

Б. А. Князев, В. С. Черкасский

(Новосибирск)

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В ГРАДИЕНТНЫХ СЛОЯХ**

Развит метод восстановления распределения показателя преломления неоднородного прозрачного фазового объекта, просвечиваемого лазерным пучком, по модулю фурье-образа нево мущенного пучка и модулю фурье-образа пучка, прошедшего через объект. Создана оптическая система, позволяющая одновременно регистрировать с помощью дифференциального фотодиода отклонение сфокусированного лазерного пучка, прошедшего через объект, и записывать электронно-оптическим хронографом модуль фурье-образа этого пучка. Выполнена обработка экспериментальных данных, полученных при исследовании процесса расширения анодной плазмы в диоде импульсного ионного ускорителя СОBRA. Показано, что результат восстановления показателя преломления по фурье-образу хорошо согласуется с прямыми измерениями отклонения лазерного пучка. Метод имеет высокую разрешающую способность по пространству ($\sim 0,03$ мм) и позволяет при использовании широкого зондирующего пучка регистрировать полную пространственно-временную картину процесса за один рабочий импульс.

Введение. Прохождение волнового фронта через слабо неоднородную среду приводит к изменению пространственного распределения амплитуды и фазы волны. В практических ситуациях перед исследователем возникают разнообразные проблемы: от восстановления искаженного изображения объекта до определения характеристик самой неоднородной среды. При этом, как правило, решается некорректная обратная задача восстановления фазы волны. В качестве примера можно сослаться на работы [1-4], в которых описаны методы, позволяющие получить из каждого отдельного измерения полную картину распределения показателя преломления в объекте и требующие тщательного анализа степени достоверности получаемых результатов.

Альтернативным прямым методом исследования неоднородностей является измерение градиента показателя преломления по отклонению лазерного луча (RING-диагностика) с регистрацией дифференциальным фотоприемником (см. [5] и ссылки в ней), дающей достаточно надежную информацию. Для получения необходимого пространственного разрешения луч лазера в исследуемой области должен быть хорошо сфокусирован, а следовательно, полную информацию об объекте можно получить только как результат многократных измерений со смещением луча поперек градиентного слоя. Данный метод будем называть лазерной дефлектометрией. Этот метод применялся при исследовании анодной плазмы мощного ионного диода

ускорителя COBRA [6]. Для получения приемлемого пространственного разрешения в слое большой длины была разработана специальная оптическая система, состоящая из трех телескопов (рис. 1). Так как объект исследования, который можно рассматривать как фазовый транспарант, находится в передней фокальной плоскости одной из линз, то в ее задней фокальной плоскости формируется фурье-образ объекта по поперечным пространственным частотам [7]. Это обстоятельство позволило дополнительно к основным экспериментам, кратко описанным в [6], исследовать возможность восстановления распределения показателя преломления в пределах лазерного пучка по измеренному модулю его фурье-образа одновременно с измерением отклонения пучка как целого.

Таким образом, в настоящей работе впервые описана диагностическая система, позволяющая в рамках одного экспериментального устройства совместить два альтернативных метода измерения. Особенностью работы является то, что при восстановлении фазы использовалась хронограмма модуля фурье-образа, которая фиксировалась как в течение процесса, так и до его начала, что позволяет определить невозмущенный модуль фурье-образа, необходимый для итерационной процедуры. При этом изменение фазы при прохождении через слой восстанавливалось не по модулю изображения в плоскости объекта и модулю фурье-образа, как во многих работах [3, 4], а по модулю фурье-образа пучка, прошедшего через систему до появления плазмы, и модулю фурье-образа пучка, прошедшего через плазму.

