda)=\frac{2\pi}{T_i}\sum_{n=1}^{T_i-1}W^{(T_i)}\left(\lambda-\frac{2\pi n}{T_i}\right)\hat{I}_{i12}^{(T_i)}\left(\frac{2\pi n}{T_i}\right), \tag{4}$$

где

$$W^{(T_i)}(\alpha)=K_{T_i}\sum_{j=-\infty}^{\infty}W(K_{T_i}(\alpha+2\pi j));$$

$\hat{I}^{(T_i)}_{i12}(\cdot)$ – периодограмма второго порядка; K_{T_i} – параметр сглаживания; $W(\alpha)$, $-\infty<\alpha<\infty$, – весовая функция, удовлетворяющая соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty}W(\alpha)d\alpha=1, \qquad W(-\alpha)=W(\alpha).$$

Для обнаружения момента разладки аналогично [7] построим взвешенную статистику различия выборочных оценок спектральных плотностей:

$$\Delta^2(\tau)=\frac{\sum_{s=1}^{m}|\hat{s}_{112}(\lambda_s)-\hat{s}_{212}(\lambda_s)|^2}{\sum_{s=1}^{m}(|\hat{s}_{112}(\lambda_s)|^2+|\hat{s}_{212}(\lambda_s)|^2)}, \tag{5}$$

m – число частот $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, для которых вычисляются оценки спектральных плотностей.

При $\tau=t_0$ статистика (5) является статистической оценкой функционала

$$\Delta^2(t_0)=\frac{\sum_{s=1}^{m}|s^0_{112}(\lambda_s)-s^0_{212}(\lambda_s)|^2}{\sum_{s=1}^{m}(|s^0_{112}(\lambda_s)|^2+|s^0_{212}(\lambda_s)|^2)}.$$

Для анализа распределения статистики $\Delta^2(\tau)$ введем вспомогательную статистику

$$\Delta_1^2(\tau)=\frac{\sum_{s=1}^{m}|\hat{s}_{112}(\lambda_s)-\hat{s}_{212}(\lambda_s)|^2}{\sum_{s=1}^{m}(|s^0_{112}(\lambda_s)|^2+|s^0_{212}(\lambda_s)|^2)},$$

отличающуюся от статистики $\Delta^2(\tau)$ тем, что в ее знаменателе стоят истинные значения спектральных плотностей.

Лемма 1. Если $\xi=(\xi_1,\ \xi_2)$ – двумерный гауссовский случайный вектор с вектором математических ожиданий $a=(a_1,\ a_2)'$ и ковариационной (2×2)-матрицей $\Sigma=(\sigma_{ij})$, $i,j=1,2$, то

$$\mathbf{E}\{\xi_1^2\xi_2^2\}=a_1^2a_2^2+4a_1a_2\sigma_{12}+\sigma_{11}\sigma_{22}+2\sigma_{12}^2+a_1^2\sigma_{22}+a_2^2\sigma_{11},$$

$$\mathbf{E}\{\xi_1^2\xi_2\}=a_2(a_1^2+\sigma_{11})+2a_1\sigma_{12}.$$

Доказательство проводится с использованием свойств гауссовских распределений.

Обозначим

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\alpha)d\alpha > 0,$$

$C_{i,a_1,\ldots,a_k}(t_1,\ldots,t_k)$, где $a_1,\ldots,a_k \in \{1,2\}$ и $t_1,\ldots,t_k = 0, \pm 1,\ldots$ – совместный семиинвариант k-го порядка двумерного временного ряда $X_i(t)$.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия ($i = 1,2$):

1) для двумерного временного ряда $X_i(t)$ существует $l \geq 0$ такое, что для любого набора $a_1,\ldots,a_k \in \{1,2\}$:

$$\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{k-1}=-\infty}^{\infty} \{1+|\nu_j|^l\}|C_{i,a_1,\ldots,a_k}(\nu_1,\ldots,\nu_{k-1})| < \infty \qquad (j = \overline{1,k-1}),$$

