РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 2 1999

УДК 519.24

Е. Л. Кулешов
(Владивосток)

ОПТИМАЛЬНЫЕ СГЛАЖИВАЮЩИЕ ОКНА В СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вводятся линейные спектральные и корреляционные оценки общего вида, для которых спектральные и корреляционные окна являются функциями двух переменных. Определены соотношения, связывающие спектральные и корреляционные окна. Получены уравнения для оптимальных окон и выражения для минимальных среднеквадратических ошибок линейных спектральных и корреляционных оценок. Определены условия, при которых оптимальные спектральные и корреляционные оценки образуют пару преобразований Фурье. Рассмотрены частные случаи линейных оценок, которые сводятся к известным формулам непараметрического спектрального анализа.

Пусть стационарный в широком смысле случайный процесс $x(t)$, наблюдаемый на интервале $[t_0, t_0 + T]$, имеет математическое ожидание $\mathrm{M}x(t) = 0$, корреляционную функцию $B(\tau)$ и спектральную плотность $F(\omega)$. Непараметрический метод оценивания спектральной плотности основан на вычислении периодограммы

$$f(\omega) = \frac{1}{T}\left|\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt\right|^2 \qquad (1)$$

и последующем вычислении сглаженной спектральной оценки

$$f_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\omega-\lambda)f(\lambda)d\lambda, \qquad (2)$$

где h_1 – спектральное окно. Оценка f_1 может быть определена так же, как преобразование Фурье от сглаженной корреляционной оценки

$$\beta_1(\tau) = 2\pi H_1(\tau)\beta(\tau), \qquad (3)$$

где H_1 – корреляционное окно; β – несглаженная корреляционная оценка:

$$\beta(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|)dt, \qquad |\tau| \le T. \qquad (4)$$

Основная проблема непараметрического оценивания спектральной плотности – это выбор сглаживающего окна h_1 (или H_1), обеспечивающего минимальную среднеквадратическую ошибку спектральной оценки (2) при заданной длине реализации T. Имеется большое число публикаций, в которых исследуются спектральные окна, обеспечивающие при $T \to \infty$ сходимость в среднеквадратическом спектральной оценки (2) к спектральной плотности. Ограничения на спектральные окна, следующие из теории асимптотических оценок, задают не единственную функцию h_1, а некоторое множество функций (или класс сглаживающих спектральных окон). Неоднозначность выбора спектрального окна не осложняет задачу спектрального оценивания на длинных реализациях, поскольку любая функция h_1 из класса сглаживающих окон обеспечивает малое значение среднеквадратической ошибки, вполне удовлетворяющее потребности практики, и проблема оптимизации спектрального окна не имеет практического значения. С уменьшением длины реализации применение неоптимальной функции h_1 может приводить к существенным ошибкам, и проблема выбора оптимальной функции h_1 становится практически актуальной задачей. Это и объясняет большое число различных сглаживающих окон, применяемых в прикладных исследованиях [1, 2].

Спектральная оценка (2) обладает следующим очевидным свойством, отмеченным в [2]. На областях, где спектральная плотность $F(\omega)$ изменяется медленно, имеется возможность выбрать эффективную ширину функции h_1 сравнительно большой и тем самым существенно уменьшить дисперсию оценки f_1 по сравнению с дисперсией периодограммы без риска получить значительное смещение этой оценки. На областях, где $F(\omega)$ изменяется быстро, функция h_1 должна иметь малую эффективную ширину, поскольку в противном случае оценка f_1 может иметь значительное смещение. Такое свойство оценки (2) означает, что для каждого ω выбор своей функции h_1 позволяет существенно снизить ее среднеквадратическую ошибку, поэтому спектральное окно следует рассматривать как функцию двух переменных вида $h(\omega, \lambda)$, а не как функцию одной переменной $h_1(\omega - \lambda)$ в традиционном подходе (2).