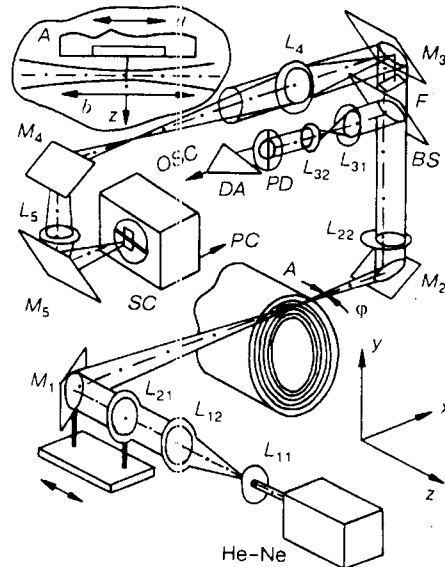


Рис. 1. Схема deflectорной диагностики с 20-мегаваттным He-Ne-лазером. Телескопические линзовые системы: $L_{11}, L_{12}; L_{21}, L_{22}$ (ахромат); $L_{31}, L_{32}; PD$ – квадрантный фотодиод с дифференциальным усилителем; $M_1 - M_4$ – зеркала; BS – 50 %-ный светоделитель; F – фурье-плоскость линзы L_{22} ; L_4 и L_5 – ахроматические линзы; SC – электронно-оптический хронограф "Hamamatsu C2830"; A – кольцевой алюминиевый анод ускорителя. На вставке показано прохождение лазерного пучка вдоль анода через рабочую зону; зона генерации плазмы – канавки, заполненные эпоксидной смолой (не показаны); $a = 95$ мм, $b = 195$ мм

Экспериментальная установка. Эксперименты проводились на ионном ускорителе COBRA [5, 6, 8], представляющем собой одноступенчатый диод с магнитной изоляцией. Источником ионов служил тонкий слой плазмы, образующийся на поверхности кольцевого анода (см. *A* на рис. 1) при подаче на него импульса высокого напряжения (~ 80 нс, $\sim 0,8$ МВ). Ионы, вытягиваемые полем из плазмы, ускорялись по нормали к поверхности в сторону плазменного катода (на рисунке не показан), располагавшегося на расстоянии 6 мм от анода. Величина ионного тока в максимуме составляла ~ 200 кА.

Оптическая система для исследования анодной плазмы показана на рис. 1. Луч He-Ne-лазера системой линз $L_{11} - L_{21}$ фокусировался до диаметра 0,25 мм в перетяжке, расширяясь до 0,35 мм на границе катодного устройства (см. вставку на рис. 1). Длина плазменного слоя a равнялась 95 мм. Градиент показателя преломления в направлении оси z , связанный с изменением в этом направлении плотности электронов и нейтральных частиц (и в меньшей степени ионов), вызывает отклонение лазерного луча. Линза L_{22} , в переднем фокусе которой расположена перетяжка пучка, и телескоп L_{31}, L_{32} , расположенный после светоделителя BS , проецируют пучок на дифференциальный фотодиод PD с усилителем DA , регистрирующий отклонение лазерного пучка.

Осциллограмма, зарегистрированная этой системой при расстоянии оси лазерного пучка от анода 0,45 мм, приведена на рис. 2, *a*, где на оси абсцисс отложен угол отклонения φ центра пучка. На рисунке приведен и импульс напряжения на диоде U_d . Плотность газоплазменного слоя, образующегося у

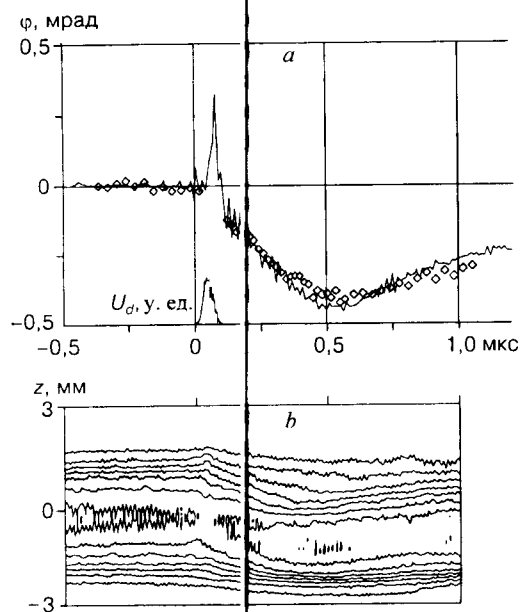


Рис. 2. Осциллограмма сигнала с фотодиода и записанная хронографом развертка распределения интенсивности лазерного излучения в фурье-плоскости, полученные в одном импульсе. Расстояние оси луча от поверхности анода 0,45 мм, коэффициент увеличения системы L_4, L_5 0,8, эффективная ширина щели 2 нс, U_d – импульс напряжения на аноде ускорителя