где $k = 2,3,\ldots$;

2) $\sum_{u=-\infty}^{\infty} |u||c_i(u)| < \infty$;

3) $s_{i12}^0(\lambda)$ имеет ограниченную производную первого порядка;

4) имеет место асимптотика: $T_1, T_2 \to \infty, K_{T_1}, K_{T_2} \to \infty, \dfrac{K_{T_1}}{T_1} \to 0, \dfrac{K_{T_2}}{T_2} \to 0,$ $m = O(T^{1-\theta}), 0 < \theta < 1,$ $m \to \infty$.

Тогда при выполнении нулевой гипотезы $H_{0\tau}$ статистика

$$G = \frac{\sum_{s=1}^{m} (|s_{112}^0(\lambda_s)|^2 + |s_{212}^0(\lambda_s)|^2)\Delta_1^2(\tau) - A_m}{B_m}$$

имеет асимптотически нормальное распределение $N(0,1)$ где

$$A_m = \sum_{s=1}^{m} a_s, \qquad B_m = \sqrt{\sum_{s=1}^{m} b_s},$$

$$a_s = 2\pi\left(\frac{K_{T_1}}{T_1} + \frac{K_{T_2}}{T_2}\right) w |s_{112}^0(\lambda_s)|^2 + O\left(\frac{1}{K_{T_1}^2} + \frac{1}{K_{T_2}^2} + \frac{K_{T_1}^2}{T_1^2} + \frac{K_{T_2}^2}{T_2^2}\right),$$

$$b_s = 8\pi^2\left(\frac{K_{T_1}}{T_1} + \frac{K_{T_2}}{T_2}\right)^2 w^2 |s_{112}^0(\lambda_s)|^4 + O\left(\frac{1}{K_{T_1}^2} + \frac{1}{K_{T_2}^2} + \frac{K_{T_1}^3}{T_1^3} + \frac{K_{T_2}^3}{T_2^3}\right).$$

Доказательство. Определим, используя условие 3 теоремы и результаты из [1], математическое ожидание действительной и мнимой частей статистики $\hat{s}_{i12}(\lambda) = \hat{s}_{i12}^R(\lambda) + i^* \hat{s}_{i12}^I$:

$$\mathbf{E}\{\hat{s}_{i12}^R(\lambda)\} = s_{i12}^{0R}(\lambda) + O\left(\frac{1}{K_{T_i}^2}\right), \qquad \mathbf{E}\{\hat{s}_{i12}^I(\lambda)\} = s_{i12}^{0I}(\lambda) + O\left(\frac{1}{K_{T_i}^2}\right). \qquad (6).$$

В силу [1] и условий 1, 2, 4 теоремы справедливо асимптотическое разложение для ковариации:

$$\operatorname{cov}\{\hat{s}^R_{i12}(\lambda), \hat{s}^I_{i12}(\lambda)\} = -2\pi \frac{K_{T_i}}{T_i} s^{0R}_{i12} s^{0I}_{i12} w + O\left(\frac{K^2_{T_i}}{T_i^2}\right). \tag{7}$$

В силу выполнения условий 1, 2, 4 оценки спектральных плотностей, согласно [1], асимптотически нормальны и не коррелированы.

На основании центральной предельной теоремы при $m \to \infty$ статистика

$$G = \left(\sum_{s=1}^{m} (\xi_s - \mathbf{E}\{\xi_s\})\right) \Bigg/ \left(\sqrt{\sum_{s=1}^{m} \mathbf{D}\{\xi_s\}}\right)$$

распределена асимптотически нормально по стандартному закону $N(0,1)$.

Параметры $a_s = \mathbf{E}\{\xi_s\}$ и $b_s = \mathbf{D}\{\xi_s\}$, где $\xi_s = |\hat{s}_{112}(\lambda_s) - \hat{s}_{212}(\lambda_s)|^2$, определяются с учетом асимптотической нормальности оценок взаимных спектральных плотностей $\{s_{i12}(\lambda_s)\}$, их асимптотической некоррелированности, а также с использованием выражений (6), (7), леммы 1 и того факта, что при выполнении нулевой гипотезы $H_{0\tau}$ спектральные плотности совпадают: $s^0_{112}(\cdot) = s^0_{212}(\cdot)$.