В данной работе вводятся линейные спектральные и корреляционные оценки общего вида, для которых спектральные и корреляционные окна – функции двух переменных. Определены соотношения, связывающие спектральные и корреляционные окна, получены уравнения для оптимальных окон и выражения для минимальных среднеквадратических ошибок линейных спектральных и корреляционных оценок. Определены условия, при которых оптимальные спектральные и корреляционные оценки образуют пару преобразований Фурье. Рассмотрены частные случаи линейных оценок, которые сводятся к известным формулам непараметрического спектрального анализа.

Связь между корреляционными и спектральными окнами. Определим линейную корреляционную оценку общего вида

$$\beta_c(\tau) = \int_{-T}^{T} H(\tau, \nu)\beta(\nu)d\nu \qquad (5)$$

и линейную спектральную оценку

$$f_c(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,\lambda)f(\lambda)d\lambda, \tag{6}$$

где $H(\tau,\nu)$, $h(\omega,\lambda)$ – соответственно корреляционное и спектральное сглаживающие окна, причем несглаженные оценки f, β не обязательно определяются формулами (1) и (4).

В соответствии с теоремой Винера – Хинчина спектральная плотность F и корреляционная функция B стационарного случайного процесса образуют пару преобразований Фурье. Отсюда следует ряд известных соотношений, которые определяют свойства одной из функций B, F через свойства другой. Примерами таких соотношений являются равенство Парсеваля [3], значения функций B, F при нулевых аргументах, выражение интервала корреляции через B и F и другие. Эти соотношения имеют существенное значение как в теории, так и в приложениях. Поэтому представляется необходимым наложить дополнительные условия на оценки этих функций, а именно: оценки β_c, f_c (5), (6) должны быть парой преобразований Фурье. Этот вопрос становится нетривиальным для оптимальных оценок, поскольку критерий оптимальности может быть определен независимо для оценок β_c, f_c и представляет собой дополнительные ограничения на функции h, H, которые могут не совпадать или войти в противоречие с условием, при котором β_c, f_c являются парой преобразований Фурье. Отметим, что в традиционном методе корреляционно-спектральных окон [1, 2] функции β, f в (1) и (4) – пара преобразований Фурье и H_1, h_1 – пара преобразований Фурье, поэтому и сглаженные корреляционные, и спектральные оценки (2) и (3) образуют пару преобразований Фурье. В связи с этим можно сформулировать следующее **утверждение**.

1. Если β, f – пара преобразований Фурье и сглаженные оценки β_c, f_c (5), (6) также образуют пару преобразований Фурье, то сглаживающие окна h и H связаны парой преобразований:

$$h(\omega,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} H(\tau,\nu)e^{-i\omega\tau+i\lambda\nu}d\tau d\nu, \tag{7}$$

$$H(\tau,\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega,\lambda)e^{i\omega\tau-i\lambda\nu}d\omega d\lambda. \tag{8}$$

Доказательство. По условию сглаженная корреляционная оценка является преобразованием Фурье от f_c, т. е.

$$\beta_c(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_c(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \tag{9}$$

Подставим сюда соотношение (6), тогда

$$\beta_c(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda h(\omega,\lambda)f(\lambda). \tag{10}$$

Снова согласно условию

$$f(\lambda) = \int_{-T}^{T} \beta(\nu) e^{-i\lambda\nu} d\nu. \tag{11}$$

Подставим (11) в (10) и поменяем порядок интегрирования, тогда

$$\beta_c(\tau) = \int_{-T}^{T} d\nu \beta(\nu) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\lambda h(\omega, \lambda) e^{i\omega\tau - i\lambda\nu}. \tag{12}$$

Из (12) и (5) следует равенство (8). Аналогичными преобразованиями выражения (6) несложно показать, что имеет место соотношение (7). В дальнейшем будет использоваться следующее **утверждение**.

2. Если β, f – пара преобразований Фурье и h, H связаны соотношениями (7), (8), то сглаженные оценки (5), (6) образуют пару преобразований Фурье.