поверхности анода в течение импульса, спадает в направлении оси z . Очевидно, что положительное отклонение лазерного пучка в течение импульса напряжения свидетельствует об определяющей роли рефракции на свободных электронах расширяющейся от анода плазмы (показатель преломления $\eta(z)$ меньше единицы). На более поздней стадии отклонение луча меняет знак, что объясняется рекомбинацией плазмы и поступлением с анода нейтрального газа, для которого $\eta(z) > 1$.

Смещение луча, прошедшего градиентный слой, равное $\Delta z \sim \frac{1}{2} a\phi$, как

нетрудно оценить, даже при максимальном отклонении составляет лишь 6 % от его диаметра. Поскольку длина слоя $a \approx 95$ мм $\ll f_{21}$, то его будем рассматривать далее как тонкий фазовый транспарант, помещенный в переднем фокусе линзы L_{22} , причем изменение фазы происходит только вдоль оси z . В задней фокальной плоскости F этой линзы формируется фурье-образ объекта по поперечным пространственным волновым числам u [7]:

$$F(u) = \mathcal{F}[f(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp(-i2\pi uz) dz.$$

Плоскость F отображалась системой зеркал $M_3 - M_5$ и линз $L_4 - L_5$ на входную щель электронно-оптической камеры "Hamamatsu C2830" с ПЗС-камерой на выходе, работавшей в хронографическом режиме. На рис. 2, b приведена хронограмма фурье-образа пучка, записанная одновременно с осциллограммой. Видно хорошее качественное согласие между ними, если не считать сравнительно малого отклонения «вверх» на хронограмме в момент импульса напряжения, что следует отнести к недостаточному временному разрешению системы (нами использовалась развертка длительностью в 2 мс). Поскольку мы не имели возможности провести эксперименты на более кратких развертках, в настоящей работе эта область исключена из анализа.

Явно видно, что хронограмма содержит дополнительную по сравнению с осциллограммой информацию. В частности, из нее следует, что распределение интенсивности отклоненного вниз пучка несимметрично, и, следовательно, в пределах зондирующего пучка показатель преломления $\eta(z)$ меняется весьма существенно. Используя численную процедуру, описанную в следующем разделе, из этих данных можно получить зависимость $\eta(z)$ в пределах лазерного пучка.

Алгоритм восстановления распределения показателя преломления по модулю фурье-образа. Для решения задачи восстановления показателя преломления нами разработан алгоритм, который базируется на следующем: (i) в расчетах использовалось приближение фазового сдвига, т. е. рассматривался слой плазмы как тонкий фазовый транспарант; (ii) в фокальной плоскости линзы регистрировался квадрат модуля фурье-образа пространственного распределения лазерного пучка, прошедшего через градиентный слой; (iii) хронограммой регистрировался фурье-образ как до момента генерации плазмы (невозмущенный пучок), так и в течение рабочего импульса, что позволяет из хронограммы, полученной в одном импульсе, найти вышеупомянутым образом распределение сдвига фазы (а следовательно, и показателя преломления) в прошедшем пучке от координаты; (iv) для устранения

неопределенности в абсолютном значении восстановленной фазы можно использовать данные, полученные в экспериментах с фотодиодом.