Критерий обнаружения разладки и его асимптотический анализ. С помощью теоремы 1 построим следующий критерий обнаружения момента разладки двумерного временного ряда:

$$\text{принимается гипотеза} \begin{cases} H_{0\tau}, & \text{если} \quad \Delta^2(\tau) < \delta_\varepsilon, \\ H_{1\tau}, & \text{если} \quad \Delta^2(\tau) \geq \delta_\varepsilon, \end{cases} \tag{8}$$

$$\delta_\varepsilon = \pi\left(\frac{K_{T_1}}{T_1} + \frac{K_{T_2}}{T_2}\right)(\sqrt{2}\Phi^{-1}(1-\varepsilon) + 1)w,$$

где $\Phi^{-1}(p)$ – квантиль уровня p стандартного нормального распределения.

Легко показать, что в условиях теоремы 1 асимптотический уровень значимости критерия (8) равен заданной величине ε.

Для оценки мощности спектрального критерия обнаружения разладки (8) найдем асимптотическое при T_1, $T_2 \to \infty$ распределение вспомогательной статистики $\Delta_1^2(\tau)$. Для этого воспользуемся следующей леммой, доказательство которой приведено в [10].

Лемма 2. Пусть случайный вектор $Z_n = (Z_{n1}, \ldots, Z_{nk})$ при $n \to \infty$ распределен по асимптотическому k-мерному нормальному закону $N_k(\mu, b_n^2\Sigma)$, где μ – математическое ожидание; Σ – ковариационная матрица и $b_n \to 0$. Пусть $g(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_k)$, – векторная функция, имеющая ненулевой дифференциал $g(\mu, t)$, $t=(t_1, \ldots, t_k)$, в точке $z=\mu$. Положим $D=\left(\frac{\partial g}{\partial z_j}\right)_{z=\mu}$, $j=\overline{1,k}$, $(k\times 1)$ – вектор-столбец частных производных в точке μ. Тогда асимптотическое распределение статистики $Y_n=g(Z_n)$ есть нормальное: $N_1(g(\mu), b_n^2 D'\Sigma D)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1–4 теоремы 1. Тогда при $\tau=t_0$ и выполнении гипотезы $H_{1\tau}$ статистика Δ_1^2 распределена асимптотически нормально:

$$L\left\{\frac{\Delta_1^2-a(T_1, T_2)}{\sqrt{B(T_1, T_2)}}\right\}\to N(0, 1),$$

где

$$a(T_1, T_2)=\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}|s_{112}^0(\lambda_s)-s_{212}^0(\lambda_s)|^2}{\sum\limits_{s=1}^{m}(|s_{112}^0(\lambda_s)|^2+|s_{212}^0(\lambda_s)|^2)}, \tag{9}$$

$$B(T_1, T_2)=\frac{8\pi w}{F^2}\times$$

$$\times\left(\frac{K_{T_1}}{T_1}\sum_{s=1}^{m}((s_{112}^{0R}(\lambda_s))^2-(s_{112}^{0I}(\lambda_s))^2-s_{112}^{0R}(\lambda_s)s_{212}^{0R}(\lambda_s)+s_{112}^{0I}(\lambda_s)s_{212}^{0I}(\lambda_s))^2+\right.$$

$$\left.+\frac{K_{T_2}}{T_2}\sum_{s=1}^{m}((s_{212}^{0R}(\lambda_s))^2-(s_{212}^{0I}(\lambda_s))^2-s_{112}^{0R}(\lambda_s)s_{212}^{0R}(\lambda_s)+s_{112}^{0I}(\lambda_s)s_{212}^{0I}(\lambda_s))^2\right), \tag{10}$$

