РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1999

УДК 621. 396 : 621.38 + 629.7.054.07 + 621.396.624

В. С. Соболев, Г. А. Кащеева, И. В. Филимоненко

(Новосибирск)

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЕ СОВМЕСТНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

По критерию максимума функции правдоподобия найдены оптимальные по точности алгоритмы совместных оценок параметров импульсных оптических сигналов, а также определено качество этих оценок. Задача решена в предположении, что сигнал сопровождается только дробовым шумом, а фотоприемник работает в режиме счета фотоэлектронов при равномерном квантовании сигнала по времени.

Введение. Преобразование оптических сигналов в электрические, как известно, сопровождается дробовым шумом и поэтому неоднозначно. Эмитированные светом электроны образуют нестационарный пуассоновский поток, параметром распределения которого является величина, пропорциональная интенсивности оптического сигнала. Лишь математическое ожидание числа фотоэлектронов, полученное осреднением по многим реализациям сигнала, соответствует изменяющейся интенсивности света. При полуклассической трактовке процесса фотодетектирования для описания потока фотоэлектронов вводится так называемый точечный случайный процесс с двойной случайностью, а при квантово-механическом описании – более обобщенный самовозбуждающийся процесс [1]. Статистика этих процессов хорошо изучена, и поэтому представляется возможным найти оптимальные по точности алгоритмы оценок отдельных параметров оптического сигнала или их совокупности.

В статье решается задача оптимального оценивания совокупности следующих параметров импульсных оптических сигналов: амплитуды, длительности и времени прихода. Определено также качество получаемых оценок. Задача решается в предположении, что получаемый в процессе фотодетектирования электрический сигнал сопровождается только дробовыми шумами фотоприемника.

Методы приема и первичной обработки оптических сигналов. В настоящее время применяются три основных способа фотоэлектрического преобразования оптических сигналов:

1. Подсчет числа фотоэлектронов на каждом интервале равномерно квантованного сигнала по времени.

2. Фиксация момента эмиссии каждого фотоэлектрона.

Рис. 1

3. Аналоговый прием, т. е. преобразование оптических сигналов инерционным фотоприемником.

Перечисленные способы иллюстрируются рис. 1.

Функция и уравнение правдоподобия для оценки параметров сигнала при использовании счетчика фотоэлектронов. Как известно [2], при приеме оптических сигналов от когерентных источников поток эмитированных фотоэлектронов подчиняется распределению Пуассона, т. е. вероятность числа фотоэлектронов n_i, подсчитанных на интервале Δt в окрестности точки t_i (при условии, что Δt много меньше наименьшего периода изменения сигнала), определяется так:

$$P(n_i, \Delta t) = \frac{(\lambda_i \Delta t)^{n_i}}{n_i\,!} \exp[-\lambda_i \Delta t], \tag{1}$$

где $\lambda_i = \lambda(t_i)$ – скорость счета фотоэлектронов, связанная с интенсивностью принимаемого оптического сигнала $I(t)$ соотношением $\lambda_i = \dfrac{\eta}{h\nu} I(t)$; η – квантовая эффективность фотокатода; $h\nu$ – энергия кванта.

В силу независимости пуассоновских отсчетов совместная вероятность получения n_i фотоэлектронов на интервале Δt в момент времени t (функция правдоподобия) определится следующим образом:

$$P(n_1, \ldots, n_N) = \prod_{i=1}^{N} P(n_i, \Delta t), \tag{2}$$

где N – количество отсчетов на всем интервале наблюдения сигнала T. Логарифм функции правдоподобия (2)

$$\ln P_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} [n_i(\ln\lambda_i + \ln\Delta t) - \ln(n_i\,!) - \lambda_i \Delta t]. \tag{3}$$

Дифференцируя (3) по M оцениваемым параметрам x_k $(k=1,2,\dots,M)$ и приравнивая результат нулю, получим систему M уравнений правдоподобия следующего вида:

$$\frac{d\ln P_\Sigma}{dx_k}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{n_i\lambda'_i}{\lambda_i}-\lambda'_i\Delta t\right)=0, \qquad \lambda'_i=\frac{d\lambda_i}{dx_k}. \tag{4}$$

Если весь сигнал умещается на интервале наблюдения T и период квантования по времени Δt достаточно мал, то уравнение правдоподобия можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{n_i\lambda'_i}{\lambda_i}=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda'_i dt. \tag{5}$$

Решение системы M уравнений вида (5) и даст ответ на вопрос об оптимальной оценке соответствующего параметра.

