РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1999

УДК 519.24

А. Ж. Абденов

(Новосибирск)

ПОВЫШЕНИЕ ИНФОРМАТИВНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Рассматривается новый подход к решению задачи повышения информативности данных измерений с применением принципа адаптации и D-оптимальной спектральной плотности мощности (СПМ) входного сигнала. Показано, что увеличение информативности измерений на основе оптимизации СПМ дает возможность повысить точность оценок динамических параметров и скорректировать ковариационные матрицы помех начального состояния, динамики объекта и измерителей.

Введение. Любая оптимизация сигнала приводит к изменению спектра исходного сигнала. Обычно это предпринимается с конкретной целью. В данной работе осуществлена попытка определенными вычислительными процедурами и рычагами управления экспериментом повысить точность калмановской фильтрации. Вычислительные процедуры связаны с уточнением всех динамических параметров и характеристик помех на основе данных откликов измерителей, полученных в результате эксплуатации системы в режиме нормального функционирования. Конкретно под управлением эксперимента будем понимать локальное D-оптимальное планирование спектральной плотности мощности (СПМ) входного сигнала, которое максимизирует детерминант информационной матрицы Фишера. При этом оптимизирующий блок вычислительного алгоритма отбирает те наиболее существенные составляющие спектра, которые в совокупности повышают информативность выхода и одновременно исключают такие составляющие гармоники входного сигнала, которые не оказывают или оказывают слабое воздействие на информативность выхода.

Повышение точности динамических параметров позволит окончательно адаптировать ковариационные матрицы помех начального состояния, помех динамики объекта и измерителей. Критерием оптимальности калмановской фильтрации служит свойство обновленной последовательности быть белым процессом [1, 2].

Постановка задачи. Рассматривается линейная стохастическая непрерывно-дискретная динамическая система в форме пространства состояний [3]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \qquad x(t_0) = \bar{x}_0, \tag{1}$$

$$y(t_{k+1}) = Hx(t_{k+1}) + \nu(t_{k+1}), \qquad k = \overline{0, N-1}, \quad t, t_k \in [t_0, t_N], \tag{2}$$

где x – n-мерный вектор переменных состояния; $\bar{x}_0$ – n-мерный вектор оценок математического ожидания случайного вектора $x(t_0)$ с ограниченной неотрицательно-определенной матрицей ковариации $P(t_0)$; u – r-мерный вектор входных сигналов; $\{w(t),\ 0 \le t < N\}$ – белый гауссов процесс с нулевым средним и равномерно ограниченной неотрицательно-определенной матрицей ковариации Q; A, B, H – $(n \times n)$-, $(n \times r)$-, $(m \times n)$-матрицы состояния управления и наблюдения соответственно; y – m-мерный вектор наблюдения объема выборки N; $\{\nu(t_{k+1}),\ t_0 \le t_k < t_N,\ k = \overline{0, N-1}\}$ – белая гауссова последовательность с нулевым средним и равномерно ограниченной положительно-определенной ковариацией R.

Предполагается, что система устойчива, полностью управляема и наблюдаема и входные сигналы ограничены по амплитуде. Порядок модели динамики и порядок модели измерителя заданы, а также задана матрица наблюдения H.

Обозначим через θ p-мерный вектор постоянных идентифицируемых параметров в системе (1), (2), входящих в матрицы A и B. Требуется синтезировать такую D-оптимальную СПМ входного сигнала и на ее основе такой D-квазиоптимальный входной сигнал, чтобы по входу-выходу исследуемого объекта наиболее точно оценить параметры, входящие в матрицы A и B (динамические параметры) и восстановить элементы ковариационных матриц начального состояния, помех динамики объекта и измерителя.

Алгоритм субоптимального оценивания ковариационных матриц и динамических параметров, основанный на пассивных измерениях. Исходя из семейства реализаций объема выборки N, для некоторого эргодического процесса можно оценить ковариационную матрицу помех измерительной системы из соотношения

$$R_0 = \frac{1}{(N_1 - 1)N} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N} (y_i(t_k) - \bar{y}(t_k))(y_i(t_k) - \bar{y}(t_k))^T, \tag{3}$$

где $\bar{y}(t_k)$ – оценка математического ожидания для момента времени $t_k \in [t_0, t_N]$, которую мы можем построить на основе N_1 реализаций, представляющих повторные запуски системы при независимых гауссовых начальных условиях с известным математическим ожиданием $\bar{x}_0$ и неизвестной ковариацией $R(t_0)$:

$$\bar{y}(t_k) = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} y_i(t_k), \qquad k = \overline{1, N}, \quad t_k \in [t_0, t_N]. \tag{4}$$

Осуществим еще один запуск системы для набора данных наблюдений одной реализации (или выберем любую из N_1 реализаций), чтобы иметь возможность оценить динамические параметры в модели (1). Измерения будем осуществлять в моменты времени $t_k \in [t_0, t_N]$, $k = \overline{1, N}$. Теперь оценим дискретные координаты поведения непрерывной динамики объекта из соотношения (2) [4]:

$$\breve{x}(t_k) = (H^T R_0^{-1} H)^{-1} H^T R_0^{-1} y(t_k), \qquad k = \overline{1, N}.$$

Полученную «траекторию» $\{\breve{x}(t_k), k = \overline{1, N}\}$ сгладим с помощью процедуры регуляризирующего сплайна [5]. Обозначим сглаженный процесс через $\{\tilde{x}(t_k),\ k = \overline{1, N}\}$. Если нас не интересуют асимптотические свойства оценок параметров, можно использовать более оперативные подходы с малым уровнем требований к исходной информации. Рассмотрим один из таких подходов.

