РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1999

УДК 519.246

О. А. Морозов, С. И. Овсецин, Е. А. Солдатов, В. Р. Фидельман

(Нижний Новгород)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА

Получено аналитическое выражение для спектра сигнала, реализующее метод максимальной энтропии, использование которого снимает существенные трудности, свойственные традиционным алгоритмам спектрального анализа.

Введение. В соответствии с обобщенным гармоническим анализом Винера [1–4] принято считать, что спектр случайного сигнала (процесса) $x(t)$ в дискретном виде определяется следующими эквивалентными выражениями:

$$S(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} R(k)\exp(-i\omega kT), \tag{1}$$

$$S(\omega) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\left\{\frac{1}{(2N+1)}\left|\sum_{k=-N}^{N} x(k)\exp(-i\omega kT)\right|^2\right\}, \tag{2}$$

где $R(k)$ – автокорреляционная функция стационарного процесса, $\mathbf{M}\{\}$ – операция математического ожидания.

Такое определение спектра является вполне справедливым в том случае, если количество слагаемых в соответствующих суммах достаточно велико для того, чтобы можно было считать эти пределы бесконечными. Для этого необходимы большие объемы измеряемых данных. На практике такое условие не всегда может быть выполнено. Одним из примеров, в которых объем данных существенно ограничен, является определение спектров сигналов с применением антенных решеток. Количество элементов антенной решетки, а следовательно, и количество отсчетов автокорреляционной функции всегда ограничено по причинам инженерного характера, поэтому представляется важным использовать имеющиеся данные максимально эффективным образом.

Наиболее известными способами расчета спектров, имеющими более высокую эффективность по сравнению с традиционным гармоническим анализом в случае ограниченных объемов исходных данных, являются метод максимальной энтропии Берга [5] и метод Кейпона [2, 3]. Первый более корректен с точки зрения оптимальности и адекватности использования информации об автокорреляционной функции. Второй уступает методу максимальной энтропии в разрешающей способности и, кроме того, дает оценку спектра, которая не вполне согласуется с имеющимися отсчетами автокорреляционной функции. Однако при этом он более прост в реализации (особенно с помощью аппаратных средств для двух- и трехмерных задач), и это делает его сравнимым по популярности с методом максимальной энтропии.

Основным положительным качеством метода Кейпона, обеспечивающим сравнительную простоту реализации, является его математическое свойство, которое позволяет делать оценку спектра на основе обращения автокорреляционной матрицы. Для обращения этой матрицы с учетом того, что она является теплицевой, существуют быстрые и точные алгоритмы.

Для реализации метода максимальной энтропии мы предлагаем аналогичный по степени простоты вычислительный способ оценки спектра. В работе будет дано другое определение спектра временного ряда, которое отличается от винеровского, и, как это покажет дальнейшее рассмотрение, по-видимому, существенно более конструктивное с точки зрения реальных расчетов спектральной плотности мощности сигналов.

Нами получено выражение для спектральной плотности мощности, аналогичное формуле Берга, но без привлечения вариационного принципа как такового, исходя лишь из предположения, что процесс является гауссовым. Это предположение эквивалентно тому, что плотность распределения для анализируемого процесса имеет максимальную энтропию при условии ограничений, задаваемых имеющимися отсчетами автокорреляционной функции.

При использовании полученного выражения для оценки спектра не требуется вычислять неопределенные множители Лагранжа, что необходимо делать при применении вариационного принципа. Таким образом, снимаются проблемы вычислительного характера, связанные с необходимостью решения нелинейной задачи определения множителей Лагранжа [4, 5]. При вычислении спектральной плотности в соответствии с этим выражением основой вычислительного алгоритма является двукратная инверсия теплицевой матрицы конечной размерности.

Оценка спектральной плотности мощности на основе байесовского подхода. Представим себе некоторый математический генератор синусоид. Пусть этот генератор таков, что после каждого его включения он «испускает» синусоиду с частотой ω и амплитудой A с плотностью вероятности $\rho(A,\omega)$. Математическое ожидание для амплитуды синусоиды с частотой ω определим как спектр сигнала:

$$S(\omega)=\left\langle A^2\right\rangle=\int_0^\infty A^2\rho(A,\omega)dA. \tag{3}$$

Просуммировав все синусоиды, сгенерированные в результате многократного включения такого генератора, мы получим последовательность отсчетов случайного сигнала $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Поставим цель связать между собой плотности распределения $p(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ и $\rho(A,\omega)$. Получив такую связь, мы решим задачу спектрального анализа временного ряда в наиболее общей постановке, т. е. получим возможность вычислять спектр временного ряда исходя из $p(x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

