

## АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

УДК 516.3

В. И. Козлов, А. Н. Юдин

*(Новосибирск)*ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ГЕОМЕТРИИ  
ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ  
ДЛЯ ЗАДАЧ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Приводится способ описания трехмерной области с внутренней структурой посредством использования теоретико-множественных операций, применяемых к подобластям. На основании теоретико-множественных формул (ТМФ) вводятся трехзначные характеристические функции, определяющие внутреннюю и поверхностную структуры области. Показывается инвариантность ТМФ относительно преобразования смещения граничных поверхностей для области, разбиваемой на выпуклые односвязные полиэдры. Описывается алгоритм построения каркаса области с плоскими гранями.

**Введение.** В настоящее время существуют и развиваются несколько способов трехмерного геометрического моделирования [1]. Наиболее популярными из них являются конструктивное геометрическое моделирование (КГМ) твердых тел и граничное представление (ГП) трехмерных объектов.

Конструктивно-геометрическое моделирование базируется на некотором множестве примитивов и конструктиве (формуле построения) – бинарном дереве построения конструктивной модели из примитивов с использованием теоретико-множественных операций.

Граничное представление основывается на явном описании граничных фигур (являющихся ограниченными частями двумерных поверхностей-носителей), ребер и вершин трехмерного объекта, связанных отношениями инцидентности в некоторый граф смежности. Переход от КГМ к ГП трехмерного объекта напоминает в некотором смысле трансляцию программного языка высокого уровня на низкий и представляется более предпочтительным, чем обратный (от ГП к КГМ). Обратим внимание, что в первом случае речь идет о понижении размерности модели твердого тела (так как фактически ГП оперирует топологическими элементами второй, первой и нулевой размерностей), а во втором – о повышении, что зачастую требует дополнительной информации и больших вычислительных затрат.

Однако и в существующих КГМ-системах теоретико-множественные операции используются лишь на стадии описания твердого тела с целью по-

строения некоторого графа смежности (или матрицы инцидентности) между топологическими элементами поверхности твердого тела, а сама теоретико-множественная формула (ТМФ) в структуре геометрико-топологических данных описываемого объекта отсутствует. Поэтому существующие системы геометрического моделирования (AUTOCAD, ВЕСAD, САТІА) предназначены в основном для инженерных и дизайнерских работ, конечной целью которых является визуальный анализ моделей, расчет метрических и интегральных характеристик моделей и построение видов.

Решение большинства задач математической физики, связанных с динамическими процессами внутри некоей оболочки (например, распространение пучка заряженных частиц в электронно-оптической системе), требует наличия ТМФ на стадии решения проблемы локализации точки в пространстве (определения пространственного положения частицы пучка). Потребность в ТМФ возникает и при оптимизации конструкции моделируемого объекта после некоторого геометрического преобразования его граничных поверхностей.

Если смотреть еще дальше, то наиболее естественным представлением геометрии расчетной области в задачах математической физики является аналитическое описание ее границы [2], для построения которого также требуется теоретико-множественная формула.

В настоящей статье представлен математический аппарат для создания программных визуальных средств геометрического моделирования трехмерной области [3, 4] как для решения традиционных задач, так и с целью автоматического вывода формального описания внутренней и поверхностной структур области, имеющего вид единого аналитического выражения.

В первом разделе статьи приводится способ описания трехмерной области с внутренней структурой посредством использования теоретико-множественных операций, применяемых к ориентированным замкнутым элементарным подобластям [5].

Во втором разделе на основании ТМФ определяются трехзначные характеристические функции. Эти функции используются в алгоритме локализации точки пространства на стадии анализа геометрии модели.

В третьем разделе показывается инвариантность ТМФ относительно преобразования смещения для области, разбиваемой на выпуклые односвязные полиэдры – примитивы, что важно при решении задач оптимизации геометрии моделируемого объекта.

В последнем разделе приводится алгоритм построения каркаса области с плоскими гранями, который наглядно демонстрирует, что ТМФ области полностью описывает ее топологию [1].

**1. Описание геометрии области как композиции подобластей.** В реальных задачах область  $\Omega_0$  и содержащиеся в ней подобласти  $\Omega_n$ , как правило, являются геометрически сложными, в общем случае многосвязными объектами с кусочно-гладкими границами  $|\Omega_n|$ ,  $n=0, N$ . При этом почти всегда  $\Omega_n$  ограничены поверхностями первого и второго порядка, описываемыми неявными уравнениями вида  $F_n(p)=0, t=0, T_n$  ( $T_n$  – количество поверхностей, ограничивающих подобласть  $\Omega_n$ ). Эти аналитические поверхности являются носителями частей границ  $\Delta F_n$  – интерфейсов – и, возможно, фигур на  $|\Omega_n|$  (либо фигур на  $|\Omega_0|$ ), и, кроме того, каждый ориенти-