Пусть начальные оценки динамических параметров, которые обозначим через $a_{ij}^{(0)}$, $b_{ik}^{(0)}$, $i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, r}$, восстановлены на основе метода наименьщих квадратов (МНК); поставим задачу уточнения этих параметров, имея в виду ошибки округлений и другие помехи и оценивая при этом добавки $\Delta a_{ij}, \Delta b_{ik}$, т. е. построим итерационный процесс, позволяющий вычислить все добавки меньше наперед заданного малого положительного δ. Заметим, что поскольку информация о параметрах $\{a_{i1}, \ldots, a_{in}, b_{i1}, \ldots, b_{ir}\}$ каждого i-го уравнения в системе (1) заключена в процессах $\{\dot{x}_i(t), x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_r(t), w_i(t)\}$, то при оценивании этих параметров можно ограничиться i-м уравнением системы (1). Таким образом, задача сводится к рассмотрению скалярного процесса:

$$\dot{x}_i(t) = a_{i1} x_1(t) + a_{i2} x_2(t) + \ldots + a_{in} x_n(t) +$$

$$+ b_{i1} u_1(t) + \ldots + b_{ir} u_r(t) + w_i(t), \qquad x_i(t_0) = x_{i0},\ t \in [t_0, t_N],\ i = \overline{1, n}. \qquad (5)$$

Обозначим функционал для i-го уравнения через J_i, $i = \overline{1, n}$:

$$J_i = \min_{\substack{a_{i1}\ b_{i1} \\ \vdots\ \ \vdots \\ a_{in}\ b_{ir}}} \int_{t_0}^{t_N} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(0)} x_j(t) + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}^{(0)} u_k(t) - \dot{x}_i(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \Delta a_{ij}^{(0)} x_j(t) + \sum_{k=1}^{r} \Delta b_{ik}^{(0)} u_k(t) \right)^2 dt.$$

Выражение внутри скобки обозначим через $J_{i0}^{(\mu)}$. Используя МНК, запишем:

$$\int_{t_0}^{t_N} \frac{\partial J_{i0}^{(\mu)}}{\partial \Delta a_{ij}^{(\mu)}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\mu)} x_j(t) + \sum_{k=1}^{r} b_{ik}^{(\mu)} u_k(t) - \dot{x}_i(t) + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ij}^{(\mu)}x_j(t)+\sum_{k=1}^{r}\Delta b_{ik}^{(\mu)}u_k(t)\Bigg)dt=0, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

$$\int_{t_0}^{t_N}\frac{\partial J_{i0}^{(\mu)}}{\partial \Delta b_{ik}^{(\mu)}}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(\mu)}x_j(t)+\sum_{k=1}^{r}b_{ik}^{(\mu)}u_k(t)-\dot{x}_i(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ij}^{(\mu)}x_j(t)+\sum_{k=1}^{r}\Delta b_{ik}^{(\mu)}u_k(t)\Bigg)dt=0, \qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,r},$$

где μ – номер итерации, $\mu=\overline{1,l}$. На каждом μ-м шаге, оценивая $\Delta a_{ij}^{(\mu)}$, $\Delta b_{ik}^{(\mu)}$, уточняем $a_{ij}^{(\mu)}$, $b_{ik}^{(\mu)}$, пока все эти величины не станут меньше наперед заданного положительного малого δ, характеризующего желаемую точность в процедуре восстановления коэффициентов в (1). Ясно, что процесс $x(t)$ – случайный, гауссов [6]. Если учесть, что оператор дифференцирования по своей физической природе усиливает помехи измерений, то чем выше частота помех, тем больше погрешности. Поэтому, чтобы не определять численно производные $\dot{x}(t)$ в (1) (как в [4]), можно взять интегралы от соотношений в (6) на элементарных интервалах без учета помех динамики. Эта формальная процедура позволяет обойти процедуру вычисления производных. Далее мы можем записать:

$$x_i(t_{k+1})-x_i(t_k)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(\mu)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}x_j(\tau)d\tau+\sum_{l=1}^{r}b_{il}^{(\mu)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}u_l(\tau)d\tau, \quad i=\overline{1,n},\ l=\overline{1,r}. \tag{7}$$

Используя (7), составим систему нормальных уравнений:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\partial J_i}{\partial a_{ij}}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(\mu)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}x_j(\tau)d\tau+\sum_{l=1}^{r}b_{il}^{(\mu)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}u_l(\tau)d\tau-x_i(t_{k+1})+x_i(t_k)\right]=0,$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\partial J_i}{\partial b_{il}}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(\mu)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}x_j(\tau)d\tau+\sum_{l=1}^{r}b_{il}^{(\mu)}\int_{t_k}^{t_{k+1}}u_l(\tau)d\tau-x_i(t_{k+1})+x_i(t_k)\right]=0.$$

Вычисление интегралов на элементарных участках можно выполнить с помощью известных формул численного интегрирования. Если для $x_j(\tau)$ или $u_l(\tau)$ на участках $[t_k, t_{k+1}]$, $k=\overline{0, N-1}$, недостаточно дискретных значений, то при желании можно «заготовить» необходимое число дискретных оценок состояния (с помощью аппарата сплайн-аппроксимации) на этапе сглаживания откликов наблюдения выхода измерительной системы [4, 5].

После восстановления динамических параметров следующей неопределенностью в схеме Калмана является ковариационная матрица помех динамики Q. Для этого соотношение (5) запишем в виде

$$w_i(t)=\dot{x}_i(t)-a_{i1}x_1(t)-a_{i2}x_2(t)-\ldots-a_{in}x_n(t)-$$

$$-b_{i1}u_1(t)-\ldots-b_{ir}u_r(t), \qquad i=\overline{1,n},\ t\in[t_0,t_N].$$

Далее, исходя из того, что $w_i(t)$ – гауссов белый процесс, можно получить следующую предварительную оценку для ковариационной матрицы помех динамики [6]:

$$Q_{ii}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}w_i^2(t_k), \qquad i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

На основании (8) можно получить ковариацию в виде диагональной матрицы. Обозначим эту матрицу через $\widetilde{Q}_0$. После восстановления оценок динамических параметров и ковариационной матрицы помехи динамического процесса можно восстановить и ковариационную матрицу начального состояния (при условии, что процесс устойчивый) из следующих рекуррентных соотношений [4]:

$$\dot{P}_0^{(k)}=AP_0^{(k)}+P_0^{(k)}A^T+\widetilde{Q}_0, \qquad P_0^{(0)}=0, \tag{9}$$

$$P_0^{(k+1)}=P_0^{(k)}+\dot{P}_0^{(k)}\Delta t. \tag{10}$$

Здесь Δt – шаг дискретизации, который связан с вычислением переходной матрицы F для модели динамики, представленной в конечно-разностном виде [7, 8]:

$$F=\exp\{A\Delta t\}. \tag{11}$$

В работе [7] получены ограничения на шаг дискретизации для линейных дифференциальных уравнений, при выполнении которых устойчивому дифференциальному уравнению (1) будет соответствовать устойчивое разностное уравнение. Условия эти таковы:

$$\Delta t<-\frac{2\operatorname{Re}[\lambda_i]}{|\lambda_i|^2}, \qquad i=\overline{1,n},$$

где λ_i – собственные значения матрицы A.