Доказательство этого утверждения выполняется аналогично предыдущему. В соотношение (6) подставляется (7). Перестановкой порядка интегрирования в подынтегральном выражении образуется сначала функция β как преобразование Фурье от f, затем функция β_c согласно формуле (5). Таким образом, имеют место следующие преобразования оценки:

$$f_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, \lambda) f(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda f(\lambda) \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} H(\tau, \nu) e^{-i\omega\tau + i\lambda\nu} d\tau d\nu =$$

$$= \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} d\tau d\nu H(\tau, \nu) e^{-i\omega\tau} \beta(\nu) = \int_{-T}^{T} d\tau \beta_c(\tau) e^{-i\omega\tau}.$$

Аналогично, взяв за основу соотношение (5), можно показать, что β_c является преобразованием Фурье от f_c.

Уравнения для оптимальных окон. Задачу линейного оценивания спектральной плотности и корреляционной функции можно рассматривать как частный случай задачи оптимальной линейной фильтрации в классической постановке Н. Винера, основные положения которой состоят в следующем [4]. Пусть наблюдаемый случайный процесс $x(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t), n(t)$ – случайные процессы, называемые полезным сигналом и помехой. Линейная оценка $s_0(t)$ случайного процесса $s(t)$ определяется соотношением

$$s_0(t) = \int_{t_0}^{t_0 + T} h_0(t, \tau) x(\tau) d\tau, \tag{13}$$

где $h_0(t, \tau)$ – сглаживающее окно. На классе оценок вида (13) находится оптимальная, минимизирующая среднеквадратическую ошибку:

$$\varepsilon_0^2(t) = \mathbf{M}[s_0(t) - s(t)]^2 \to \min_{h_0}. \tag{14}$$

Решением этой задачи является функция $h_0 = h_v$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{M}s(t)x(u) = \int_{t_0}^{t_0+T} h_v(t,\tau)\mathbf{M}x(\tau)x(u)d\tau, \tag{15}$$

оптимальная оценка $s_v(t)$ определяется соотношением (13) при $h_0 = h_v$, а минимальная среднеквадратическая ошибка $\varepsilon_v^2(t)$ – выражением

$$\varepsilon_v^2(t) = \mathbf{M}s^2(t) - \mathbf{M}s_v^2(t) = \mathbf{M}s^2(t) - \mathbf{M}s(t)s_v(t). \tag{16}$$

Известно, что уравнение (15) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы среднеквадратическая ошибка линейной оценки s_0 достигала минимального значения. Доказательства этих условий можно найти в литературе, например, необходимости – в [2] (с. 249) и достаточности – в [4] (с. 215).

Задачу оптимальной линейной фильтрации можно рассмотреть в частном случае для детерминированного полезного сигнала $s(t)$. Можно показать, что и в этом случае уравнение (15) является необходимым и достаточным условием минимума среднеквадратической ошибки, причем доказательства этих условий практически не отличаются от представленных в [2] и [4]. Существенное отличие в уравнении (15) от общего случая состоит в том, что его левая часть $\mathbf{M}s(t)x(u) = s(t)\mathbf{M}x(u)$.

Определим оптимальные функции H, h в соотношениях (5), (6) из условия минимума среднеквадратической ошибки:

$$\mathbf{M}(\beta_c(\tau) - B(\tau))^2 \to \min_{H(\tau,\nu)}, \tag{17}$$

$$\mathbf{M}(f_c(\omega) - F(\omega))^2 \to \min_{h(\omega,\lambda)}. \tag{18}$$

Задача (5), (17) определения оптимального корреляционного окна H совпадает с задачей оптимальной линейной фильтрации при условии, что наблюдаемый процесс – это корреляционная оценка β, а полезный сигнал является детерминированной функцией B. Поэтому в соответствии с уравнением (15) получаем, что оптимальная функция H удовлетворяет уравнению

$$B(\tau)\mathbf{M}\beta(u) = \int_{-T}^{T} H(\tau,\nu)\mathbf{M}\beta(\nu)\beta(u)d\nu. \tag{19}$$

При этом минимальная среднеквадратическая ошибка корреляционной оценки β_c (5) в соответствии с (16) имеет вид:

$$\varepsilon_\beta^2(\tau) = B^2(\tau) - \mathbf{M}\beta_c^2(\tau) = B^2(\tau) - B(\tau)\mathbf{M}\beta_c(\tau). \tag{20}$$