Совместная оценка параметров гауссова импульса. В качестве примера решим систему уравнений (5) для сигнала вида

$$J(t)=J_0\exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}\right],$$

где неизвестными параметрами являются J_0 – амплитуда сигнала, τ – длительность и t_0 – момент прихода. Параметром плотности пуассоновского потока фотоэлектронов в этом случае будет

$$\lambda(t)=\lambda_0\exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}\right], \tag{6}$$

где $\lambda_0=\frac{J_0\eta}{h\nu}$ (см. пояснения к выражению (1)). Подставляя в (5) соответствующие частные производные $\lambda(t,\lambda_0,\tau,t_0)$ по λ_0,τ и t_0, будем иметь систему уравнений правдоподобия для оценки параметров λ_0,τ,t_0:

$$\frac{1}{\hat\lambda_0}\sum_{i=1}^{N}n_i=\sqrt{\pi}\hat\tau, \qquad \sum_{i=1}^{N}n_i(t_i-\hat t_0)^2=\frac{\hat\lambda_0\tau^3\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{N}n_i(t_i-\hat t_0)=0, \tag{7}$$

откуда легко получить следующие решения:

$$\hat\lambda_0=\sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}n_i\right)^3}{2\pi\sum_{i=1}^{N}n_i(t_i-t_0)^2}}, \qquad \hat\tau=\sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{N}n_i(t_i-t_0)^2}{\sum_{i=1}^{N}n_i}}, \qquad \hat t_0=\frac{\sum_{i=1}^{N}n_it_i}{\sum_{i=1}^{N}n_i}. \tag{8}$$

Подставляя оценку $\hat{t}_0$ из (8) в выражения для $\hat{\lambda}_0$ и $\hat{\tau}$, получим окончательно:

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right)^2}{\sqrt{2\pi\left[\sum_{i=1}^{N} n_i \sum_{i=1}^{N} n_i t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i\right)^2\right]}}, \quad (9)$$

$$\hat{\tau} = \frac{\sqrt{2}}{\sum_{i=1}^{N} n_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i \sum_{i=1}^{N} n_i t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i\right)^2}, \quad (10)$$

$$\hat{t}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i t_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i}. \quad (11)$$

Таким образом, имея набор измеренных значений n_i числа фотоэлектронов на каждом из интервалов Δt в моменты t_i, можно найти максимально правдоподобные оценки каждого из трех неизвестных параметров оптического импульсного сигнала.

Теперь важно определить качество этих оценок. Вначале найдем математическое ожидание $\langle \hat{t}_0 \rangle$. Полагая, что $N \gg 1$, можем считать, что математическое ожидание $\langle \hat{t}_0 \rangle$ равно его среднему значению, т. е.

$$\langle \hat{t}_0 \rangle \cong \frac{\left\langle \sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right\rangle}{\left\langle \sum_{i=1}^{N} n_i \right\rangle} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \langle n_i \rangle t_i}{\sum_{i=1}^{N} \langle n_i \rangle}. \quad (12)$$

Математическое ожидание n_i равно значению параметра распределения (6) в точке t_i, т. е.

$$\langle n_i \rangle = \lambda_0 e^{-(t_i - t_0)^2/\tau^2} \Delta t. \quad (13)$$