Теперь можно оценить ковариационную матрицу помех динамики Q_{ii} для дискретного фильтра, исходя из соотношения [6]:

$$P_0^{(k+1)}=FP_0^{(k)}F^T+Q_0, \qquad P_0^{(0)}=0, \tag{12}$$

откуда

$$Q_0=P_0^{(k+1)}-FP_0^{(k)}F^T. \tag{13}$$

Известно [1], что только обновленное представление системы (1), (2), вычисленное на основе фильтрационных оценок по схеме Калмана, идентифицируемо. Обозначим оценки предсказания и фильтрации вектора состояния через $\hat{x}(t_k\mid t_{k-1})$ и $\hat{x}(t_k\mid t_k)$ соответственно:

$$\hat{x}(t_k\mid t_{k-1})=E[x(t_k\mid y(t_1),\ldots,y(t_{k-1}))],$$

$$\hat{x}(t_k\mid t_k)=E[x(t_k\mid y(t_1),\ldots,y(t_k))],$$

а нормализованную обновленную последовательность – через $\gamma(t_k)$:

$$\gamma(t_k) = (HPH^T + R)^{-1/2}(y(t_k) - H\hat{x}(t_k \mid t_{k-1})),$$

где

$$P(t \mid t_{k-1}) = E[(x(t) - \hat{x}(t_k \mid t_{k-1}))(x(t) - \hat{x}(t_k \mid t_{k-1}))^T],$$

$$P(t_k \mid t_k) = E[(x(t_k) - \hat{x}(t_k \mid t_k))(x(t_k) - \hat{x}(t_k \mid t_k))^T].$$

Приведем теперь сводку соотношений калмановской фильтрации для системы (1), (2) [3, 9]:

$$\dot{\hat{x}}(t \mid t_k) = A\hat{x}(t \mid t_k) + Bu(t), \qquad x(t_0) = \bar{x}_0,$$

$$\dot{P}(t \mid t_k) = AP(t \mid t_k) + P(t \mid t_k)A^T + \tilde{Q}_0, \qquad P(t_0) = P_0,$$

$$\Sigma(t_{k+1}) = (HP(t_{k+1} \mid t_k)H^T + R_0)^{1/2},$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1})H^T\Sigma^{-1}(t_{k+1}), \tag{14}$$

$$\hat{y}(t_{k+1} \mid t_k) = H\hat{x}(t_{k+1} \mid t_k),$$

$$\gamma(t_{k+1}) = \Sigma^{-1}(t_{k+1})(y(t_{k+1}) - \hat{y}(t_{k+1} \mid t_k)),$$

$$\hat{x}(t_{k+1} \mid t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1} \mid t_k) + K(t_{k+1})\gamma(t_{k+1}),$$

$$P(t_{k+1} \mid t_{k+1}) = P(t_{k+1} \mid t_k) + K(t_{k+1})\Sigma^{-1}(t_{k+1})HP(t_{k+1} \mid t_k),$$

где $t_k \le t \le t_{k+1}$, $k = \overline{0, N-1}$. Алгоритм непрерывно-дискретной фильтрации начинает работать при начальных условиях: $x(t_0) = \hat{x}(t_0 \mid t_0) = \bar{x}_0$, $P(t_0) = P(t_0 \mid t_0) = P_0$.

Вновь полученные оценки должны пройти проверку на оптимальность. Идеология такой проверки относительно характеристик помех динамики объекта и измерителя приведена и обоснована в работах [1] и [2]. Она основана на свойстве обновленной последовательности быть белым процессом для оптимального фильтра. При этом строится автокорреляционная функция обновленной последовательности (АКФ ОП):

$$\hat{C}_k = \frac{1}{N}\sum_{\tau=k}^{N} \nu(t_\tau)\nu^T(t_{\tau-k}). \tag{15}$$

Для наглядности вычисляются нормализованные оценки АКФ ОП ρ_k, которые получаются с помощью разделения элементов оценок матрицы C_k на элементы матрицы $\hat{C}_0$, т. е. $[\hat{\rho}_k]_{ij} = \dfrac{[\hat{C}_k]_{ij}}{\{[\hat{C}_0]_{ii}[\hat{C}_0]_{jj}\}^{1/2}}$. Проверка состоит в анализе множества значений для $[\hat{\rho}_k]_n$, $k > 0$. При этом проверяется число элементов ρ_k, лежащих вне полосы $\pm 1{,}96/\{N^{1/2}\}$. Если это число меньше 5 % по всей глубине памяти (в данном случае $\tilde{n}$, $k = 1, 2, \ldots, \tilde{n}$), то обновленный процесс белый и можно сделать вывод, что фильтр оптимальный и оценки R_0, Q_0 в достаточной степени точны. Если искомое число элементов, лежащих вне полосы $\pm 1{,}96/\{N^{1/2}\}$, больше 5 % по отношению к числу $\tilde{n}$, то фильтр субоптимальный и ковариационные матрицы R_0 и Q_0 должны подвергнуться процедуре переоценки. Попутно заметим, что проверка применима в случае достаточно больших значений объема выборки N, в противном случае автор работы [2] предлагает использовать подходы из [10, 11].