рованный носитель ограничивает две элементарные замкнутые подобласти из  $R^3$ :

$$F_{n_i}^+ : F_{n_i}(p) \geq 0 \quad \text{и} \quad F_{n_i}^- : F_{n_i}(p) \leq 0.$$

Для определенности будем полагать фиксированной ориентацию носителей, а именно нормаль  $\mathbf{N}_{n_i}(p_0) = \left( \frac{\partial F_{n_i}}{\partial x}, \frac{\partial F_{n_i}}{\partial y}, \frac{\partial F_{n_i}}{\partial z} \right)$  к поверхности  $F_{n_i}$  в точке  $p_0$  направлена в сторону положительного значения функции  $F_{n_i}(p)$ , т. е. во «внутренность» элементарной подобласти  $F_{n_i}^+$ . Переход от положительной элементарной подобласти  $F_{n_i}^+$  к отрицательной  $F_{n_i}^-$  связан с изменением ориентации поверхности  $F_{n_i}$  и выполняется с помощью регуляризованной операции отрицания, определенной в алгебре ориентированных подобластей [5]. Кроме регуляризованного отрицания, в алгебре ориентированных подобластей определены операции объединения (+) и пересечения ( $\cdot$ ), обладающие всеми свойствами аналогичных операций алгебры Буля. Применяя операции пересечения ко множеству элементарных положительных и отрицательных подобластей, получим некоторую составную подобласть  $\Omega_n$ .

В общем случае область  $\Omega_0$  представляет собой композицию элементарных и составных подобластей, полученную в результате применения к ним перечисленных теоретико-множественных операций.

**О п р е д е л е н и е 1.** Определим ТМФ, описывающую подобласть  $\Omega_n$ , как пересечение элементарных ориентированных подобластей  $F_{n_i}^{\pm}$ , индуцированных соответствующими алгебраическими поверхностями:

$$\Omega_n = F_{n_1}^{\pm} \cdot F_{n_2}^{\pm} \cdot \dots \cdot F_{n_n}^{\pm}.$$

Предположим, что область  $\Omega_0$ , которую требуется описать посредством ТМФ, представляет собой внутренность усеченного цилиндра (рис. 1). В терминах алгебры ориентированных подобластей ТМФ области  $\Omega_0$  может быть представлена в виде выражения

$$\Omega_0 = CL1 \cdot PL2 \cdot \overline{PL3}. \quad (1.1)$$

Формально в алгебре ориентированных подобластей благодаря свойству регуляризованной операции отрицания возможен переход от описания

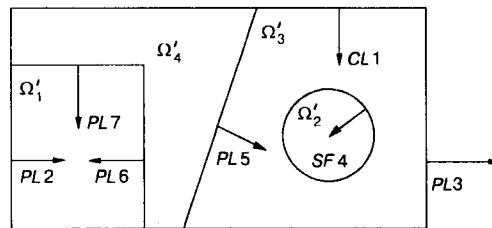


Рис. 1

геометрической структуры области (подобласти) к структуре ее границы (состоящей из фигур и интерфейсов) по формуле

$$|\Omega_n| = \Omega_n \overline{\Omega_n} = \sum_{i=1}^{T'_n} \Delta F_{n_i} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{L_i} F_{n_i}^{\pm}. \quad (1.2)$$

Здесь  $T'_n$  – количество фигур,  $T'_n \geq T_n$  (один носитель может содержать многосвязную фигуру, т. е. среди индексов  $n_i$  могут быть одинаковые);  $L_i$  – число поверхностей, входящих в описание фигуры  $\Delta F_{n_i}$ .

В рассматриваемом случае на основании правил двойного отрицания и де Моргана ( $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ ) имеем

$$\overline{\Omega_0} = \overline{CL1} + \overline{PL2} + \overline{PL3}. \quad (1.3)$$

Тогда

$$|\Omega_0| = \Delta CL1 \cdot (\overline{PL2} \cdot \overline{PL3}) + \Delta PL2 \cdot (\overline{CL1} \cdot \overline{PL3}) + \Delta PL3 \cdot (\overline{CL1} \cdot \overline{PL2}). \quad (1.4)$$

Последующие преобразования выражения вида (1.4) связаны с выделением фигур на носителях, осуществляемым посредством пересечения этих носителей с замыканием соответствующих подобластей. Структура этих подобластей отражена функциональными отношениями в круглых скобках, следующими после идентификаторов рассматриваемых носителей. В частности, видно, что

$$\begin{aligned} \Delta CL1 &\subset \overline{PL2} \cdot \overline{PL3}, \\ \Delta PL2 &\subset \overline{CL1} \cdot \overline{PL3} \subset \overline{CL1}, \\ \Delta PL3 &\subset \overline{CL1} \cdot \overline{PL2} \subset \overline{CL1}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что граница  $|\Omega_0|$  состоит из трех фигур: поверхности цилиндра, лежащей между плоскостями  $PL2$  и  $PL3$ , и двух кусков плоскостей  $PL2$  и  $PL3$ , лежащих внутри цилиндра  $CL1$ .