Если, как и ранее, считать, что величина Δt очень мала, то числитель и знаменатель (12) можно представить в виде:

$$\sum_{i=1}^{N} \langle n_i \rangle t_i = \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-(t - t_0)^2/\tau^2} dt = \sqrt{\pi}\lambda_0 t_0 \tau, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \langle n_i \rangle = \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t_i - t_0)^2/\tau^2} dt = \sqrt{\pi}\lambda_0 \tau. \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (12), получим

$$\langle \hat{t}_0 \rangle = t_0. \tag{16}$$

Это значит, что оценка $\hat{t}_0$ не смещена и состоятельна. Дисперсия этой оценки

$$\sigma_{\hat{t}_0}^2 = \langle \hat{t}_0^2 \rangle - \langle \hat{t}_0 \rangle^2 = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} n_i \right)^2 \right\rangle - t_0^2. \tag{17}$$

Чтобы получить окончательные выражения для $\sigma_{\hat{t}_0}^2$, рассмотрим вначале знаменатель (17) $\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i \right)^2 \right\rangle$. Учитывая, что сумма пуассоновских случайных величин есть также пуассоновская величина, и используя доказанное выше равенство (14), можно утверждать, что параметром пуассоновского распределения величины $\sum_{i=1}^{N} n_i$ является $\Lambda = \sqrt{\pi}\lambda_0\tau$. Поскольку дисперсия случайной пуассоновской величины равна ее математическому ожиданию, а математическое ожидание $\sum_{i=1}^{N} n_i$ равно $\sqrt{\pi}\lambda_0\tau$, величину $\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i \right)^2 \right\rangle$ можно представить в виде

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i \right)^2 \right\rangle = \sqrt{\pi}\lambda_0\tau + \pi\lambda_0^2\tau^2. \tag{18}$$

Теперь рассмотрим числитель (17) $\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right)^2 \right\rangle$:

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right) \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} n_i n_j t_i t_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle n_i n_j \rangle t_i t_j. \tag{19}$$

Определяя среднее значение произведения $n_i n_j$ как $\langle n_i n_j \rangle = \langle n_i^2 \rangle$ для $i = j$ и $\langle n_i n_j \rangle = \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle$ для $i \neq j$ (вследствие некоррелированности пуассоновских отсчетов), получим

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle n_i^2 \rangle t_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle t_i t_j. \tag{20}$$

Для пуассоновской случайной величины

$$\langle n_i^2 \rangle = \langle n_i \rangle^2 + \langle n_i \rangle = (\lambda(t)\Delta t)^2 + \lambda(t)\Delta t. \tag{21}$$

Если $\Delta t \to 0$, то первым членом в (21) можно пренебречь. Тогда, полагая в правой части (20) $\langle n_i^2 \rangle = \langle n_i \rangle$ и заменяя суммирование интегрированием, числитель (17) запишем в виде

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \lambda_0 \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2} \right] dt +$$

$$+ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t \lambda_0 \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2} \right] dt \right)^2 = \sqrt{\pi}\lambda_0 \tau \left(t_0^2 + \frac{\tau^2}{2} \right) + \pi \lambda_0^2 t_0^2 \tau^2. \tag{22}$$

Подставляя (22) и (18) в (17), получим окончательно следующее выражение для дисперсии оценки $\hat{t}_0$ в случае $\lambda(t)\Delta t \ll 1$:

$$\sigma_{\hat{t}_0}^2 = \frac{\tau^2}{2(1 + \sqrt{\pi}\lambda_0 \tau)} \cong \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}\lambda_0}. \tag{23}$$

Таким образом, при $\lambda(t)\Delta t \ll 1$ дисперсия оценки $\hat{t}_0$ прямо пропорциональна ширине импульса τ и обратно пропорциональна его амплитуде. Относительная среднеквадратичная ошибка оценки $\hat{t}_0$ будет равна

$$\frac{\sigma_{t_0}}{t_0} = \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{\tau}{2\sqrt{\pi}\lambda_0}}. \tag{24}$$

Вывод выражения для дисперсии оценки $\hat{t}_0$ в случае $\lambda(t)\Delta t \gg 1$ дан в приложении.