Вся методика уточнения оценок R и Q применима при условии, что число неизвестных в Q меньше чем $n \times m$. Если число неизвестных в Q больше чем $n \times m$, предлагаемая выше методика адаптивной корректировки оценки Q не дает достаточного числа соотношений для оценивания неизвестных элементов ковариационной матрицы помех динамики, и тогда можно применить процедуру оценивания матрицы усиления Калмана с помощью итеративного алгоритма, описанного в [2]. Знание матрицы усиления Калмана K_{opt} позволит восстановить соответствующую ей ковариационную матрицу P_{opt} помех динамики для дискретного фильтра, с помощью которой можно восстановить ковариационную матрицу P_f ошибок фильтрационных оценок состояния:

$$P_f = P_{\text{opt}} - K_{\text{opt}} H P_{\text{opt}}. \tag{16}$$

Используя соотношения для ковариационных матриц ошибок оценок предсказания и фильтрации, можем восстановить значения ковариационной матрицы помех динамики:

$$Q_0 = P_{\text{opt}} - F P_f F^{t}. \tag{17}$$

Соотношение (12) позволяет восстановить (для устойчивой системы) конечный ряд из ковариационных матриц начального состояния $\{P_0^{(0)}, P_0^{(1)}, \ldots$ $\ldots, P_0^{(m)}\}$, а затем оценить усредненную производную, исходя из соотношения (10):

$$\dot{P}_0^{(m)} = (P_0^{(m)} - P_0^{(m-1)})/\Delta t. \tag{18}$$

Используя матричное дифференциальное уравнение для вычисления ковариационной матрицы ошибок оценок предсказания состояния, можно вычислить ковариационную матрицу помех динамики для дифференциальной модели динамики процесса:

$$\tilde{Q}_0 = \dot{P}_0^{(m)} - A P_0^{(m)} - P_0^{(m)} A^{T}. \tag{19}$$

После пересчета всех динамических параметров и характеристик помех начального состояния, динамики объекта и измерителя мы должны повторить процедуру проверки оптимальности фильтра. Если фильтр оптимальный, то процесс проектирования модели динамики объекта заканчивается. В противном случае мы имеем возможность применить аппарат планирования уточняющего эксперимента, в частности спланировать входной сигнал для повышения чувствительности измерений по отношению к динамическим параметрам [12].

Критерий оптимизации и вычисление информационной матрицы Фишера. Для повышения чувствительности измерений при оценивании параметров θ можно применить аппарат планирования эксперимента на основе критерия D-оптимальности в частотной области [12, 13]:

$$J = \det M,$$

где M – информационная матрица Фишера (ИМФ).

Все векторные функции, входящие в уравнения фильтра Калмана, представим соответственно в форме выражений ряда Фурье. Известно [14], что процедура, использующая преобразования Фурье, была бы осуществима, если бы имелась возможность определить усреднение по ансамблю значений квадратов модулей преобразований Фурье всех (или хотя бы некоторых) реализаций случайного процесса. Однако в силу того, что наблюдаемой оказывается только одна реализация, такой подход неприемлем. Поэтому, чтобы реализовать оптимальные алгоритмы функционирования систем обработки данных измерений, наиболее простой и зачастую оправданный подход с точки зрения корректности преобразований связан с предположением о том, что анализируемый случайный процесс является эргодическим. В этом случае имеется возможность оценить различные параметры случайного процесса с помощью процедур временного усреднения. Например, представляется возможным оценить корреляционную функцию на основе одной реализации случайного процесса. Преобразование Фурье этой оценки будет выражением для оценки спектральной плотности мощности.

Далее отметим еще одно ограничение. Для случайных усеченных [14] последовательностей ряд Фурье в среднеквадратическом смысле должен удовлетворять требованию [13]:

$$E\left| x(t_k) - \sum_{m=0}^{N} \tilde{x}(n) z_n^k \right|^2 = 0.$$

Для простоты допустим $T = 2\pi$, тогда $\Delta\omega = \frac{2\pi}{E} = 1$; далее с помощью уравнений фильтра Калмана [4] и преобразований Фурье [14] будем иметь:

$$jn\tilde{x}(n) - x(t_0) - K\tilde{\gamma}(n) = A\tilde{x}(n) + B\tilde{u}(n), \qquad (20)$$

$$\tilde{y}(n) = H\tilde{x}(n) + \Sigma\tilde{\gamma}(n), \qquad (21)$$

или

$$\tilde{x}(n) = H(jnI - A)^{-1} x(t_0) + (jnI - A)^{-1} B\tilde{u}(n) + (jnI - A)^{-1} K\tilde{\gamma}(n). \qquad (22)$$

Подстановка (22) в (21) даст нам следующее соотношение:

$$\tilde{y}(n) = H(jnI - A)^{-1}x(t_0) + H(jnI - A)^{-1}B\tilde{u}(n) +$$
$$+[H(jnI - A)^{-1}K + \Sigma]\tilde{\gamma}(n), \tag{23}$$

или

$$\tilde{y}(n) = T_0(n,\theta)x(t_0) + T_1(n,\theta)\tilde{u}(n) + T_2(n,\theta)\tilde{\gamma}(n). \tag{24}$$

Так как уравнения фильтра Калмана обратимы [6], то матрица $T_2(n,\theta)$ несингулярна и можно из уравнения (24) получить выражение для $\tilde{\gamma}(n)$:

$$\tilde{\gamma}(n) = T_2^{-1}(n,\theta)[\tilde{y}(n) - T_0(n,\theta)x(t_0) - T_1(n,\theta)\tilde{u}(n)] =$$
$$= T_3(n,\theta)\tilde{\gamma}(n) - T_4(n,\theta)\tilde{u}(n) - T_5(n,\theta)x(t_0), \tag{25}$$

