РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

УДК 681.3.08

Т. А. Алиев, Н. Ф. Мусаева

(Баку, Азербайджан)

АЛГОРИТМЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ АДЕКВАТНОСТИ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ

Для случая, когда измерительная информация состоит из смеси полезного сигнала и помехи, предложен алгоритм определения дисперсии помехи. Показано, что если корреляционные матрицы формируются по оценкам корреляционных функций, то под влиянием дисперсий помех искажаются оценки ее диагональных элементов. Для их коррекции предложен алгоритм, позволяющий с использованием величин соответствующих дисперсий помех улучшить обусловленность корреляционных матриц.

Введение. В настоящее время для построения математических моделей статики технологических процессов в виде уравнения регрессии, т. е. для определения связей между входными $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_m(t)$ и выходным $y(t)$ технологическими параметрами, в первую очередь требуется определение авто- и взаимно корреляционных матриц. Однако, к сожалению, на практике сигналы $x_i(t)$, $y(t)$ сопровождаются определенными помехами $\varepsilon_i(t)$, $\varphi(t)$, которые приводят к возникновению погрешностей в элементах корреляционных матриц, что ухудшает их обусловленность и затрудняет обеспечение адекватности этих уравнений [1—8].

Для преодоления плохой обусловленности данных матриц применяют методы регуляризации. При этом требуется наличие определенной информации о неизвестных коэффициентах и дисперсии помехи, которые на практике трудно найти. В связи с этим зачастую оказывается целесообразным улучшить обусловленность корреляционных матриц, не прибегая к методам регуляризации, путем коррекции погрешностей их элементов.

1. **Постановка задачи.** Известно, что для центрированных стационарных случайных функций $\overset{\circ}{g}_i(t)$ с нормальным законом распределения, состоящих из сигнала $\overset{\circ}{x}_i(t)$ и помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}_i(t)$ с математическими ожиданиями $m_{x_i} \approx 0$, $m_{\varepsilon_i} \approx 0$ $(i, j = \overline{1, m})$, при вычислении оценок авто- и взаимно корреляционных функций $R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_i}(\tau)$, $R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(\tau)$ используются следующие формулы:

$$R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_i}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{g}_i(t)\overset{\circ}{g}_i(t+\tau)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\overset{\circ}{x}_i(t) + \overset{\circ}{\varepsilon}_i(t)\right]\left[\overset{\circ}{x}_i(t+\tau) + \overset{\circ}{\varepsilon}_i(t+\tau)\right]dt, \tag{1.1}$$

$$R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{g}_i(t)\overset{\circ}{g}_j(t+\tau)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\overset{\circ}{x}_i(t) + \overset{\circ}{\varepsilon}_i(t)\right]\left[\overset{\circ}{x}_j(t+\tau) + \overset{\circ}{\varepsilon}_j(t+\tau)\right]dt. \tag{1.2}$$

При $\tau = 0$ выражения (1.1), (1.2) приобретают вид:

$$R_{\mathring{g}_i \mathring{g}_i}(\tau = 0) = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\mathring{x}_i(t) + \mathring{\varepsilon}_i(t)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \mathring{x}_i(t)^2 dt +$$

$$+ \frac{2}{T}\int_0^T \mathring{x}_i(t)\mathring{\varepsilon}_i(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T \mathring{\varepsilon}_i(t)^2 dt = R_{\mathring{x}_i \mathring{x}_i}(\tau = 0) + \Lambda_{\mathring{x}_i \mathring{x}_i}(\tau = 0), \qquad (1.3)$$

$$R_{\mathring{g}_i \mathring{g}_j}(\tau = 0) = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\mathring{x}_i(t) + \mathring{\varepsilon}_i(t)\right]\left[\mathring{x}_j(t) + \mathring{\varepsilon}_j(t)\right] dt = \frac{1}{T}\int_0^T \mathring{x}_i(t)\mathring{x}_j(t)dt +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T \mathring{x}_i(t)\mathring{\varepsilon}_j(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T \mathring{x}_j(t)\mathring{\varepsilon}_i(t)dt + \frac{1}{T}\int_0^T \mathring{\varepsilon}_i(t)\mathring{\varepsilon}_j(t)dt =$$

$$= R_{\mathring{x}_i \mathring{x}_j}(\tau = 0) + \Lambda_{\mathring{x}_i \mathring{x}_j}(\tau = 0), \qquad (1.4)$$