$$F=\sum_{s=1}^{m}(|s_{112}^0(\lambda_s)|^2+|s_{212}^0(\lambda_s)|^2).$$

Доказательство. Как следует из [1], в силу выполнения условий 1, 2, 4 действительная $\hat{s}_{i12}^R(\lambda_s)$ и мнимая $\hat{s}_{i12}^I(\lambda_s)$ части оценок спектральных плотностей асимптотически нормальны. Согласно [1], в силу выполнения условий 1, 4 и того, что временные ряды $X_1(t)$, $X_2(t)$ независимы, имеют место следующие соотношения для асимптотических коварицаций оценок спектральных плотностей:

$$\operatorname{cov}\{\hat{s}_{112}(\lambda_s), \hat{s}_{212}(\lambda'_s)\}=0 \quad \text{при любых} \quad \lambda_s, \lambda'_s,$$

$$\operatorname{cov}\{\hat{s}_{i12}(\lambda_s), \hat{s}_{i12}(\lambda'_s)\}=0 \quad \text{при} \quad \lambda_s\neq\lambda'_s.$$

Учитывая это, асимптотическая ковариационная матрица оценок спектральных плотностей будет иметь блочно-диагональный вид:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

$$T_{11} = \operatorname{cov}\{\hat{s}^{R}_{112}(\lambda_s),\ \hat{s}^{R}_{112}(\lambda_s)\}, \qquad T_{22} = \operatorname{cov}\{\hat{s}^{I}_{112}(\lambda_s),\ \hat{s}^{I}_{112}(\lambda_s)\},$$

$$T_{12} = T_{21} = \operatorname{cov}\{\hat{s}^{R}_{112}(\lambda_s),\ \hat{s}^{I}_{112}(\lambda_s)\},$$

$$T_{33} = \operatorname{cov}\{\hat{s}^{R}_{212}(\lambda_s),\ \hat{s}^{R}_{212}(\lambda_s)\}, \qquad T_{44} = \operatorname{cov}\{\hat{s}^{I}_{212}(\lambda_s),\ \hat{s}^{I}_{212}(\lambda_s)\},$$

$$T_{34} = T_{43} = \operatorname{cov}\{\hat{s}^{R}_{212}(\lambda_s),\ \hat{s}^{I}_{212}(\lambda_s)\}, \qquad s = \overline{1,m}.$$

Вектор-столбец производных D запишется в виде

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{2(s^{0R}_{112}(\lambda_s) - s^{0R}_{212}(\lambda_s))}{F} \\ \dfrac{2(s^{0I}_{112}(\lambda_s) - s^{0I}_{212}(\lambda_s))}{F} \\ \dfrac{2(s^{0R}_{212}(\lambda_s) - s^{0R}_{112}(\lambda_s))}{F} \\ \dfrac{2(s^{0I}_{212}(\lambda_s) - s^{0I}_{112}(\lambda_s))}{F} \end{pmatrix}, \qquad s = \overline{1,m}. \qquad (12)$$

Значение математического ожидания $a(T_1, T_2)$ исследуемого асимптотического распределения, исходя из леммы 2 и выражений (6), совпадает с (9). Дисперсия асимптотического распределения с учетом (7), (11), (12) и леммы 2 равна

$$B(T_1, T_2) = D\Sigma D' = \frac{8\pi w}{F^2} \sum_{s=1}^{m} (s^{0R}_{112}(\lambda_s) - s^{0R}_{212}(\lambda_s))^2 \times$$

$$\times \left(\frac{K_{T_1}}{T_1} (s^{0R}_{112}(\lambda_s))^2 + \frac{K_{T_2}}{T_2} (s^{0R}_{212}(\lambda_s))^2 \right) +$$

$$+ \frac{8\pi w}{F^2} \sum_{s=1}^{m} (s^{0I}_{112}(\lambda_s) - s^{0I}_{212}(\lambda_s))^2 \left(\frac{K_{T_1}}{T_1} (s^{0I}_{112}(\lambda_s))^2 + \frac{K_{T_2}}{T_2} (s^{0I}_{212}(\lambda_s))^2 \right) -$$