где

$$T_0(n,\theta) = H(jnI - A)^{-1},$$
$$T_1(n,\theta) = H(jnI - A)^{-1}B,$$
$$T_2(n,\theta) = H(jnI - A)^{-1}K + \Sigma,$$
$$T_3(n,\theta) = T_2^{-1} = [H(jnI - A)^{-1}K + \Sigma]^{-1},$$
$$T_4(n,\theta) = T_2^{-1}(n,\theta)T_1(n,\theta) = T_2^{-1}(n,\theta)H(jnI - A)^{-1}B,$$
$$T_5(n,\theta) = T_2^{-1}(n,\theta)T_0(n,\theta) = T_2^{-1}(n,\theta)H(jnI - A)^{-1}.$$

Предположим, что периодические функции имеют период N. Если $N \to \infty$, $\gamma(t_k)$ стремится к стационарному процессу. Последовательность $\tilde{\gamma}(n) = \tilde{\gamma}^R(n) + j\tilde{\gamma}^I(n)$, включающая действительную часть $\tilde{\gamma}^R(n)$ и мнимую часть $\tilde{\gamma}^I(n)$, является комплексной гауссовой белой последовательностью со свойствами:

$$E[\tilde{\gamma}^R(n)] = E[\tilde{\gamma}^I(n)] = 0, \tag{26}$$

$$E\left\{\begin{bmatrix}\tilde{\gamma}^R(n)\\ \tilde{\gamma}^I(n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\gamma}^R(n)\\ \tilde{\gamma}^I(n)\end{bmatrix}^T\right\}^R = \frac{1}{2N}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\delta_{n,k}, \tag{27}$$

где

$$\delta_{n,k} = \begin{cases}1, & n = k,\\ 0, & n \neq k\end{cases}$$

и I – единичная матрица размером $n \times n$. Далее имеем [13, 15]:

$$E[\tilde{\gamma}(n)\tilde{\gamma}^*(n)] = \frac{1}{N} I.$$

Здесь символ * обозначает транспонирование и комплексное сопряжение, а Re (далее по тексту) – действительную часть.

Логарифм функции правдоподобия $L(\theta)$ может быть записан как

$$L(\theta) = -\frac{N}{2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\gamma}^*(n)\tilde{\gamma}(n) - N \log|\Sigma| - \frac{N}{2} \log(2\pi). \tag{28}$$

Элементы ИМФ определяются из выражения

$$M_{ij} = -E_{Y|\theta} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \right]_{\theta=\theta_0}, \qquad i, j = \overline{1, p}, \tag{29}$$

где $E_{Y|\theta}$ – математическое ожидание, которое вычисляется относительно пространства наблюдений (выборок) $Y(t) = \{y(t_k),\ u(t_k),\ t_k \in [t_0, t_N],\ k = \overline{0, N}\}$, и θ_0 – априорная оценка параметра θ [2]. Из (28) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} L(\theta) = -N \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\tilde{\gamma}^*(n) \frac{\partial\tilde{\gamma}(n)}{\partial\theta_i} \right] - N \operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1} \frac{\partial\Sigma}{\partial\theta_i} \right), \qquad i = \overline{1, p}. \tag{30}$$

Выражение (25) позволяет записать следующее соотношение:

$$\frac{\partial\tilde{\gamma}(n)}{\partial\theta_i} = \frac{\partial T_3}{\partial\theta_i} \tilde{y}(n) - \frac{\partial T_4}{\partial\theta_i} \tilde{u}(n) - \frac{\partial T_5}{\partial\theta_i} x(t_0). \tag{31}$$

Так как $u(t_k)$, $x(t_0)$ и $\gamma(t_k)$ взаимно некоррелированы (свойство фильтра Калмана), $\tilde{u}(n), x(t_0)$ и $\tilde{\gamma}(n)$ также некоррелированы. Подготовим промежуточные соотношения:

$$E\left[\frac{\partial\tilde{\gamma}^*(n)}{\partial\theta_i} \frac{\partial\tilde{\gamma}(n)}{\partial\theta_j} \right] = \operatorname{tr}\left[E\left[\frac{\partial\tilde{\gamma}(n)}{\partial\theta_j} \frac{\partial\tilde{\gamma}^*(n)}{\partial\theta_i} \right] \right] = \operatorname{tr}\left[E\left[\left(\frac{\partial T_3}{\partial\theta_j} \tilde{y}(n) - \frac{\partial T_4}{\partial\theta_j} \tilde{u}(n) - \frac{\partial T_5}{\partial\theta_j} x(t_0) \right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\tilde{y}^*(n) \frac{\partial T_3^*}{\partial\theta_i} - \tilde{u}^*(n) \frac{\partial T_4^*}{\partial\theta_i} - x(t_0) \frac{\partial T_5^*}{\partial\theta_i} \right) \right] \right]. \tag{32}$$

Пусть

$$E[\tilde{u}(n)\tilde{u}^*(n)] = \frac{1}{N} S_{uu}. \tag{33}$$

Преобразование Фурье для усеченного входа $\{u_T(t), t \in [t_0, t_N], \ T = t_N - t_0\}$ имеет вид

$$F\{u(t)\} = \widetilde{u}(n) \approx \int_{t_0}^{t_N} u_T(t)\exp[-jnt]dt, \qquad T < \infty. \tag{34}$$

Далее,

$$\lim_{T \to \infty} \frac{E[\widetilde{u}(n)\widetilde{u}^{*}(n)]}{T} = S_{uu},$$

где S_{uu} – спектральная плотность входного сигнала, которую можно вычислять, используя взаимосвязь ее с корреляционной функцией $R_u(k\Delta t)$ [14]:

$$\hat{R}_u(k\Delta t) = (M - k + 1)^{-1} \sum_{l=0}^{M-k} u_l u_{l+k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{35}$$

Так как на практике корреляционная функция оценивается только для дискретных моментов τ, необходимо выполнить дискретную аппроксимацию преобразования Фурье. При использовании прямоугольного окна оценка спектральной плотности

$$S_{uu}(n) = \Delta t \left[\hat{R}_u(0) + 2\sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}_u(k\Delta t)\cos\frac{nk\pi}{N} + \hat{R}_u(N\Delta t)\cos(n\pi) \right], \tag{36}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. При использовании окна Хэмминга соответствующая оценка имеет вид [14]:

$${}_h\hat{S}_{uu}(n\Delta\omega)\Big|_{\Delta\omega=1} = {}_h\hat{S}_{uu}(n\Delta\omega) = 0{,}54\hat{S}_{uu}(n) + 0{,}23\{\hat{S}_{uu}(n+1) + \hat{S}_{uu}(n-1)\}. \tag{37}$$