В свою очередь, из (1.2) следует, что границей фигуры (либо интерфейса)  $\Delta F_{n_i}$  является кусочно-гладкая замкнутая линия  $\delta F_{n_i}$  (состоящая в общем случае из нескольких ветвей), куски которой – части линий пересечения поверхностей  $F_{n_i} = 0$  и  $F_{n_l} = 0, l = 1, L_i, l \neq i$ .

Составление ТМФ подобластей  $\Omega_n$  зачастую упрощается при использовании ТМФ ранее описанных подобластей  $\Omega_m$ , т. е.

$$\Omega'_n = \Omega_m \cdot F_{n_1}^{\pm} \cdot \dots \cdot F_{n_{r_n}}^{\pm} = \Omega_m \cdot \Omega_n, \quad (1.6)$$

где  $\Omega_m = F_{m_1}^{\pm} \cdot \dots \cdot F_{m_{r_m}}^{\pm}$ .

Очевидно, что определение ТМФ (1.6) подобласти  $\Omega'_n$  не противоречит ранее данному определению 1.

При таком подходе подобласти  $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$  и  $\Omega'_4$ , изображенные на рис. 1, описываются выражениями:

$$\begin{aligned}\Omega'_1 &= \Omega_0 \cdot PL6 \cdot PL7 = \Omega_0 \cdot \Omega_1, \\ \Omega'_2 &= \Omega_0 \cdot SF4 = \Omega_0 \cdot \Omega_2, \\ \Omega'_3 &= \Omega_0 \cdot PLS \cdot \overline{SF4} = \Omega_0 \cdot \Omega_3, \\ \Omega'_4 &= \Omega_0 \cdot \overline{\Omega'_1} \cdot \overline{PL5} = \Omega_0 \cdot \Omega_4.\end{aligned}\tag{1.7}$$

На основании формулы (1.2) производится выделение интерфейсов  $|\Omega'_n|$ :

$$\begin{aligned}\Delta PL6 &\subset PL7 \cdot \Omega_0, \\ \Delta PL7 &\subset PL6 \cdot \Omega_0, \\ \Delta SF4 &\subset \Omega_0, \\ \Delta PLS &\subset \overline{SF4} \cdot \Omega_0 \subset \Omega_0.\end{aligned}\tag{1.8}$$

**2. Локализация точки.** Одной из главных задач при построении графа смежности геометрической модели [6] является локализация точки  $p(x, y, z) \in R^3$ . Эта задача решается посредством определения положения исследуемой точки относительно поверхностей, входящих в описание геометрической структуры подобластей  $\Omega_n$  либо структуры границ  $|\Omega_n|$ , и анализа соответствующих трехзначных характеристических  $S$ -функций [7].

**О п р е д е л е н и е 2.** Характеристической  $S$ -функцией элементарной подобласти  $F_{n_i}^\pm$  назовем функцию  $S_{F_{n_i}^\pm}(p): R^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  такую, что

$$\begin{aligned}S_{F_{n_i}^\pm}(p) &= 1, & \text{если } F_{n_i}(p) \geq 0; \\ S_{F_{n_i}^\pm}(p) &= 0, & \text{если } F_{n_i}(p) = 0; \\ S_{F_{n_i}^\pm}(p) &= -1, & \text{если } F_{n_i}(p) \leq 0.\end{aligned}$$

Здесь положительно-ориентированной элементарной подобласти соответствует верхний знак неравенства, отрицательно-ориентированной – нижний.

**Лемма 2.1.** Характеристическая  $S$ -функция подобласти  $\Omega_n$ , описанной по определению 1 соответствующей ТМФ, является « $T_n$ -екцией»  $S$ -функций элементарных подобластей  $F_{n_i}^\pm$  со значениями, определяемыми по правилам:

$$\begin{aligned}S_{\Omega_n}(p) &= 1, & \text{если все } S_{F_{n_i}^\pm}(p) = 1, t = \overline{1, T_n}; \\ S_{\Omega_n}(p) &= -1, & \text{если хотя бы одна } S_{F_{n_i}^\pm}(p) = -1; \\ S_{\Omega_n}(p) &= 0, & \text{если хотя бы одна } S_{F_{n_i}^\pm}(p) = 0, \\ & & \text{а остальные } S_{F_{n_i}^\pm}(p) = 1, t \neq t_0.\end{aligned}$$

Очевидно, что  $S_{\bar{\Omega}_n}(p) = -S_{\Omega_n}(p)$ .

