РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1998

УДК 62-50

Ю. И. Параев, Е. А. Перепелкин

(Томск — Барнаул)

ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ НА КАЧЕСТВО ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача построения оптимальной оценки состояния линейной многосвязной непрерывной стохастической системы с дискретными по времени измерениями выхода. Исследуется зависимость качества оценки от периода дискретизации измерений.

Рассмотрим линейную многосвязную систему, поведение которой описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + \xi, \tag{1}$$

где x — вектор состояния; ξ — вектор неконтролируемых входных воздействий. Будем считать ξ непрерывным случайным процессом типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и матрицей дисперсий Q. Пусть измерения

$$y_k = Hx(kT) + \mu_k$$

выполняются в дискретные моменты времени kT ($k = 0, 1, 2, \dots$) с постоянным шагом по времени T и ошибкой μ_k, где μ_k — дискретный случайный процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и матрицей дисперсий R.

Перейдем к эквивалентному дискретному описанию системы (1)

$$x((k+1)T) = \Phi(T)x(kT) + \nu_k. \tag{2}$$

Здесь $\Phi(T) = e^{AT}$ — матричная экспонента; ν_k — дискретный случайный процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и матрицей дисперсий:

$$S = \int_0^T \Phi(t)Q\Phi'(t)dt.$$

Оптимальную оценку состояния для системы (2) можно получить с помощью фильтра Калмана [1]

$$x_{k+1} = \Phi(T)x_k + L(y_k - Hx_k),$$

где матрица $L = \Phi(T)PH'(R + HPH')^{-1}$ вычисляется на основе решения дискретного уравнения Риккати:

$$P = \Phi(T)P\Phi(T)' - \Phi(T)PH'(R + HPH')^{-1}HP\Phi(T)' + S.$$

Качество оценки определяется величиной $J(T) = \mathrm{tr}P$.

Функция $J(T)$ может нетривиальным образом зависеть от T. У данной функции могут быть локальные минимумы, максимумы и точки разрыва. В частности, эта зависимость связана со свойством наблюдаемости системы (2). В общем случае не при всех T система (2) наблюдаема, даже если предположить, что система (1) наблюдаема. Особые точки функции $J(T)$ определяются теми значениями T, при которых система (2) ненаблюдаема. Необходимые и достаточные условия наблюдаемости системы (2) можно сформулировать в виде спектрального критерия по аналогии с [2], где подобный критерий был получен для свойства управляемости линейной системы с амплитудно-импульсной модуляцией управления.

Введем на множестве собственных чисел матрицы A отношение эквивалентности: $\lambda \sim \lambda$ и $\lambda \sim \gamma$, если $(\lambda - \gamma)T$ кратно $2\pi i$, где i — мнимая единица. Классы эквивалентности обозначим через $M_1, M_2, \ldots, M_r$. Обозначим через V_j матрицу, столбцы которой образуют базис прямой суммы всех подпространств собственных векторов матрицы A, соответствующих собственным значениям из M_j. Учитывая дуальность свойств управляемости и наблюдаемости [3], на основе результатов [2] можно доказать, что наблюдаемость системы (2) эквивалентна условию линейной независимости столбцов матриц HV_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Следующий пример иллюстрирует типичное поведение $J(T)$ в случае, если при некоторых значениях T дискретная система оказывается ненаблюдаемой.

Рассмотрим механическую систему перемотки тонкой пленки. Такого рода системы встречаются в технологических процессах производства полимерных пленок, бумаги и т. д. Введем следующие обозначения для физических величин: l — ширина пленки; δ — толщина пленки; ρ — плотность материала; E — модуль упругости пленки; L — расстояние между осями рулонов; R_1, R_2 — радиусы рулонов; J_1, J_2 — моменты инерции рулонов; k_1, k_2 — коэффициенты трения. Вектор состояния системы включает угловые скорости рулонов и силу натяжения пленки.

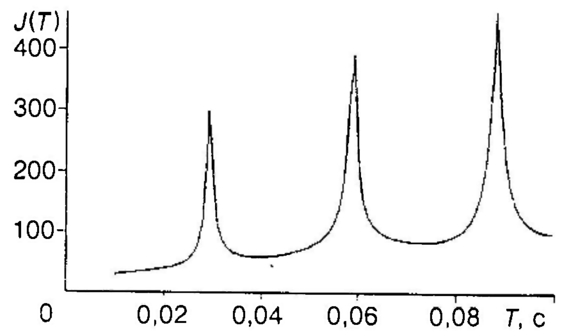

Рис. 1

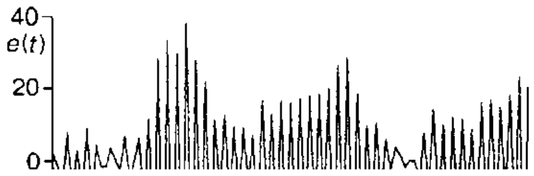

Рис. 2

В отклонениях от номинального режима поведение системы описывается уравнением (1) с матрицей

$$A = \begin{bmatrix} -k_1/J_1 & 0 & -R_1/J_1 \\ 0 & -k_2/J_2 & R_2/J_2 \\ cR_1 & -cR_2 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$c = \frac{l\delta E}{\sqrt{L^2 - (R_1 - R_2)^2}}.$$

Предположим, что измерению доступны угловые скорости рулонов, сила натяжения пленки не измеряется. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $L = 2$ м, $l = 0{,}1$ м, $\delta = 10^{-4}$ м, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м^3, $E = 2 \cdot 10^{10}$ Па, $k_1 = k_2 = 0{,}08$, $R_1 = 0{,}3$ м, $R_2 = 0{,}2$ м,

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 0{,}001 & 0 \\ 0 & 0{,}001 \end{bmatrix}.$$

Непрерывная система наблюдаема. Дискретная система теряет свойство наблюдаемости при значениях T, равных 0,0293, 0,0586, 0,088. На рис. 1 показана зависимость J от T. Точки максимума соответствуют тем значениям T, при которых дискретная система ненаблюдаема. На рис. 2 и 3 показана

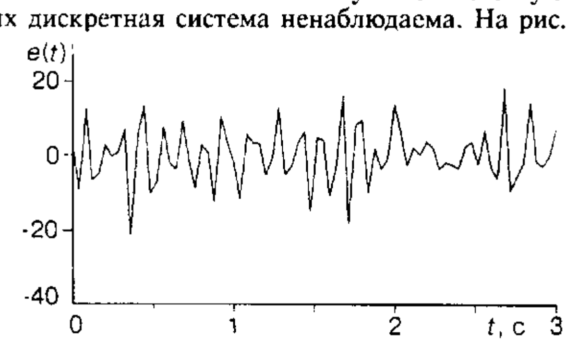

Рис. 3

зависимость ошибки оценки силы натяжения пленки $e(t)$ от времени соответственно при $T = 0{,}03$ и $T = 0{,}04$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана — Бьюси. М.: Наука, 1982.
2. Перепелкин Е. А. Управляемость линейных систем с амплитудно-импульсной модуляцией управления // АиТ. 1986. № 6. С. 170.
3. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986.

Поступила в редакцию 21 октября 1997 г.