Достаточно очевидно, что вероятностная мера присутствия синусоиды с частотой ω и амплитудой A в спектре должна выражаться следующей формулой:

$$p(A,\omega) = p(A, A\exp(i\omega\Delta t), A\exp(i\omega 2\Delta t), \ldots). \tag{4}$$

В дальнейшем для упрощения записи будем полагать $\Delta t = 1$. Выражение (4) теперь представляет собой функцию двух переменных (а не всех отсчетов случайного сигнала). Для того чтобы придать этой функции смысл распределения вероятностей, следует ввести условие нормировки. Обозначим нормированную функцию плотности распределения вероятности для отсчетов сигнала $\rho(A,\omega)$.

В случае гауссова процесса для большого (в пределе бесконечного) числа отсчетов по определению имеет место соотношение:

$$p(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \exp\left(-\sum_{k,l} H_{kl} x_k x_l^*\right) = \exp(\varphi(x)), \tag{5}$$

где $\varphi(x) = -\sum\limits_{k,l} H_{kl} x_k x_l^*$.

Задача заключается в том, чтобы получить в явном виде квадратичную форму в показателе экспоненты (5) и, таким образом, получить явное выражение для распределения плотности вероятности $\rho(A,\omega)$ временного ряда.

Предположим теперь, что $p(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ определяет стационарный марковский гауссов процесс (временной ряд), информация о котором ограничена конечным набором значений автокорреляционной функции $R_0, R_1, \ldots$ $\ldots, R_N$. Тогда плотность распределения для $N+1$ последовательных отсчетов имеет вид

$$p(x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+N}) = \exp\left(-\sum_{k,l=0}^{N} G_{kl} x_{k+m} x_{l+m}^*\right), \tag{6}$$

где $G_{kl}^{(N+1)}$ – элементы матрицы, обратной автокорреляционной, размерностью $(N+1)\times(N+1)$, т. е.

$$G^{(N+1)} = (R^{(N+1)})^{-1}. \tag{7}$$

Для того чтобы перейти к плотности распределения произвольного числа последовательных отсчетов $M > N$, воспользуемся формулой Байеса для условной вероятности:

$$p(AB) = p(A)p(B \mid A). \tag{8}$$

Учитывая, что мы имеем дело с марковским процессом N-го порядка, из этой формулы приходим к соотношению

$$p(x_0, x_1, \dots, x_{L+1}) = p(x_0, x_1, \dots, x_L)[p(x_{L-N+1}, \dots, x_{L+1})/p(x_{L-N+1}, \dots, x_L)]. \tag{9}$$

Выражение (9) дает возможность находить распределение для $L+2$ последовательных отсчетов исходя из распределения для $L+1$ отсчетов и распределений $N+1$ и N отсчетов. Таким образом, формула Байеса дает рекуррентный способ вычисления плотности распределения вероятностей для любого количества M отсчетов случайного сигнала. Для бесконечно большого количества отсчетов получается формула

$$p(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+N}) =$$
$$= b\exp\left(-\left(\sum_{k,l=0}^{N} G_{kl}^{(N+1)} x_{k+m} x_{l+m}^{*} - \sum_{k,l=0}^{N-1} G_{kl}^{(N)} x_{k+m} x_{l+m}^{*}\right)\right), \tag{10}$$

где b – нормированный множитель.

Сделав подстановку $x_k = A\exp(i\omega k)$ в (10), приходим к следующему выражению:

$$\rho(A,\omega) = b\exp\left[-A^2\left(\sum_{k,l=0}^{N} G_{kl}^{(N+1)}\exp(i\omega(k-l)) - \sum_{k,l=0}^{N-1} G_{kl}^{(N)}\exp(i\omega(k-l))\right)\right]. \tag{11}$$

Выражение (11) представляет собой основу для определения спектральной плотности мощности по формуле (3). В результате получается следующее выражение для спектральной оценки:

$$S(\omega) = \frac{b}{\left[\sum\limits_{k,l=0}^{N} G_{kl}^{(N+1)}\exp(i\omega(k-l)) - \sum\limits_{k,l=0}^{N-1} G_{kl}^{(N)}\exp(i\omega(k-l))\right]^2}. \tag{12}$$

Предлагаемый способ вычисления спектральной плотности мощности применим для анализа марковских случайных процессов. Наиболее эффективным он оказывается в частном случае, когда сигнал представляет собой конечную сумму гармонических составляющих, зашумленных некоррелированной помехой. Наиболее актуальным применение аналитического выражения (12) представляется в случае коротких выборок данных.