На основании определения 1 каждой ТМФ подобласти  $\Omega_n$  соответствует набор номеров поверхностей со знаками

$$\Omega_n = \pm n_1, \dots, \pm n_n. \quad (2.1)$$

Например, ТМФ (1.1) определяет следующий набор номеров:  $\Omega_0 = 1, 2, -3$ .

**Теорема 2.1.** Точка  $p$  тогда и только тогда принадлежит подобласти  $\Omega_n$ , когда набор знаков в « $T_n$ -екции»  $S$ -функций с индексом  $n$  совпадает с пробным набором знаков функций  $F_n(p)$ ,  $t=1, T_n$ .

Тем самым точка  $p$  тогда и только тогда принадлежит области  $\Omega_0$  из (1.1) (т. е.  $S_{\Omega_0}(p) = 1$ ), когда

$$\left. \begin{aligned} F_{0_1}(p) > 0, \\ F_{0_2}(p) > 0, \\ F_{0_3}(p) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Здесь индекс неявной функции соответствует индексу поверхности в (1.1). При этом, если хотя бы одно из неравенств заменяется равенством нулю, то  $S_{\Omega_0}(p) = 0$  (т. е. точка  $p$  лежит на границе области  $\Omega_0$ ), а если хотя бы одно условие в (2.2) выполняется с точностью «наоборот», то  $S_{\Omega_0}(p) = -1$  (точка  $p$  лежит вне области  $\Omega_0$ ).

**Теорема 2.2.** Точка  $p$  принадлежит подобласти  $\Omega'_n$ , описанной выражением (1.6), и ее  $S$ -функция  $S_{\Omega'_n}(p) = 1$ , если одновременно  $S_{\Omega_n}(p) = 1$  и  $S_{\Omega_0}(p) = 1$ .

Фактически теорема (2.2) является рекурсивным доопределением  $S$ -функции подобласти, описанной как пересечение элементарных и составных подобластей. В частности (см. 1.7), точка  $p \in \Omega'_n \subset \Omega_0$ , если

$$S_{\Omega_n}(p) = 1 \quad \text{и} \quad S_{\Omega_0}(p) = 1. \quad (2.3)$$

Теорема 2.2 позволяет упростить описание вложенных подобластей  $\Omega'_n \subset \Omega_0$ , используя в качестве ТМФ подобластей  $\Omega'_n$  выражения для  $\Omega_n$ .

В случае, когда подобласти  $\Omega_n : \Omega_0 = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n$  не пересекаются (например, подобласти с разными средами), можно утверждать, что точка  $p \in \Omega_l$ ,  $l \in \{1, \dots, N\}$ , если

$$S_{\Omega_n}(p) = 1 \quad \text{и} \quad S_{\Omega_n}(p) = -1 \quad \text{для всех } n \neq l. \quad (2.4)$$

На практике это означает, что одну из подобластей  $\Omega_l$  можно не описывать (например ту, для которой ТМФ имеет наиболее сложный вид, в нашем случае на рис. 1 это  $\Omega'_4$ ), поскольку совместная проверка условий (2.3) и (2.4) при локализации точки в области  $\Omega_0$  позволяет исключить вычисления значений  $S$ -функции подобласти с индексом  $l$ .

**Лемма 2.2.** Характеристическая  $S$ -функция интерфейса  $\Delta F_n$ , являющегося частью внутренней границы  $|\Omega_n|$ , представляет собой « $T_n$ -екцию»

$S$ -функций соответствующих элементарных подобластей  $F_{n_l}^{\pm}$  из (1.2) со значениями, определяемыми по аналогии с леммой 2.1.

**Теорема 2.3.** Точка  $p$  тогда и только тогда принадлежит интерфейсу  $\Delta F_{n_l}$ , когда  $F_{n_l}(p) = 0$  и  $S_{\Delta F_{n_l}}(p) = 1$  (т. е. когда все  $S_{F_{n_l}^{\pm}}(p) = 1$ ,  $l \in \{1, \dots, L_l\}$ ,  $l \neq t$ ).

Доказательство сформулированных лемм и теорем проводится на основании данных определений и является достаточно очевидным.

**3. Инвариантность ТМФ к преобразованию смещения границы области.** Смещением границы области назовем такое геометрическое преобразование, при котором все поверхности-носители границы смещаются от своего начального положения на заданный шаг по нормали. В результате преобразования смещения топология области может измениться (например, когда граница области содержит вершины, образованные пересечением более трех поверхностей). Преобразование смещения, изменяющее топологию области (а значит, и граф смежности границы [6]), назовем неизотопологическим.