Из (24) имеем:

$$E[\widetilde{y}(n)\widetilde{y}^{*}(n)] = E[(T_0 x(t_0) + T_1\widetilde{u}(n) + T_2\widetilde{v}(n))(x^T(t_0)T_0^{*} +$$

$$+ \widetilde{u}^{*}(n)T_1^{*} + \widetilde{v}^{*}(n)T_2^{*})] = T_0 P(t_0)T_0^{*} + \frac{1}{N}[T_1 S_{uu} T_1^{*} + T_2 T_2^{*}], \tag{38}$$

$$E[y(n)u(n)] = E[(T_0 x(t_0) + T_1 u(n) + T_2\gamma(n))u(n)] = \frac{1}{N} T_1 S_{uu}, \tag{39}$$

$$E[\widetilde{u}(n)\widetilde{y}^{*}(n)] = \frac{1}{N} S_{uu} T_1^{*}, \tag{40}$$

$$E[\widetilde{y}(n)x^T(t_0)] = E[(T_0 x(t_0) + T_1\widetilde{u}(n) + T_2\widetilde{\gamma}(n))x^T(t_0)] = T_0 P(t_0), \tag{41}$$

$$E[x(t_0)\widetilde{y}^{*}(n)] = P(t_0)T_0^{*}. \tag{42}$$

Возьмем вторую производную из соотношения (31):

$$\frac{\partial^2 \tilde{\gamma}(n)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\frac{\partial T_3}{\partial\theta_i}\tilde{y}(n) - \frac{\partial T_4}{\partial\theta_i}\tilde{u}(n) - \frac{\partial T_5}{\partial\theta_i}\tilde{y}(t_0) \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial\theta_j \partial\theta_i} T_0 - \frac{\partial^2 T_5}{\partial\theta_j \partial\theta_i} \right) x(t_0) + \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial\theta_j \partial\theta_i} T_1 - \frac{\partial^2 T_4}{\partial\theta_j \partial\theta_i} \right) \tilde{u}(n) + \frac{\partial^2 T_3}{\partial\theta_j \partial\theta_i} T_2 \tilde{\gamma}(n) \tag{43}$$

и с помощью (30) получим соотношение для второй производной от функции правдоподобия:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_i \partial\theta_j} = -N\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\partial\tilde{\gamma}^*(n)}{\partial\theta_j}\frac{\partial\tilde{\gamma}(n)}{\partial\theta_i} \right] - N\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\tilde{\gamma}^* \frac{\partial^2\tilde{\gamma}(n)}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \right] +$$

$$+ N\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta_j}\Sigma^{-1}\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta_i} \right) - N\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \right).$$

Подставляя (32), (33), (38)–(43) в (29), окончательно запишем:

$$M_{ij} = -E\left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \right\} = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\mathrm{tr}\left(\frac{\partial T_3}{\partial\theta_j}(T_1 S_{uu}(n) T_1^* + T_2 T_2^* + N T_0 P(t_0) T_0^*)\frac{\partial T_3^*}{\partial\theta_i} \right) - \right.$$

$$- \mathrm{tr}\left(\frac{\partial T_3}{\partial\theta_j} T_1 S_{uu}(n)\frac{\partial T_4^*}{\partial\theta_i} \right) - \mathrm{tr}\left(\frac{\partial T_3}{\partial\theta_j} T_0 P(t_0)\frac{\partial T_5^*}{\partial\theta_i} \right) -$$

$$- \mathrm{tr}\left(\frac{\partial T_4}{\partial\theta_j} S_{uu}(n) T_1^* \frac{\partial T_3^*}{\partial\theta_i} \right) - \mathrm{tr}\left(\frac{\partial T_4}{\partial\theta_j} S_{uu}(n)\frac{\partial T_4^*}{\partial\theta_i} \right) -$$

$$\left. - \mathrm{tr}\left(\frac{\partial T_5}{\partial\theta_j} P(t_0) T_0^* \frac{\partial T_3^*}{\partial\theta_i} \right) \right] - \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial\theta_j\partial\theta_i} T_2 \right) -$$

$$- N\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta_j}\Sigma^{-1}\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta_i} \right) + N\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\theta_j \theta_i} \right). \tag{44}$$

С помощью соотношения (44) можно вычислять ИМФ, а значит, и выполнять процедуру оптимизации СПМ входного сигнала для повышения информативности измерений.

Известные свойства ИМФ позволяют построить следующий алгоритм синтеза D-оптимальных планов [13, 16].

Алгоритм синтеза *D*-оптимальных планов для линейных динамических систем.

А. Начинаем с некоторого плана F_0 (понятие плана описано в [16]) такого, что $\overline{M}(F_0)$ не вырождена. Пусть $k = 0$.

Б. Вычисляем $D_k = \mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{p} P_{ij}(F_k)A_{ij}(\omega)$ и определяем максимальное собственное число $\lambda^k_{\max}(\omega)$. Находим $\omega_k \in [-\pi, \pi]$ с помощью одномерного поиска таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\lambda^k_{\max}(\omega_k) \geq \lambda_{\max}(\omega). \tag{45}$$

Здесь $P_{i,j}$ есть (i,j)-й элемент $\overline{M}^{-1}$, $A_{ij} = \frac{\partial T_1^*}{\partial\theta_i} T_2^{*-1} T_2^{-1} \frac{\partial T_1}{\partial\theta_j}$.

В. Вычислим также собственный вектор $\psi^k_{\max}$. Если

$$\lambda^k_{\max}(\omega_k) = \mathrm{tr}[\overline{M}^{-1}(F_k)W(F_k)], \tag{46}$$

то вычисления прекращаются, в противном случае переходим к следующему шагу.