Задачей математической обработки результатов эксперимента является определение дополнительного фазового сдвига, который приобретает пучок лазера, проходящий через слой плазмы, и зависимость этого сдвига от координаты поперек пучка. Пусть в объектной плоскости (т. е. в передней фокальной плоскости линзы) задана комплексная волновая функция $f(z)$ такая, что

$$f(z) = |f(z)| \exp[i\zeta(z)], \quad (1)$$

где ζ – фаза волны. В задней фокальной плоскости, т. е. в плоскости Фурье, волновая функция имеет вид

$$F(u) = |F(u)| \exp[i\psi(u)] = \mathcal{F}[f(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \exp(-i2\pi uz) dz. \quad (2)$$

Здесь u – поперечное волновое число.

Стандартная задача восстановления фазы по измеренному модулю функции в объектной плоскости $|f(z)|$ (модулю «изображения») и модулю его фурье-образа $|F(u)|$ подробно проанализирована и описана в литературе (см., например, [3]). В отличие от стандартной постановки задачи в нашем случае отсутствуют экспериментальные данные о модуле изображения, но зато регистрируется модуль фурье-образа волновой функции до ее прохождения через слой плазмы (невозмущенный пучок) и модуль фурье-образа функции после прохождения через слой плазмы. Считая, что прохождение через слой плазмы не изменяет амплитуду пучка, а изменяет только его фазу (что, как было показано ранее, в нашем случае справедливо), можно переформулировать задачу в следующем виде. Пусть волновая функция до прохождения через слой плазмы имеет вид

$$f_0(z) = |f_0(z)| \exp[i\zeta_0(z)], \quad (3)$$

а после прохождения плазмы в том же сечении –

$$f_1(z) = |f_1(z)| \exp[i\zeta_1(z)]. \quad (4)$$

Соответствующие фурье-образы, т. е. волновые функции в фурье-плоскости, обозначим как $F_0(u)$ и $F_1(u)$. Таким образом, задача свелась к определению двух функций – фаз ζ_0 и $\zeta_1(z)$ – по измеренным в эксперименте $|F_0(u)|$ и $|F_1(u)|$ при наличии дополнительного условия

$$|f_0(z)| = |f_1(z)| = A(z), \quad (5)$$

где $A(z)$ – неизвестная и тоже подлежащая определению действительная функция, описывающая амплитуду невозмущенного (и, по предположению, возмущенного) пучка в объектной плоскости.

Для решения этой задачи использовался модифицированный нами алгоритм Герцберга – Секстона [4]. Алгоритм состоял из следующих шагов.

1. Задание случайных чисел в диапазоне $0 \leq \zeta \leq 2\pi$ в качестве начального приближения для фаз $\psi_0(u)$ и $\psi_1(u)$ в фурье-плоскости.

2. Выполнение обратного фурье-преобразования функций $\tilde{F}_0(u)$ и $\tilde{F}_1(u)$, полученных умножением экспериментально измеренных модулей на фазовые множители с фазами $\psi_0(u)$ и $\psi_1(u)$, в результате чего получается первое приближение к волновым функциям в объектной плоскости.

3. Изменение вычисленных приближенных значений модулей функций в объектной плоскости для удовлетворения условия (5). В качестве нового значения $A(z)$ берется среднее арифметическое полученных приближенных значений.

4. Выполнение прямого преобразования Фурье с полученными приближенными функциями в объектной плоскости $f_0(z)$ и $f_1(z)$, в результате чего получается новое приближение для функций $\tilde{F}_0(u)$ и $\tilde{F}_1(u)$.

5. Замена в полученных функциях рассчитанных модулей на экспериментально измеренные и переход к п. 2 настоящего описания.

Критерием сходимости алгоритма является отличие полученных в п. 4 модулей фурье-образов от экспериментально измеренных (сумма модулей отклонений по всем точкам).

Для проверки работы алгоритма было проведено его тестирование. В качестве исходных данных выбирались функции:

$$\begin{aligned} a(z) &= A \exp[-(z - z_0)^2 + bz^3], \\ \zeta_0(z) &= 0, \\ \zeta_1(z) &= (1 + cz^2) \sin(dz). \end{aligned} \quad (6)$$

Выполнив численное преобразование Фурье, получим тестовые «экспериментальные» значения $|F_0(u)|$ и $|F_1(u)|$. После этого, подставив случайные фазы, выполняем итерации в соответствии с пп. 1–5. Результаты расчета показаны на рис. 3. Следует отметить несколько особенностей полученного решения.