**Утверждение.** Для того чтобы ТМФ области  $\Omega_0$  была инвариантна относительно неизотопологического преобразования смещения, необходимо предварительное разбиение области на составные ограниченные выпуклые подобласти  $\Omega_{n_l}$ , сохраняющие в результате преобразования свою топологию, с тем, чтобы использовать последние при описании области в качестве примитивов.

Более строгим является требование, чтобы преобразование смещения было бы преобразованием подобия относительно каждого примитива, на которые предварительно разбивается исходная область. Отметим, что выпуклые полиэдры [8] при преобразовании смещения всегда остаются подобными (или зеркально подобными), поэтому область, ограниченную плоскостями, всегда можно разбить на составные части (полиэдры), сохраняющие свою топологию.

После того как исходная область разбита на составные ограниченные выпуклые подобласти, к последним применяют теоретико-множественные операции, на основании которых выписывается инвариантная ТМФ области.

Покажем инвариантность ТМФ к неизотопологическому преобразованию смещения на примере области, изображенной на рис. 2.

Область  $\Omega_0$  состоит из единичного куба  $\Omega_1$  и призмы  $\Omega_2$ , одна из граней которой проходит через точку с радиус-вектором  $\mathbf{p}_1 = (1,5, 0,5, 0,5)$  перпендикулярно вектору  $\mathbf{N} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (0,5, 0,5, 0,0)$  (точка  $p_2$  задает направление

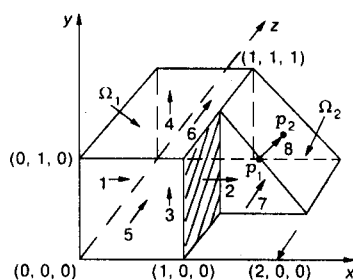


Рис. 2

нормали  $N$ ). Неявное уравнение, описывающее плоскость  $PL8$ , являющуюся носителем этой грани (т. е. фигуры на  $PL8$ ), будет  $F_8 = x + y - 2 = 0$ . Поскольку подобласти  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  при преобразовании смещения не меняют топологии, то ТМФ всей области в инвариантном виде может быть представлена как

$$\Omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2 = -(\overline{\Omega_1} \cdot \overline{\Omega_2}), \quad (3.1)$$

где  $\Omega_1 = PL1 \cdot \overline{PL2} \cdot PL3 \cdot \overline{PL4} \cdot PL5 \cdot \overline{PL6}$ ,  $\Omega_2 = PL2 \cdot \overline{PL8} \cdot PL7 \cdot \overline{PL6} \cdot PL3$ .

Граница области на основании (1.2) будет также описываться инвариантной формулой

$$|\Omega_0| = (\Omega_1 \cdot \overline{\Omega_1}) \cdot \overline{\Omega_2} + (\Omega_2 \cdot \overline{\Omega_2}) \cdot \overline{\Omega_1}. \quad (3.2)$$

Подставляя соответствующие выражения, получаем

$$\begin{aligned} |\Omega_0| = & [\Delta PL1 \cdot (\overline{PL2} \cdot PL3 \cdot \overline{PL4} \cdot PL5 \cdot \overline{PL6}) + \\ & + \Delta PL2 \cdot (PL1 \cdot PL3 \cdot \overline{PL4} \cdot PL5 \cdot \overline{PL6}) + \Delta PL3 \cdot (\dots) + \\ & + \Delta PL4 \cdot (\dots) + \Delta PL5 \cdot (\dots) + \Delta PL6 \cdot (\dots)] \cdot \\ & \cdot (\overline{PL2} + PL8 + \overline{PL7} + PL6 + \overline{PL3}) + \\ & + [\Delta PL2 \cdot (\overline{PL8} \cdot PL7 \cdot \overline{PL6} \cdot PL3) + \\ & + \Delta PL8 \cdot (\dots) + \Delta PL7 \cdot (\dots) + \Delta PL3 \cdot (\dots)] \cdot \\ & \cdot (\overline{PL1} + PL2 + \overline{PL3} + PL4 + \overline{PL5} + PL6). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Инвариантность ТМФ (3.3) покажем на примере описания фигуры  $\Delta PL2$ , так как именно эта фигура в результате преобразования смещения меняет топологию. Итак,

$$\begin{aligned} \Delta PL2 \subset & (PL1 \cdot PL3 \cdot \overline{PL4} \cdot PL5 \cdot \overline{PL6}) \cdot \\ & \cdot (\overline{PL2} + PL8 + \overline{PL7} + PL6 + \overline{PL3}) + \\ & + (\overline{PL8} \cdot PL7 \cdot \overline{PL6} \cdot PL3) \cdot \\ & \cdot (\overline{PL1} + PL2 + \overline{PL3} + PL4 + \overline{PL5} + PL6). \end{aligned} \quad (3.4)$$