Г. Модернизируем план согласно выражению

$$F_{k+1} = (1-\alpha_k)F_k + \alpha_k F(\omega_k)\delta(\omega-\omega_k), \tag{47}$$

где $F(\omega_k)$ есть план в единственной точке $\omega = \omega_k$, его характеристикой служат величина $\psi^k_{\max}$ $(\psi^k_{\max})^T$ и информационная матрица одноточечного плана в частотной области:

$$\overline{M}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\begin{bmatrix} \frac{\partial T^*(\omega)}{\partial\theta_1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \frac{\partial T^*(\omega)}{\partial\theta_m} \end{bmatrix} S_{m}^{-1}(\omega)\left[\frac{\partial T(\omega)}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial T(\omega)}{\partial\theta_m}\right]. \tag{48}$$

Д. Переходим к $(k+1)$-й итерации и возвращаемся на шаг Б.

Синтез D-оптимального эксперимента, по сути, есть выбор частоты ω и собственного вектора Ψ, соответствующего максимальному собственному значению, и выбор плана входного спектра. Функция выигрыша есть скалярная норма информационной (дисперсионной) матрицы.

Таким образом, изменение плана за счет включения новой частоты приводит к следующей интерпретации: значение спектральной плотности в точке $\omega = \omega_k$ увеличивается. Для других частот $(\omega \neq \omega_i)$ значения спектральной плотности уменьшаются, в результате в спектре значащими будут только те величины, которые соответствуют частоте (частотам) ω_k. При этом коэффициент обновления α_k $(0 < \alpha_k \leq 1)$ выбирается с помощью одномерного поиска, например методом золотого сечения, из любой последовательности, но такой, что $|M^{k+1}| \geq |M^k|$, $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k = \infty$, $\lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0$, $\alpha_k = \frac{1}{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Аналитическая и численная апробация на тестовом примере. Целью данной работы является апробация методики решения задач планирования

Оптимизация спектра частот
Основные параметры

Номер опыта	Параметр F	Оценивается?	Параметр G	Оценивается?	Количество итераций	Отношение определителей матриц Фишера на конечной и начальной итерациях
1	-0,5	Да	1	Да	15	3,50122
2	-0,5	Да	1	Нет	4	4,64677
3	-0,5	Нет	1	Да	3	2,76486
4	0,5	Да	1	Нет	3	6,33064
5	0,5	Нет	1	Да	3	3,27194
6	-0,1	Да	1	Да	16	1,03753
7	-0,9	Да	1	Да	4	46,98857
8	0,1	Да	1	Да	4	1,00407
9	0,9	Да	1	Да	4	217,7155

СПМ входного сигнала на тестовом примере с помощью аналитического и численного подходов.

П р и м е р. Рассмотрим одномерную модель с одним входом и одним выходом (ОВОВ) вида

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k),$$
$$y(k+1) = x(k+1) + \nu(k+1) \tag{49}$$

с идентифицируемым параметром $\theta = \theta(F)$ и коэффициентом $G = a = \text{const}$. Запишем производную передаточной функции $T(\omega,\theta) = H(z_n - F)^{-1}G$ по параметру θ:

$$\frac{\partial T(\omega,\theta)}{\partial\theta} = \frac{a}{(z_n - \theta)^2}. \tag{50}$$

Тогда информационная матрица плана с нормированной спектральной плотностью, сосредоточенной в единственной частоте ω, имеет вид

$$M(\omega) = \frac{\partial T^*(\omega,\theta)}{\partial\theta} S_{\nu\nu}^{-1}(\omega) \frac{\partial T(\omega,\theta)}{\partial\theta} = \left[\frac{a}{(z_n - \theta)^2}\right]^* S_{\nu\nu}^{-1}(\omega) \frac{a}{(z_n - \theta)^2} =$$

(одномерная модель).
и характеристики

Оптимальная частота	Характеристики					
	Определитель матрицы Фишера		$tr(d(w\_k, S))$		Коэффициент обновления плана a_k	
	Начальная итерация	Конечная итерация	Начальная итерация	Конечная итерация	Начальная итерация	Конечная итерация
2,74889	3,69156	12,92500	5,07889	2,001696	0,37793	0,358488
3,14159	3,44324	15,99999	4,64677	1,00000	0,99844	0,99535
3,14159	1,44671	3,99998	2,76487	1,00000	0,99844	0,99689
0,0000	2,52409	15,9791	6,33890	1,00130	0,99844	0,00254
0,0000	1,22120	3,99570	3,27546	1,00107	0,99844	0,00254
1,96349	1,07006	1,11023	2,21972	2,01289	0,08952	0,06673
3,04341	2056,34	96624,70	14,36885	2,00584	0,99844	0,0934
0,0000	0,99738	1,00144	2,72461	2,69807	0,00255	0,00138
0,0000	324,928	70742,03	69,29935	2,87880	0,48544	0,00112

$$= \frac{a^2 S_{vv}^{-1}(\omega)}{[\cos(\omega) + j\sin(\omega) - \theta]^2 [\cos(\omega) - j\sin(\omega) - \theta]^2} =$$

$$= \frac{a^2 S_{vv}^{-1}(\omega)}{[(\cos(\omega) - \theta)^2 + \sin^2(\omega)]^2} = \frac{a^2 S_{vv}^{-1}}{[1 + \theta^2 - 2\theta\cos(\omega)]^2}.$$

Очевидно, что максимум $M(\omega)$ достигается при минимальном значении знаменателя в (50), где $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Пусть коэффициент $G = 1$. Тогда, если взять начальное значение параметра F_0 равным $0 < F_0 < 1$ ($F_0 = 0{,}5$), то минимальное значение знаменателя достигается при $\cos(\omega) = 1$, т. е. при $\omega = 0$. Если же взять параметр $-1 < F_0 < 0$ ($F_0 = -0{,}5$), то минимум знаменателя достигается при $\cos(\omega) = -1$, т. е. при $\omega = -\pi$ или $\omega = \pi$. Этот факт подтверждают и численные расчеты (см. таблицу).