А. Фазы в обоих лучах (невозмущенном и возмущенном) восстановились с точностью до аддитивной константы. Это принципиальное ограничение используемой постановки задачи [3, 4] (не алгоритма).

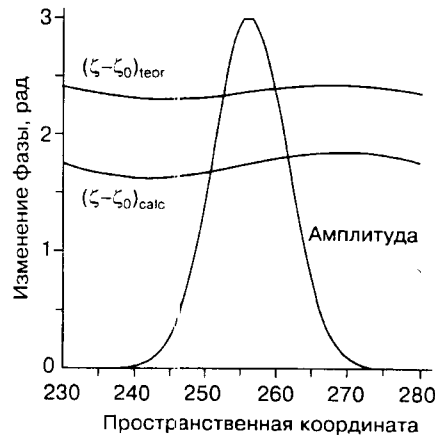


Рис. 3. Сравнение модельной зависимости (6) с расчетной

Б. Аддитивные константы в обеих полученных фазах разные, так что разность фаз тоже определена с точностью до неизвестной константы.

В. Фаза восстанавливается только в области, где амплитуда $a(z)$ значительно отличается от нуля.

Результаты обработки экспериментальных данных. Экспериментальные данные, полученные с помощью электронно-оптической камеры, представляли собой массив 240×376 . Временная развертка позволяла зафиксировать 240 сечений модуля фурье-образа за время 2 мс. В поперечном (пространственном) направлении фиксировалось 376 точек. Пространственное разрешение измерялось в специальных экспериментах, в которых щель пересекалась двумя проволочками диаметром 1,1 и 0,3 мм. В результате обработки этих данных получено эффективное расстояние между пикселями матрицы CCD камеры $\delta z = 2,4 \cdot 10^{-5}$ м. Типичный профиль модуля фурье-образа в эксперименте с плазмой в 125-м сечении показан на рис. 4, а. Как видно из рисунка, данные имеют значительную высокочастотную составляющую, появление которой связано, по-видимому, с процессом дискретизации данных и с естественными шумами в системе. Для устранения этой

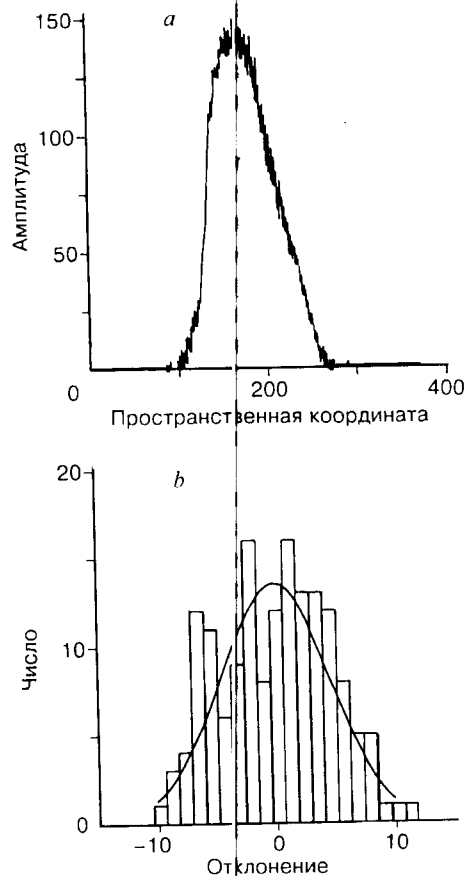


Рис. 4. Типичный профиль модуля фурье-образа в 125-м сечении (304 нс) и гистограмма отклонения измеренных значений от сглаженных

высокочастотной составляющей использовался алгоритм сглаживания данных из [9]. Гистограмма отклонений реального профиля от сглаженной кривой показана на рис. 4, *b*.