После очевидных булевских преобразований выражение (3.4) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta PL2 \subset & \overline{PL4} \cdot PL5 \cdot \overline{PL6} \cdot PL8 + \\ & + PL3 \cdot \overline{PL4} \cdot PL5 \cdot \overline{PL7} + \\ & + \overline{PL8} \cdot PL7 \cdot \overline{PL6} \cdot PL3 \cdot PL4. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что в начальном случае (см. рис. 2) фигура на  $PL2$  фактически описывается вторым слагаемым выражения (3.5), т. е.  $\Delta PL2 \subset PL3 \cdot \overline{PL4} \cdot PL5 \cdot \overline{PL7}$ , тогда как первое слагаемое описывает верхнее ребро фигуры (избыточное описание), а третье – пустое множество.



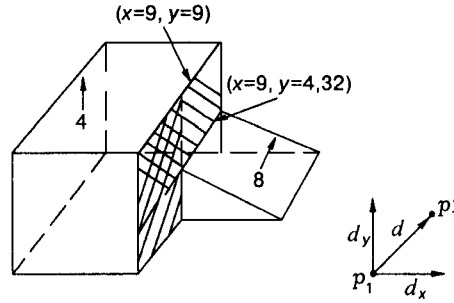


Рис. 3

Теперь рассмотрим случай смещения во вне граничных плоскостей области на заданный шаг по нормальям к плоскостям (на рис. 3 показаны нормали плоскостей, смещение которых приводит к изменению топологии области). Пусть шаг по нормали  $d = 8$ . Тогда  $(p'_1 - p_1)^2 = d^2$ . Поскольку в рассматриваемом случае  $d_x = d_y = d/\sqrt{2}$ , то  $p'_1 = (7,16, 6,16, 0,5)$  и  $F_8 = x + y - 13,32 = 0$ . Здесь  $\Delta PL2 \subset \overline{PL4 \cdot PL5 \cdot PL6 \cdot PL8} + \overline{PL3 \cdot PL4 \cdot PL5 \cdot PL7}$ , где каждому из слагаемых соответствует заштрихованная часть плоскости  $PL2$ . Тем самым значения характеристической функции фигуры  $\Delta PL2$  на некотором пробном наборе точек отличаются от значений характеристической функции для предыдущей фигуры на плоскости  $PL2$  (см. рис. 2).

При смещении вовнутрь граничных плоскостей на шаг по нормали  $d = 0,2$  будем иметь случай, изображенный на рис. 4. Здесь  $p'_1 = (1,36, 0,36, 0,5)$ ,  $F_8 = x + y - 1,716 = 0$  и  $\Delta PL2 \subset \overline{PL3 \cdot PL4 \cdot PL5 \cdot PL7} + \overline{PL8 \cdot PL7 \cdot PL6 \cdot PL3 \cdot PL4}$ . Из последнего выражения следует, что и в этом случае характеристическая функция меняет свои значения на некотором пробном наборе точек.

Итак, несмотря на изменение топологии фигуры на плоскости  $PL2$  при преобразовании смещения, для построения ее характеристической  $S$ -функции используется одна и та же формально выведенная ТМФ (3.5). В дальнейшем полученная (на основании ТМФ фигур (3.3) и ТМФ области (3.1)) совокупность характеристических функций (одна и та же во всех трех случаях) применяется для построения графа смежности границы области  $\Omega_0$ .

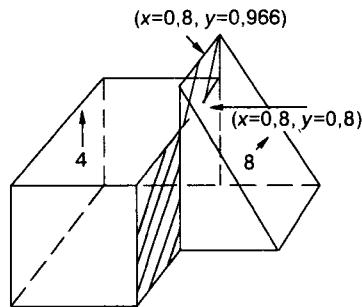


Рис. 4

**4. Построение замкнутого каркаса области.** Под замкнутым каркасом области  $\Omega_0$  здесь понимается совокупность ребер и вершин, составляющих скелет области [6]. Пятишаговый алгоритм построения замкнутого каркаса области, ограниченной плоскостями, имеет простую логическую схему и представляет собой три цикла по всем носителям фигур области (один глобальный и два вложенных). Все пять шагов алгоритма составляют тело глобального цикла, при этом третий и пятый шаги содержат еще и вложенные циклы.