$$- \frac{16\pi w}{F^2} \sum_{s=1}^{m} (s^{0R}_{112}(\lambda_s) - s^{0R}_{212}(\lambda_s))(s^{0I}_{112}(\lambda_s) - s^{0I}_{212}(\lambda_s)) \times$$

$$\times\left(\frac{K_{T_1}}{T_1}s_{112}^{0R}(\lambda_s)s_{112}^{0I}(\lambda_s)+\frac{K_{T_2}}{T_2}s_{212}^{0R}(\lambda_s)s_{212}^{0I}(\lambda_s)\right).$$

Проводя эквивалентные преобразования, получим (10).

Следствие. Справедлива следующая аппроксимация мощности критерия (8):

$$W=\mathbf{P}_{H_{1\tau}}\{\Delta^2(\tau)>\delta_\varepsilon\}\approx 1-\Phi\left(\frac{\delta_\varepsilon-a(T_1,T_2)}{\sqrt{B(T_1,T_2)}}\right), \tag{13}$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция стандартного нормального распределения.

Доказательство. Мощность критерия, основанного на статистике $\Delta_1^2(\tau)$, определяется следующим образом:

$$W_1=\mathbf{P}_{H_{1\tau}}\{\Delta_1^2>\delta_\varepsilon\}\approx 1-\Phi\left(\frac{\delta_\varepsilon-a(T_1,T_2)}{\sqrt{B(T_1,T_2)}}\right). \tag{14}$$

Статистика $\Delta_1^2(\tau)$ – непрерывное функциональное преобразование от оценок взаимных спектральных плотностей (4), которые являются состоятельными [1]. Следовательно, имеет место сходимость по вероятности: $\Delta^2(\tau)-\Delta_1^2(\tau)\xrightarrow{P}0$. Поэтому из (14) следует (13).

Алгоритм оценивания момента разладки и результаты моделирования. Согласно разработанному критерию обнаружения разладки (8), статистика $\Delta^2(\tau)$ может служить статистической мерой различия гипотез $H_{0\tau}$, $H_{1\tau}$. Поэтому статистику $\Delta^2(\tau)$ предлагается использовать для построения оценки момента разладки t_0:

$$\hat{\tau}=\begin{cases}\arg\max\limits_{\tau\in\{2,\ldots,T\}}\Delta^2(\tau), & \text{если } \max\limits_{\tau\in\{2,\ldots,T\}}\Delta^2(\tau)>\delta_\varepsilon,\\ T+1, & \text{если } \max\limits_{\tau\in\{2,\ldots,T\}}\Delta^2(\tau)<\delta_\varepsilon.\end{cases} \tag{15}$$

Отметим, что, согласно принятой модели (3), случай $\hat{\tau}=T+1$ означает решение об отсутствии разладки в наблюдаемом временном ряду.

Вычислительная сложность алгоритма (15), выражающая число элементарных операций ЭВМ, имеет следующий порядок:

$$V=O(T(\log_2 T+mK_T)).$$

К сожалению, аналитическое исследование оценки (15), (5), (4) затруднительно из-за существенно нелинейной зависимости статистик $\{\Delta^2(\tau)\}$. Поэтому приведем результаты исследования разработанного алгоритма методом статистического моделирования на ЭВМ.