Представленная на рис. 2 хронограмма фурье-образа обработана (сглажена) описанным выше способом. В соответствии с теорией для восстановления фазы нам необходимо знать одновременно модули фурье-образа до прохождения пучка через слой плазмы $|F_0(u)|$ и после его прохождения через слой $|F_1(u)|$. В реальном эксперименте «невозмущенный» и «возмущенный» пучки регистрировались в каждом эксперименте, но эти данные разнесены во времени: вначале некоторое время регистрируется модуль фурье-образа невозмущенного пучка, после чего на диод подается напряжение и регистрируется модуль фурье-образа возмущенного пучка. Поскольку даже до зажигания плазмы измеренный модуль фурье-образа невозмущенного пучка несколько изменяется (см. рис. 2), при восстановлении фазы в качестве фиксированного невозмущенного модуля фурье-образа использовались данные, полученные усреднением по 60 невозмущенным сечениям.

Поскольку сечение пучка в области фокуса мало, а число пикселей изображения в фурье-плоскости велико (~250 отличных от нуля значений из 376 измеренных), решение для амплитуды в передней фокальной плоскости содержало лишь несколько точек и алгоритм работал неустойчиво. После того как массив данных в фурье-плоскости был симметрично дополнен нулями до 1024 точек, число точек, в которых амплитуда в объектной плоскости отлична от нуля, увеличилось до 25 и решение стало более устойчивым.

В соответствии с алгоритмом в качестве исходных фаз в фурье-плоскости при расчете первого сечения были выбраны случайные фазы, а при расчете последующих сечений решение, полученное в предыдущем сечении, использовалось как начальное приближение. Как было отмечено ранее, критерием сходимости является отличие вычисленных модулей Фурье от сглаженных экспериментальных данных. В качестве меры такого отличия была выбрана сумма квадратов отклонений по всем точкам. Хотя эта сумма уменьшается от итерации к итерации, но к нулю не сходится. Практическим критерием сходимости являлось условие стационарирования вышеупомянутой суммы, т. е. итерации прекращались, когда эта сумма прекращала изменяться в шестом знаке. При этом типичное значение суммы равнялось 15, максимальное отклонение в точке не превосходило 0,05 при максимальном значении самой функции ~10. Число итераций, необходимое для сходимости, составляло от 1500 до 3000 итераций. Восстановленное распределение фазы до начала импульса напряжения, которое должно быть постоянным, слегка варьировалось от выпуклого к вогнутому вблизи горизонтальной линии, что связано со сглаживанием шумов в каждом сечении и отличием этих сглаженных сечений друг от друга.

Для сравнения полученных расчетных результатов с измеренным с помощью фотодиода отклонением пучка была вычислена производная от разности фаз по поперечной координате $d(\zeta_1(z) - \zeta_0(z))/dz$ в точке максимума амплитуды зондирующего лазерного пучка. Поскольку неопределенная константа, присутствующая в вычисленной фазе, не играет роли при вычислении производной, то с точностью до соответствующего множителя $(\lambda/2\pi)$ эта производная равна углу отклонения лазерного пучка в плазме. Вычисленные величины угла наложены (крестики) на осциллограмму, полученную с помощью фотодиода (см. рис. 2). Согласие можно считать

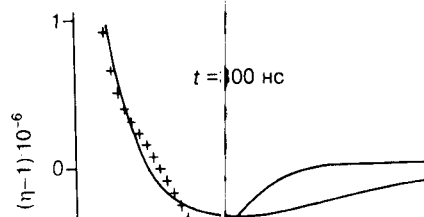


Рис. 5. Сравнение зависимости показателя преломления от расстояния для разных моментов времени. Результаты обработки данных с дефлектора показаны сплошными линиями, а расчетные значения, вычисленные по распределению восстановленной фазы, – квадратиками и крестиками

удовлетворительным везде, за исключением области «положительного» отклонения, которая, как показано выше, была исключена из анализа.

Осциллограммы $\varphi(t)$, полученные при различных расстояниях z от поверхности анода, приведены в [8, 5]. Построив с помощью этих осциллограмм зависимость $\varphi(z)$ для фиксированного момента времени и проинтегрировав ее, можно найти распределение $\eta(z)$ в данный момент времени (см. подробнее [5]). Две такие зависимости для моментов времени 120 и 300 нс приведены на рис. 5. При построении кривых было использовано семь имевшихся точек по z .