Итак, на первых двух шагах:

1. Вычисляются коэффициенты параметрических уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}_{ij}, \quad i = \overline{1, T}, j \in (1, \dots, T), i \neq j, \quad (4.1)$$

$$T = \sum_{i=1}^{T_n} L_i, u_{ij} \in (-\infty, +\infty),$$

описывающих прямые как линии пересечения  $i$ -й и  $j$ -й плоскостей (исходными данными для вычисления коэффициентов уравнений (4.1) и для проверки условия пересечения плоскостей являются коэффициенты соответствующих неявных уравнений). Здесь плоскости с индексом  $i$  являются носителями фигур из (2.1), а плоскости с индексом  $j$  образуют границы подобластей, содержащих эти фигуры.

2. Определяются координаты точек пересечения прямых (лежащих на  $i$ -м носителе), заданных в форме (4.1), по формулам

$$(x \ y \ z)_{ijj'} = (u \ 1)_{ijj'} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}_{ij}, \quad j \neq j', \quad (4.2)$$

где  $u_{ijj'}$  – решение переопределенной системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{1ij} \cdot u_{ij} + b_{1ij} &= a_{1ij'} \cdot u_{ij'} + b_{1ij'}, \\ a_{2ij} \cdot u_{ij} + b_{2ij} &= a_{2ij'} \cdot u_{ij'} + b_{2ij'}, \\ a_{3ij} \cdot u_{ij} + b_{3ij} &= a_{3ij'} \cdot u_{ij'} + b_{3ij'}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Предварительно проверяются условия пересечения прямых:

$$\begin{aligned} a_{1ij} \cdot a_{2ij'} - a_{1ij'} \cdot a_{2ij} &\neq 0 \quad \text{или} \\ a_{1ij} \cdot a_{3ij'} - a_{1ij'} \cdot a_{3ij} &\neq 0, \quad \text{или} \\ a_{2ij} \cdot a_{3ij'} - a_{2ij'} \cdot a_{3ij} &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Отметим, что условие принадлежности прямых одному носителю

$$\begin{vmatrix} b_{1ij'} - b_{1ij} & b_{2ij'} - b_{2ij} & b_{3ij'} - b_{3ij} \\ a_{1ij} & a_{2ij} & a_{3ij} \\ a_{1ij'} & a_{2ij'} & a_{3ij'} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

не проверяется, поскольку оно выполняется априори. Собственно говоря, условия (4.4) и (4.5) являются условиями разрешимости системы (4.3): решив систему каких-либо двух уравнений, получим значение параметра  $u_{ijj'}$  (третье уравнение удовлетворится).

Заметим, что не все точки, найденные описанным способом, являются вершинами рассматриваемой области. Например, точки, лежащие на  $i$ -м носителе и помеченные на рис. 5 штрихами, не являются вершинами. Однако зная, что каждая вершина должна быть инцидентна хотя бы трем граням (фигурам, лежащим на разных носителях) и помня, что носитель может содержать несколько фигур (см. рис. 5: на  $j$ -м носителе две фигуры), сформулируем следующий шаг алгоритма.

3. Используя соответствующие характеристические функции, установим тип всех точек, лежащих на  $i$ -м носителе. Точки, не являющиеся граничными, в дальнейшем не рассматриваются. Остальные точки проверяются на инцидентность, по крайней мере, еще двум граням. Если обнаружено, что точка инцидентна трем или более граням, то она считается вершиной. Одновременно помечаются прямые, содержащие эту вершину и лежащие на  $i$ -м носителе. На рис. 5 пронумерованы двенадцать вершин, инцидентных  $i$ -му носителю, и помечено девять прямых.

4. Упорядочиваются вершины (по расстоянию между ними), инцидентные одним и тем же прямым  $i$ -го носителя, так, чтобы эти прямые делились на непересекающиеся отрезки. Например, на рис. 5 прямая I делится на отрезки (1, 2), (2, 3) и (3, 4), а прямая VII – на (2, 5), (5, 7) и (7, 9). Ясно, что не все полученные таким образом отрезки являются ребрами строящегося каркаса (из указанных отрезков (2, 3) и (5, 7) – не ребра). Однако очевидное предположение о том, что середина каждого ребра обязательно является граничной точкой, которая, в свою очередь, должна быть инцидентна хотя бы двум граням, позволяет сформулировать очередной шаг алгоритма.

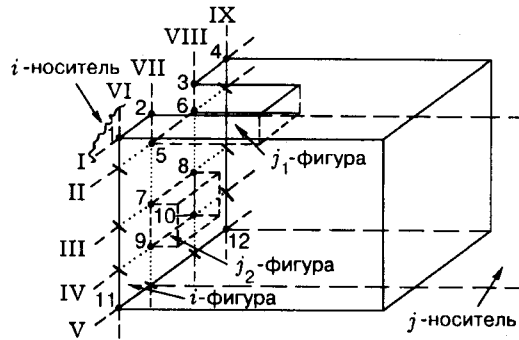


Рис. 5

5. Вычисляются координаты точек, делящих отрезки пополам, и посредством характеристической функции определяется их тип. Для граничных точек проверяется условие их инцидентности хотя бы двум граням. В случае выполнения последнего условия отрезок объявляется ребром, а координаты вершин, инцидентных данному ребру, запоминаются в некотором списке.