Применение к обработке данных малоэлементной антенной решетки. Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрим построение диаграмм направленности пассивных малоэлементных антенных решеток. Известно, что задача определения направления на источник излучения с помощью антенной решетки эквивалентна задаче оценивания пространственного спектра сигнала [6]. Это означает, что разрешающая способность пассивной антенной решетки существенным образом зависит от

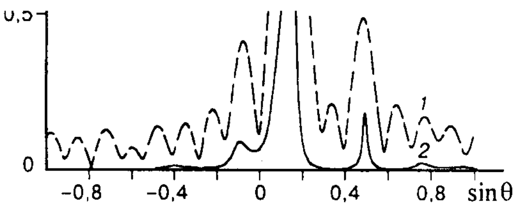

Рис. 1

используемого метода построения спектральной плотности мощности сигнала.

В качестве примера рассмотрены результаты обработки модельного сигнала, представляющего собой сумму четырех плоских волн с разными интенсивностью излучения и направлением волнового вектора, для одномерной 16-элементной пассивной антенной решетки методами преобразования Фурье, Кейпона и двух методов максимальной энтропии. На рис. 1–3 приведены результаты обработки сигнала традиционным методом преобразования Фурье (кривая *1*) и нелинейными методами (кривая *2*). По горизонтальной оси отложены значения синуса угла прихода волны, по вертикальной оси – соответствующие им амплитуды. Для наглядности амплитуды полученных диаграмм нормированы относительно своих максимальных значений. На рис. 1 представлена оценка спектра мощности сигнала методом Кейпона, на рис. 2 – методом максимальной энтропии Берга без итерационного уточнения множителей Лагранжа, описанным в работе [7], на рис. 3 – предлагаемым в данной статье методом максимальной энтропии на основе байесовского подхода.

Все использованные нелинейные методы оценивания спектральной плотности мощности в целом правильно определяют соотношение интенсивностей излучения составляющих сигнал плоских волн, однако существенно различаются по разрешающей способности. Предложенный метод по-

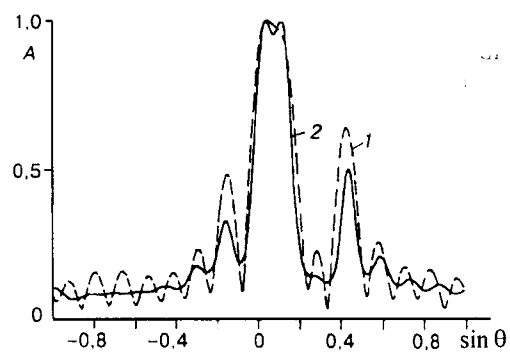

Рис. 2

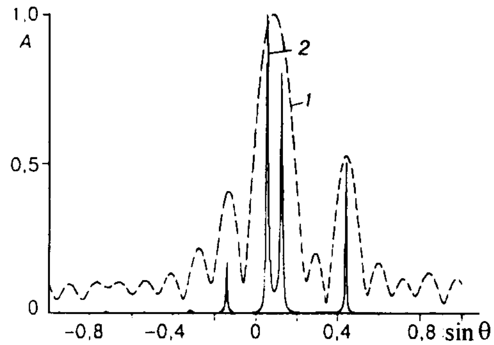

Рис. 3

строения спектра сигналов по ограниченным данным на основе байесовского подхода отличается высокой разрешающей способностью, свойственной методам максимальной энтропии, и при этом обладает высокой вычислительной эффективностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wiener N.** Generalized harmonica analysis // Acta Math. 1930. **55**. P. 117.
2. **Маклеллан Дж. К.** Многомерный спектральный анализ // ТИИЭР. 1982. **70**, № 9. С. 139.
3. **Кей С. М., Марпл-мл. С. Л.** Современные методы спектрального оценивания // ТИИЭР. 1981. **69**, № 11. С. 5.
4. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
5. **Burg J. P.** Maximum entropy spectral analysis // Proc. 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists, 1967.
6. **Джонсон Д. Х.** Применение методов спектрального оценивания к задачам определения угловых координат источников излучения // ТИИЭР. 1982. **70**, № 9. С. 126.
7. **Аратский Д. Б., Морозов О. А., Солдатов Е. А., Фидельман В. Р.** О реконструкции и улучшении качества сигналов теоретико-информационными методами максимальной энтропии // Автометрия. 1991. № 6. С. 97.

Поступила в редакцию 29 апреля 1997 г.