На рис. 5 приведено сравнение зависимости $\eta(z) - 1$, полученной из дефлекторных измерений, с зависимостью, восстановленной по профилю фазы. При этом следует помнить, что фаза восстанавливается с точностью до константы. По этой причине мы нормировали полученные расчетные значения таким образом, чтобы в максимуме лазерного пучка они совпадали с кривой, построенной по дефлекторным измерениям. Видно, что зависимость $\eta(z)$ прекрасно совпадает для $t = 300$ нс и не выходит за пределы ошибок для $t = 120$ нс. Пространственное разрешение нового метода можно оценить величиной 0,03 мм, что на порядок лучше, чем у дефлекторного метода, для которого оно составляет $\sim 0,3$ мм.

Заключение. Результаты работы свидетельствуют, что предложенный алгоритм восстановления пространственного распределения показателя преломления объектов типа «фазовый транспарант» работает даже в том случае, когда измерительная система регистрирует только амплитуду фурье-образа объекта, просвечиваемого лазерным излучением, при условии, что в процессе измерения регистрируется также фурье-образ невозмущенного пучка (или пучка, прошедшего через транспарант с известным из независимых измерений $\eta(z)$). Для абсолютной калибровки величины показателя преломления $\eta(z)$ нужно знать ее хотя бы в одной точке. Если отказаться от измерений отклонения лазерного пучка фотодиодом, можно рекомендовать использовать широкий квазипараллельный лазерный пучок, охватывающий весь градиентный слой. Тогда за один импульс можно восстановить распределение $\eta(z)$ во всем слое, используя для абсолютной

калибровки значение $\eta(z) = 1$ в вакууме или $\eta(z) = \text{const}$ в невозмущенном газе.

Представленный материал основан на работе, частично поддержанной U. S. Civilian Research and Development Foundation (грант № RP1-239) и программой «Интеграция науки и образования». Авторы благодарят Д. Хаммера, Дж. Гринли за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Roggeman M. C., Welsh B. M., Fugate R. Q.** Improving the resolution of ground-based telescopes // *Rev. Modern Phys.* 1997. **69**, N 2. P. 437.
2. **Isernia T., Pascazio V., Pierrri R., Schirinz G.** Image reconstruction from Fourier transform magnitude with applications to synthetic aperture radar imaging // *JOSA. A: Opt. Image Sci. and Vision.* 1996. **13**, N 5. P. 922.
3. **Fienup J. R.** Phase retrieval algorithms: a comparison // *Appl. Opt.* 1982. **21**, N 15. P. 2758.
4. **Saxton W. O.** *Computer Techniques for Image Processing in Electron Microscopy.* N. Y.: Academic Press, 1978.
5. **Knyazev B. A., Hammer D. A., Greenly J. B.** Refractive index gradient (RING) diagnostics: analysis of different optical systems and application to intense ion beam diode studies // Report LPS96-01. Laboratory of Plasma Studied. Cornell University, 1996.
6. **Князев Б. А., Гринли Дж. Б., Хаммер Д. А. и др.** Исследование динамики анодной плазмы в магнито-изолированном диске ионного ускорителя COBRA модифицированным методом лазерной дефлектометрии // *Письма в ЖТФ.* 1997. **23**, вып. 10. С. 63.
7. **Гудмен Дж.** *Введение в фурье-оптику.* М.: Мир, 1970.
8. **Knyazev B. A., Hammer D. A., Greenly J. B. et al.** Refractive index gradient diagnostics: analysis of different optical systems and applications to COBRA ion diode // *Proc. Eleventh Intern. Conf. on High-Power Particle Beams.* Prague, 1996. **2**. P. 1054.
9. **Gander W., Hrebicek J.** *Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and Matlab.* Berlin: Springer, 1995.

Поступила в редакцию 12 ноября 1997 г.