где $\Lambda_{\mathring{x}_i \mathring{x}_i}(\tau = 0)$, $\Lambda_{\mathring{x}_i \mathring{x}_j}(\tau = 0)$ — величины погрешностей соответственно авто- и взаимно корреляционных функций $R_{\mathring{g}_i \mathring{g}_i}(\tau = 0)$, $R_{\mathring{g}_i \mathring{g}_j}(\tau = 0)$; $\mathring{g}_i(t) = g_i(t) - m_{g_i}$, $\mathring{x}_i(t) = x_i(t) - m_{x_i}$, $\mathring{\varepsilon}_i(t) = \varepsilon_i(t) - m_{\varepsilon_i}$; m_{g_i}, m_{x_i}, m_{ε_i} — математические ожидания сигналов $g_i(t)$, $x_i(t)$, $\varepsilon_i(t)$.

Таким образом, в результате влияния на оценки авто- и взаимно корреляционных функций $R_{\mathring{g}_i \mathring{g}_i}(0)$, $R_{\mathring{g}_i \mathring{g}_j}(0)$ соответственно погрешностей $\Lambda_{\mathring{x}_i \mathring{x}_i}(0)$, $\Lambda_{\mathring{x}_i \mathring{x}_j}(0)$, вызванных наличием в значениях исходных данных $\mathring{x}_i(t)$ соответствующих помех $\mathring{\varepsilon}_i(t)$, для случая, когда между полезными сигналами $\mathring{x}_i(t)$ и помехами $\mathring{\varepsilon}_i(t)$, а также между самими помехами $\mathring{\varepsilon}_i(t)$, $\mathring{\varepsilon}_j(t)$ отсутствует корреляция, с учетом равенства

$$R_{\mathring{g}_i \mathring{g}_i}(\tau = 0) \approx \frac{1}{T}\int_0^T \mathring{x}_i(t)^2 dt + D(\varepsilon_i) \qquad (1.5)$$

корреляционная матрица $\mathbf{R}_{\mathring{g}\mathring{g}}(0)$ приобретает вид [9, 10]:

$$\mathbf{R}_{\mathring{g}\mathring{g}}(0) \approx \left\| \begin{matrix} R_{\mathring{x}_1 \mathring{x}_1}(0) + D(\varepsilon_1) & R_{\mathring{x}_1 \mathring{x}_2}(0) & \ldots & R_{\mathring{x}_1 \mathring{x}_m}(0) \\ R_{\mathring{x}_2 \mathring{x}_1}(0) & R_{\mathring{x}_2 \mathring{x}_2}(0) + D(\varepsilon_2) & \ldots & R_{\mathring{x}_2 \mathring{x}_m}(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{\mathring{x}_m \mathring{x}_1}(0) & R_{\mathring{x}_m \mathring{x}_2}(0) & \ldots & R_{\mathring{x}_m \mathring{x}_m}(0) + D(\varepsilon_m) \end{matrix} \right\|. \qquad (1.6)$$

Несмотря на то что матрица $\mathbf{R}_{\mathring{g}\mathring{g}}(0)$ образуется из элементов $R_{\mathring{g}_i \mathring{g}_i}(0)$, $R_{\mathring{g}_i \mathring{g}_j}(0)$, содержащих погрешности $\Lambda_{\mathring{x}_i \mathring{x}_i}(0)$, $\Lambda_{\mathring{x}_i \mathring{x}_j}(0)$, фактически она идентична матрице $\mathbf{R}_{\mathring{x}\mathring{x}}(0)$, элементы которой не содержат погрешностей. Исключением являются элементы главной диагонали, которые отличаются от своих истинных значений на величины дисперсий $D(\varepsilon_i)$ помехи, вследствие чего зачастую на практике корреляционные матрицы $\mathbf{R}_{\mathring{g}\mathring{g}}(0)$ оказываются плохо обусловленными. Рассматриваемая работа посвящена разработке алгоритма улучшения их обусловленности путем устранения дисперсии помехи диагональных элементов.