Аналогично задача (6), (18) нахождения оптимального спектрального окна h представляет собой частный случай задачи оптимальной линейной фильтрации, в которой роль наблюдаемого процесса выполняет функция f, а полезного сигнала – детерминированная функция F, поэтому оптимальное окно h определяется уравнением

$$F(\omega)\mathbf{M}f(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\omega,\lambda)\mathbf{M}f(\lambda)f(\nu)d\lambda, \tag{21}$$

а минимальная среднеквадратическая ошибка оценки f_c имеет вид:

$$\varepsilon_f^2(\omega)=F^2(\omega)-\mathbf{M}f_c^2(\omega)=F^2(\omega)-F(\omega)\mathbf{M}f_c(\omega). \tag{22}$$

Связь между оптимальными корреляционными и спектральными окнами. Оптимальные корреляционные и спектральные окна удовлетворяют соответственно уравнениям (19) и (21). Для этих окон имеет место следующее **утверждение**.

3. Если β, f образуют пару преобразований Фурье и функции H и h удовлетворяют уравнениям (19), (21), то H и h связаны между собой соотношениями (7), (8).

Доказательство. По условию функция H удовлетворяет уравнению (19). Выполним в обеих его частях преобразование Фурье по переменной u, тогда

$$B(\tau)\mathbf{M}f(\nu)=\int_{-T}^{T}H(\tau,\nu)\mathbf{M}\beta(\nu)f(\nu)d\nu. \tag{23}$$

Теперь выполним преобразование Фурье по переменной τ, тогда

$$F(\omega)\mathbf{M}f(\nu)=\int_{-T}^{T}d\tau e^{-i\omega\tau}\int_{-T}^{T}d\nu H(\tau,\nu)\mathbf{M}\beta(\nu)f(\nu). \tag{24}$$

По условию β – преобразование Фурье от f. С учетом этого (24) преобразуется в соотношение

$$F(\omega)\mathbf{M}f(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}d\tau d\nu H(\tau,\nu)e^{-i\omega\tau+i\lambda\nu}\right]\mathbf{M}f(\lambda)f(\nu). \tag{25}$$

Функция h в соответствии с условием удовлетворяет уравнению (21). Сравнивая (25) и (21), получаем, что h определяется через H равенством (7).

Аналогично доказывается соотношение (8). Для этого рассматривается уравнение (21). В его обеих частях выполняется преобразование Фурье по переменным ω и ν, затем подстановка f в соответствии с формулой (11). Последующее преобразование и сравнение полученного соотношения с уравнением (19) дает выражение вида (8). Отсюда получаем важное **следствие**.

4. Если β, f – пара преобразований Фурье и H, h – оптимальные окна, удовлетворяющие уравнениям (19), (21), то оптимальные линейные сглаженные оценки β_c, f_c образуют пару преобразований Фурье.

Доказательство этого утверждения следует непосредственно из утверждений 3 и 2.

Для среднеквадратических ошибок (20), (22) оптимальных оценок β_c, f_c, образующих пару преобразований Фурье, с учетом равенства Парсеваля [3] имеет место равенство интегральных ошибок:

$$\int_{-T}^{T} \varepsilon_\beta^2(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_f^2(\omega)d\omega. \tag{26}$$

Спектральный фильтр с постоянными параметрами. При решении прикладных задач применяется более простая зависимость спектрального окна от своих аргументов:

$$h(\omega,\lambda) = h_1(\omega-\lambda). \tag{27}$$

Все примеры спектральных окон, представленных в литературе [1, 2], относятся именно к такому типу. В терминологии задачи линейной фильтрации (6), (18) этот частный случай называется линейным фильтром с постоянными параметрами и, очевидно, имеет важное значение ввиду его широкого применения в прикладных исследованиях. Сравним этот случай с общей задачей линейного оценивания спектральной плотности. Подставим (27) в соотношение (8), тогда

$$H(\tau,\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-i\lambda\nu}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega h_1(\omega-\lambda)e^{i\omega\tau}. \tag{28}$$

Заменим переменную интегрирования ω на z в соответствии с равенством $z=\omega-\lambda$ и введем обозначение

$$H_1(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(z)e^{iz\tau}dz. \tag{29}$$

Тогда после несложных преобразований получаем

$$H(\tau,\nu) = 2\pi H_1(\tau)\delta(\tau-\nu), \tag{30}$$

где δ – дельта-функция. Подстановка (30), (27) в (5) и (6) приводит к известным формулам корреляционно-спектрального анализа (2) и (3).