**З а м е ч а н и е 1.** При каждом повторе шагов 3–5 точки и отрезки, принадлежащие очередному носителю, проверяются на присутствие в списке ранее выявленных вершин и ребер. Если проверка дает положительный результат, то дополнительный анализ относительно таких точек и отрезков не проводится и в формируемый список ребер они повторно не вносятся.

**З а м е ч а н и е 2.** Наличие криволинейных носителей, ограничивающих область  $\Omega_0$ , не отражается на содержательной части алгоритма построения ее замкнутого каркаса.

В заключение отметим, что, добавив в алгоритм вычисление «звездной» окрестности [6] ребер и вершин (имея в наличии характеристические функции области и фигур это нетрудно сделать), фактически приходим к построению графа смежности границы области  $\Omega_0$ .

**З а к л ю ч е н и е.** Предварительное разбиение моделируемой области на составные ограниченные подобласти, сохраняющие топологию при преобразовании смещения, позволяет записать ТМФ области в инвариантном виде. В свою очередь, на основании инвариантной ТМФ области строится единственный набор характеристических функций, отражающих структуру области и ее границы при любых (имеющих смысл) преобразованиях смещения, в том числе и неизотопологических. Однако в последнем случае структура графа смежности границы области, построенного согласно алгоритму из разд. 4, будет отличаться от исходного, так как некоторые характеристические функции (именно те, которые описывают объекты с изменяющейся топологией) на исходном наборе пробных точек меняют свои значения.

Существенной частью алгоритма построения графа смежности границы области является алгоритм локализации точки  $p(x, y, z) \in R^3$ , который основывается на предикатном описании подобластей, интерфейсов и фигур, представляющих внутреннюю и поверхностную структуры исходной области.

Преобразование геометрической информации в аналитическую накладывает определенные ограничения на способ кодирования геометрической информации и требует разработки специальной структуры данных. Под кодированием геометрической информации здесь понимается задание собственно геометрических параметров ограниченных подобластей – примитивов (указанием положения в пространстве и размеров) и описание топологии модели посредством автогенерации либо в особых случаях посредством формального вывода ТМФ модели, связывающей примитивы в единое целое – трехмерную геометрическую модель. Для облегчения кодирования геометрической информации в настоящее время создана (в среде Delphi) система визуального объемного геометрического моделирования, основанная на объектно-ориентированной структуре данных [3, 4]. Эта система будет использоваться для автоматизации проектирования и расчета трехмерных электронно-оптических и магнитных систем [5].

Дальнейшее развитие системы объемного геометрического моделирования видится в формальном выводе уравнения (имеющего вид единого аналитического выражения) сложного трехмерного объекта по его визуальному представлению, т. е. собственно в решении обратной задачи аналитической геометрии: задан образ (например, чертеж) геометрического объекта, требуется получить его уравнение. Понятно, что, используя уравнение, можно проводить анализ геометрии трехмерного объекта, решая при этом такие проблемы, как дискретизация границы объекта и его внутренности (т. е. генерация различных сеток), учитывать на аналитическом уровне содержащуюся в постановке краевых задач математической физики геометрическую информацию (например, при расчете электронно-оптических систем), визуализировать объект – строить различные плоские проекции и т. д.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wozny M. J., McLaughlin H. W., Encarnacao J. L.** Geometric Modeling for CAD Applications. North-Holland, 1988.
2. **Рвачев В. Л.** Методы алгебры и логики в математической физике. Киев, 1974.
3. **Юдин А. Н.** Система визуального объемного геометрического моделирования. Ч. I. Новосибирск, 1998. (Препр. /РАН. Сиб. отд-ние. ИВМиМГ; 1122).
4. **Юдин А. Н.** Система визуального объемного геометрического моделирования. Ч. II. Новосибирск, 1998. (Препр. /РАН. Сиб. отд-ние. ИВМиМГ; 1134).
5. **Юдин А. Н.** Геометрическое моделирование трехмерных электронно-оптических систем // Труды ВЦ СО РАН. Новосибирск, 1995. Т. III. С. 137.
6. **Rossignac J. R., O'Connor M. A.** A dimension-independent model for pointsets with internal structures and incomplete boundaries // IBM Research Report RC. 14340: IBM Research Division, 1989.
7. **Рвачев В. Л.** Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982.
8. **Препарата Ф., Шеймос М.** Вычислительная геометрия. Введение. М.: Мир, 1989.

*Поступила в редакцию 10 июля 1997 г.*