Теперь определим качество полученных оценок τ и λ_0. Если предположить, что $\langle \hat{\tau} \rangle$ и $\langle \hat{\lambda}_0 \rangle$ определяются математическими ожиданиями входящих в (9) и (10) выражений: $\left\langle \sum_{i=1}^{N} n_i \right\rangle = \lambda_0 \sqrt{\pi}\tau$, $\left\langle \sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right\rangle = \lambda_0 \sqrt{\pi}\tau t_0$, $\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i \right)^2 \right\rangle = \sqrt{\pi}\lambda_0 \tau + \pi \lambda_0^2 \tau^2$ и $\left\langle \sum_{i=1}^{N} n_i t_i^2 \right\rangle = \sqrt{\pi}\lambda_0 \tau \left(t_0^2 + \frac{\tau^2}{2} \right)$, то, подставляя эти значения в (9) и (10), получим:

$$\langle \hat{\tau} \rangle = \tau, \tag{25}$$

$$\langle \hat{\lambda}_0 \rangle = \lambda_0 + 1/\sqrt{\pi}\tau. \tag{26}$$

Это означает, что оценка $\hat{\tau}$ не смещена и состоятельна, а оценка $\hat{\lambda}_0$ смещена на величину $1/\sqrt{\pi}\tau$.

Заключение. Получены функции и уравнения правдоподобия для оценки параметров оптических импульсов, принимаемых фотодетектором. На примере импульсов гауссовой формы найдены совместные максимально правдоподобные оценки амплитуды, длительности и времени прихода импульса, а также определены некоторые характеристики качества этих оценок.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для конечных интервалов квантования Δt можно получить точные

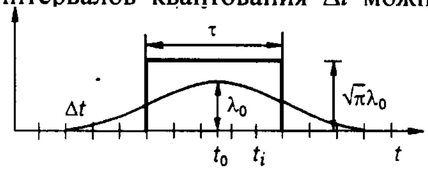

Рис. 2

Математическое ожидание суммарного числа фотоэлектронов на всей длине импульса при этом будем считать, как и ранее (14), равным $\sqrt{\pi}\lambda_0\tau$, а среднее число импульсов $\langle n_i \rangle$ на любом интервале Δt будет в данном случае одинаковым и равным $\sqrt{\pi}\lambda_0\Delta t$. Перепишем выражение (17) для дисперсии оценки $\hat{t}_0$ в следующем виде:

$$\sigma_{t_0}^2 = \langle \hat{t}_0^2 \rangle - \langle \hat{t}_0 \rangle^2 = \frac{\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right)^2 \right\rangle}{\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i \right)^2 \right\rangle} - t_0^2. \tag{П1}$$

Знаменатель в выражении (П1) (см. (18)) будет равен

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i \right)^2 \right\rangle = \sqrt{\pi}\lambda_0\tau + \pi\lambda_0^2\tau^2, \tag{П2}$$

а числитель определится выражением (20), которое с учетом постоянства значений $\langle n_i \rangle$ на любом рассматриваемом интервале запишем в виде

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle n_i^2 \rangle t_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle t_i t_j =$$

$$=\langle n_i^2\rangle\sum_{i=1}^{N} t_i^2 + \langle n_i\rangle\langle n_j\rangle \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N} t_i\, t_j. \qquad (\text{П}3)$$

Для пуассоновской случайной величины n_i

$$\langle n_i^2\rangle = \langle n_i\rangle^2 + \langle n_i\rangle = \sqrt{\pi}\lambda_0\Delta t + \pi\lambda_0^2(\Delta t)^2,$$

$$\langle n_i\rangle\langle n_j\rangle = \langle n_i\rangle^2 = \pi\lambda_0^2(\Delta t)^2. \qquad (\text{П}4)$$

Двойная сумма в (П3) может быть представлена как

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N} t_i t_j = \left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} t_i^2, \qquad (\text{П}5)$$

и окончательно с учетом (П4) и (П5) выражение (П3) примет вид

$$\left\langle\left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i\right)^2\right\rangle = \langle n_i\rangle^2\sum_{i=1}^{N} t_i^2 + \langle n_i\rangle\sum_{i=1}^{N} t_i^2 + \langle n_i\rangle^2\left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2 - \langle n_i\rangle^2\sum_{i=1}^{N} t_i^2 =$$

$$= \langle n_i\rangle\sum_{i=1}^{N} t_i^2 + \langle n_i\rangle^2\left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right)^2. \qquad (\text{П}6)$$