Рассмотрим оптимальные по минимальной среднеквадратической ошибке оценки (2), (3). Очевидно, что оптимальное спектральное окно удовлетворяет уравнению (21) с заменой спектрального окна общего вида на функцию (27). Таким образом, оптимальное спектральное окно в (2) определяется уравнением

$$F(\omega)\mathbf{M}f(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\omega-\lambda)\mathbf{M}f(\lambda)f(\nu)d\lambda. \tag{31}$$

При этом среднеквадратическая ошибка определяется соотношением (22). Сложнее дело обстоит с оптимальным корреляционным окном H_1. Следует учесть, что критерий (17) заменяется условием

$$\mathbf{M}[2\pi H_1(\tau)\beta(\tau) - B(\tau)]^2 \to \min_{H_1(\tau)}. \tag{32}$$

Оптимальное H_1 определяется из условия равенства нулю производной по H_1 левой части (32), что приводит к выражению

$$2\pi H_1(\tau) = \frac{B(\tau)\mathbf{M}\beta(\tau)}{\mathbf{M}\beta^2(\tau)}. \tag{33}$$

Минимальная среднеквадратическая ошибка $\varepsilon_\beta^2(\tau)$ при использовании оптимального окна (33) находится подстановкой (33) в выражение для ошибки (левая часть (32)). После несложных преобразований получаем

$$\varepsilon_\beta^2(\tau) = B^2(\tau)\left[1 - \frac{(\mathbf{M}\beta(\tau))^2}{\mathbf{M}\beta^2(\tau)}\right]. \tag{34}$$

Соотношения (31) и (33) совпадают с результатами, полученными в [5], в задачах оптимизации спектральных и корреляционных окон оценок вида (2) и (3).

Корреляционный фильтр с постоянными параметрами. Пусть спектральное окно

$$h(\omega,\lambda) = h_2(\omega)\delta(\omega - \lambda), \tag{35}$$

тогда из выражения (8) следует $H(\tau, \nu) = H_2(\tau - \nu)$, где

$$H_2(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_2(z)e^{iz\tau}dz. \tag{36}$$

При этом сглаженные оценки (5) и (6) принимают соответственно вид:

$$\beta_2(\tau) = \int_{-T}^{T} H_2(\tau - \nu)\beta(\nu)d\nu, \tag{37}$$

$$f_2(\omega) = h_2(\omega)f(\omega). \tag{38}$$

Очевидно, условие минимума среднеквадратической ошибки ковариационной оценки (37) сводится к уравнению (19) при $H = H_2$, а спектральной оценки (38) – к оптимальному спектральному окну

$$h_2(\omega) = \frac{F(\omega)\mathbf{M}f(\omega)}{\mathbf{M}f^2(\omega)}. \tag{39}$$

Минимальное значение среднеквадратической ошибки для корреляционной оценки (37) определяется соотношением (20), а для спектральной оценки

(38) – подстановкой (39), (38) в выражение для ошибки, что приводит к равенству

$$\varepsilon_f^2(\omega) = F^2(\omega)\left[1 - \frac{(\mathbf{M}f(\omega))^2}{\mathbf{M}f^2(\omega)}\right]. \qquad (40)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. Вып. 1.
3. **Френкс Л.** Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974.
4. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1975. Т. 2.
5. **Кулешов Е. Л.** Непараметрические спектральные оценки стационарных случайных процессов на конечных реализациях // Автометрия. 1992. № 6. С. 115.

Поступила в редакцию 21 января 1998 г.