$\hat{\tau}$	≤ 995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	≥ 1007
ν	1	0	2	5	9	42	884	37	11	4	2	2	1

В численных экспериментах в качестве моделей временных рядов $X_1(t)$, $X_2(t) \in \mathbf{R}^2$ использовались двумерные авторегрессии первого порядка (VAR(1)):

$$x_{11}(t) = 0{,}6x_{11}(t-1) - 0{,}5x_{12}(t-1) + \varepsilon_{1t},$$

$$x_{12}(t) = 0{,}4x_{11}(t-1) + 0{,}5x_{12}(t-1) + \varepsilon_{2t},$$

$$x_{21}(t) = 0{,}7x_{21}(t-1) - 0{,}3x_{22}(t-1) + \varepsilon_{3t},$$

$$x_{22}(t) = 0{,}3x_{21}(t-1) + 0{,}7x_{22}(t-1) + \varepsilon_{4t},$$

где $\{\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t}, \varepsilon_{4t}\}$ – независимые в совокупности случайные величины, распределенные по стандартному нормальному закону $N(0,1)$. Наблюдаемый временной ряд $X(t)$ длиной $T = 2000$ имитировался согласно (3) при различных значениях момента разладки t_0. При вычислении статистики $\Delta^2(\tau)$, согласно (5), (4), использовалась весовая функция Хэмминга $W(\cdot)$ с параметром сглаживания $K_T = 5$ и $m = 40$ равноотстоящих частот $\{\lambda_s\}$. Уровень значимости критерия (8) задавался величиной $\varepsilon = 0{,}05$.

Проведено три серии экспериментов по оценке точности алгоритмов (8), (15), в каждом из которых моделировалось и обрабатывалось по $M = 1000$ временных рядов $\{X(t)\colon\ t = \overline{1,T}\}$.

В первой серии экспериментов $t_0 = 2001$, т. е. наблюдаемый временной ряд в действительности был однородным. При этом критерий обнаружения (8) для $\tau = 1001$ отверг истинную гипотезу $H_{0\tau}$ лишь в единственном случае из $M = 1000$ обработанных временных рядов, т. е. оценка вероятности ошибки первого рода $\hat{\alpha} = 0{,}001$. Во второй серии экспериментов $t_0 = 1001$, так что наблюдаемый временной ряд имел разладку (верна гипотеза $H_{1\tau}$ при $\tau = 1001$). Критерий (8) обнаружил разладку в 996 случаях, т. е. оценка вероятности ошибки второго рода $\hat{\beta} = 0{,}004$.

В третьей серии экспериментов $t_0 = 1001$, и с помощью алгоритма (15) на множестве $\tau \in \{200, 201, \ldots, 1800\}$ отыскивалась оценка момента разладки $\hat{\tau}$. В таблице приведены полученные для $M = 1000$ временных рядов значения оценок $\hat{\tau}$ и частоты их встречаемости ν, показывающие достаточную точность разработанных алгоритмов.

Заключение. Предложен критерий обнаружения разладки двумерных временных рядов, порождаемой изменением взаимной спектральной плотности. Получена оценка мощности критерия для общей модели спектральной разладки. Проведенные численные эксперименты показали достаточно высокую точность и быстродействие разработанного алгоритма оценивания момента разладки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бриллинджер Д.** Временные ряды. М.: Мир, 1980.
2. **Гренджер К., Хатанака М.** Спектральный анализ временных рядов в экономике. М.: Статистика, 1972.
3. **Губарев В. В.** Алгоритмы статистических измерений. М.: Энергоатомиздат, 1985.
4. **Клигене Н., Телькснис Л.** Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 10.
5. **Савченко В. В.** Обнаружение и прогнозирование разладки случайного процесса на основе спектрального оценивания // Автометрия. 1996. № 2. С. 77.
6. **Picard D.** Testing and estimating change-points in time series // Adv. Appl. Probab. 1985. **17**. N 4.
7. **Абрамович М. С.** Обнаружение разладок с использованием спектральных статистик // Компьютерный анализ данных и моделирование: Сб. науч. ст. Минск: БГУ, 1995.
8. **Basseville M.** Detection changes in signals and systems – a survey // Automatica. 1988. **24**, N 3.
9. **Gray A. H., Markel J. D.** Distance measures for speech processing // IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing. 1976. **ASSP-24**.
10. **Serfling R. J.** Approximation Theorems of Mathematical Statistics. N. Y.: Wiley, 1980.

Поступила в редакцию 31 марта 1998 г.