Далее определим значения сумм в (П6), полагая $t_i = t_0 - \tau/2 + i\Delta t$ (см. рис. 2). После соответствующих подстановок запишем:

$$\sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N}(t_0 - \tau/2) + i\Delta t = N(t_0 - \tau/2) + \Delta t\sum_{i=1}^{N} i = N(t_0 - \tau/2) + \frac{N(N+1)}{2}\Delta t, \qquad (\text{П}7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} t_i^2 = \sum_{i=1}^{N}[(t_0 - \tau/2) + i\Delta t]^2 = N(t_0 - \tau/2)^2 + 2\Delta t(t_0 - \tau/2)\sum_{i=1}^{N} i + (\Delta t)^2\sum_{i=1}^{N} i^2 =$$

$$= N(t_0 - \tau/2)^2 + 2\Delta t(t_0 - \tau/2)\frac{N(N+1)}{2} + (\Delta t)^2\,\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}. \qquad (\text{П}8)$$

Подставляя (П7), (П8) в (П6) и заменяя N на $\tau/\Delta t$, получим

$$\left\langle\left(\sum_{i=1}^{N} n_i t_i\right)^2\right\rangle =$$

$$= \langle n_i \rangle \left[N(t_0 - \tau/2)^2 + 2\Delta t(t_0 - \tau/2)\frac{N(N+1)}{2} + (\Delta t)^2 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right] +$$

$$+ \langle n_i \rangle^2 \left[N(t_0 - \tau/2) + \frac{N(N+1)}{2} \Delta t \right]^2 =$$

$$= \langle n_i \rangle \frac{\tau}{\Delta t}\left(t_0^2 + \frac{\tau^2}{12} + t_0 \Delta t + \frac{\Delta t^2}{6} \right) + \langle n_i \rangle^2 \left(\frac{\tau}{\Delta t} \right)^2 \left(t_0^2 + t_0 \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} \right). \qquad (\text{П9})$$

Подставляя (П9) (с учетом (П4)) и (П2) в (П1), получим окончательное выражение для дисперсии оценки $\hat{t}_0$:

$$\sigma_{\hat{t}_0}^2 = \frac{\tau^2/12 + t_0 \Delta t(1 + \sqrt{\pi}\lambda_0 \tau) + \Delta t^2/12\,(2 + 3\sqrt{\pi}\lambda_0 \tau)}{1 + \sqrt{\pi}\lambda_0 \tau}. \qquad (\text{П10})$$

Если общее число фотоэлектронов $\sqrt{\pi}\lambda_0 \tau$ мало, т. е. $\sqrt{\pi}\lambda_0 \Delta t \ll 1$, то, как следует из (П10), относительная среднеквадратичная ошибка будет равна

$$\frac{\sigma_{\hat{t}_0}}{t_0} \cong \frac{1}{\sqrt{12\sqrt{\pi}\lambda_0 \tau}} \frac{\tau}{t_0}. \qquad (\text{П11})$$

Сравнивая (П11) с (24), видим, что среднеквадратичное отклонение оценки t_0 для прямоугольного импульса таким же образом зависит от τ и t_0, как и в случае гауссова импульса. Отличие состоит только в величине постоянного множителя, который теперь равен $1/\sqrt{12}$ вместо $1/\sqrt{2}$.

Если же, как в большинстве случаев приема оптических сигналов с применением счетчика фотонов, величина $\sqrt{\pi}\lambda_0 \Delta t \gg 1$, относительная среднеквадратичная ошибка оценки, как это следует из (П10), будет равна

$$\frac{\sigma_{t_0}}{t_0} = \sqrt{\frac{\Delta t}{t_0}}. \qquad (\text{П12})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shapiro J. H., Saplakoglu G., Ho S.-T. et al.** Theory of light detection in the presence of feedback // JOSA B. 1987. **4**, N 10.
2. **Лоудон Р.** Квантовая теория света. М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 21 сентября 1998 г.