Аналогичные результаты можно получить и для $\theta = \theta(G)$ при $\frac{\partial T(\omega, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{(z_n - \theta)}$ и информационной матрице

$$M(\omega) = \frac{\partial T^*(\omega, \theta)}{\partial \theta} S_{vv}^{-1}(\omega) \frac{\partial T(\omega, \theta)}{\partial \theta} = \left[\frac{1}{(z_n - \theta)}\right]^* S_{vv}^{-1}(\omega) \frac{1}{(z_n - \theta)} =$$

$$= \frac{S_{vv}^{-1}(\omega)}{[\cos(\omega) + j\sin(\omega) - \theta][\cos(\omega) - j\sin(\omega) - \theta]} =$$

$$= \frac{S_{vv}^{-1}(\omega)}{[(\cos(\omega) - \theta)^2 + \sin^2(\omega)]} = \frac{S_{vv}^{-1}}{[1 + \theta^2 - 2\theta\cos(\omega)]}.$$

В этом случае для любого G при $0 < F_0 < 1$ ($F_0 = 0{,}5$) минимум знаменателя достигается в точке $\omega = 0$, а при $-1 < F_0 < 0$ ($F_0 = -0{,}5$) минимум достигается в точках $\omega = -\pi$ и $\omega = \pi$ (см. таблицу).

Для вычисления спектральной плотности мощности начального входного сигнала был использован метод оценки с помощью прямого преобразования Фурье от автокорреляционной функции, изложенный в [14]. Для соблюдения условия теоремы 2 (см. [16]) перед выполнением приведенного выше алгоритма оптимального планирования спектр начального входного сигнала был пронормирован на величину среднего квадрата мощности $\bar{S}^2$ (сумму энергий всех гармоник в исследуемом дискретном спектре), вычисленную по следующей формуле:

$$\bar{S}^2 = \sum_{-\pi \le \omega_k \le \pi} S^2(\omega_k).$$

Результаты расчета для одномерной модели вида (49) с параметрами и характеристиками помех $v(t) \sim N(0,1)$, $H = 1$, $N = 64$, $t_{k+1} - t_k = \Delta t = 1$ приведены в таблице.

Система возбуждалась входным сигналом, значения которого определяются следующим соотношением:

$$u[t_k] = 10\sin(0{,}5t_k) + 5\sin(t_k) + 8\sin(1{,}5t_k) +$$
$$+ 13\sin(2{,}0t_k) + 5\sin(2{,}5t_k) + 7\sin(3{,}0t_k) + e_k, \qquad e_k \sim N(0,1).$$

Точность вычисления определителя информационной матрицы была взята равной 0,001. Все расчеты при вариациях значений динамических параметров и количеств оцениваемых параметров сведены в таблицу.

Заключение. В данной работе рассмотрена проблема построения входных планов для линейных динамических систем в частотной области. Свойства ИМФ использованы для построения эффективных вычислительных алгоритмов планирования D-оптимальных спектров входных сигналов в частотной области. Полученные аналитические соотношения вычисления ИМФ для линейных непрерывно-дискретных систем и разработанные алгоритмы оптимизации СПМ входного сигнала апробированы на аналитических примерах и подтверждены численными расчетами. Более подробный анализ численных расчетов можно найти в [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kailath T.** An innovations approach to least-squares estimations. Pt. 1: linear filtering in additive white noise // IEEE Trans. Autom. Control. 1968. **AC-13**, N 6. P. 645.
2. **Mehra R. K.** On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Trans. Autom. Control. 1970. **AC-15**, N 2. P. 175.

3. **Astrom K. T.** Maximum likelihood and prediction error methods // Automatica. 1980. **16**, N 5. P. 551.
4. **Попов А. А., Абденов А. Ж.** Субоптимальный алгоритм оценивания параметров в моделях стационарных динамических систем на основе линейного метода наименьших квадратов с регуляризацией. Рукоп. деп. в ВИНИТИ 22.06.84, № 84.
5. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
6. **Медич Дж.** Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973.
7. **Передумов В. П.** Об устойчивости моделирования на ЦВМ линейных динамических систем // Вестник Киев. политехн. ин-та. Техн. кибернетика. 1983. Вып. 7. С. 39.
8. **Параев Ю. И., Перепелкин Е. А.** Влияние периода дискретизации измерений на качество оценки состояния непрерывной стохастической системы // Автометрия. 1998. № 2. С. 99.
9. **Абденов А. Ж., Попов А. А.** Планирование *D*-оптимальных входных сигналов для непрерывно-дискретных систем при некоррелированных и взаимно коррелированных шумах объекта и измерителя // Алгоритмическое и программное обеспечение задач оптимального планирования и проектирования. Новосибирск: НЭТИ, 1983. С. 7.
10. **Hanuan E. J.** Time Series Analysis. N. Y.: Wiley, 1960.
11. **Heffes H.** The effects of erroneous models on the Kalman filter response // IEEE Trans. Autom. Control. 1966. **AC-11**. P. 541.
12. **Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалай А. М.** Планирование промышленных экспериментов. Модели динамики. М.: Металлургия, 1978.
13. **Mehra R. K.** Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems. Survey and new results // IEEE Trans. Autom. Control. 1974. **AC-19**. N 6. P. 753.
14. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
15. **Абденов А. Ж.** Планирование входного сигнала для линейных динамических систем в частотной области // Тр. Второй междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения». Т. 1. Секция электронно-физическая. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1994. С. 185.
16. **Абденов А. Ж.** Теоретические и алгоритмические аспекты *D*-оптимального планирования входного сигнала линейных дискретных динамических систем на основе оптимизации его спектральной плотности мощности // Сб. науч. трудов НГТУ. Новосибирск. 1997. № 3(8). С. 3.
17. **Абденов А. Ж.** Практические аспекты *D*-оптимального планирования входного сигнала линейных дискретных динамических систем на основе оптимизации его спектральной плотности мощности // Там же. С. 19.

Поступила в редакцию 10 сентября 1998 г.