2. Алгоритм обеспечения адекватности уравнения регрессии. Для улучшения обусловленности корреляционных матриц и обеспечения адекватности уравнения регрессии необходимо, прежде всего, определить дисперсии помех.

В работе [11] показано, что для корреляционной функции дискретизированного стационарного центрированного случайного сигнала $\overset{\circ}{g}_\nu$ с нормальным законом распределения, состоящим из сигнала $\overset{\circ}{x}_\nu$ и помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}_\nu$ с математическими ожиданиями $m_x \approx 0$, $m_\varepsilon \approx 0$, имеют место равенства

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu = 0) = (1/n) \sum_{\nu=1} (\overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{x}_\nu + \overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{x}_\nu) + D(\varepsilon), \tag{2.1}$$

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu \neq 0) = (1/n) \sum_{\nu=1}^{n} (\overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu}) \tag{2.2}$$

и при стремлении времени наблюдения T к бесконечности и шага дискретизации Δt к нулю оценки $R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu = 0\Delta t)$, $R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu = 1\Delta t)$, $R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu = 2\Delta t)$ оказываются настолько близкими величинами, что можно считать справедливым равенство

$$R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu = 0\Delta t) - R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu = 1\Delta t) \approx R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu = 1\Delta t) - R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu = 2\Delta t), \tag{2.3}$$

согласно которому для случая, когда между полезным сигналом $\overset{\circ}{x}(t)$ и помехой $\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$ отсутствует корреляция, оценку дисперсии $D(\varepsilon)$ помехи ε_ν можно определить по формуле

$$D(\varepsilon) = (1/n) \sum_{\nu=1}^{n} (\overset{\circ}{g}_\nu \overset{\circ}{g}_\nu + \overset{\circ}{g}_\nu \overset{\circ}{g}_{\nu+2} - 2\overset{\circ}{g}_\nu \overset{\circ}{g}_{\nu+1}). \tag{2.4}$$

Выражения (2.1)—(2.4) показывают, что в тех случаях, когда между полезным сигналом $\overset{\circ}{x}(t)$ и помехой $\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$ корреляция равна нулю, помеха $\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$ оказывает влияние на результат обработки лишь только при $\mu = 0$, и погрешность оценки $R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu = 0)$ при этом состоит только из дисперсии $D(\varepsilon)$ помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$. Оценки же взаимно корреляционных функций $R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_j}(\mu)$ совпадают с истинными значениями $R_{\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_j}(\mu)$ при любом μ. Поэтому для обеспечения адекватности уравнения регрессии требуется исключить погрешность диагональных элементов корреляционных матриц $\mathbf{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(0)$ по выражению

$$R^*_{\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_i}(\mu = 0) = R_{\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_i}(\mu = 0) - D(\varepsilon_i).$$

При этом корреляционная матрица (1.6) с откорректированными элементами примет вид:

$$\mathbf{R}^*_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(0) \approx \left\| \begin{matrix} R_{\overset{\circ}{g}_1 \overset{\circ}{g}_1}(0) - D(\varepsilon_1) & R_{\overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_2}(0) & \dots & R_{\overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_m}(0) \\ R_{\overset{\circ}{x}_2 \overset{\circ}{x}_1}(0) & R_{\overset{\circ}{g}_2 \overset{\circ}{g}_2}(0) - D(\varepsilon_2) & \dots & R_{\overset{\circ}{x}_2 \overset{\circ}{x}_m}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{\overset{\circ}{x}_m \overset{\circ}{x}_1}(0) & R_{\overset{\circ}{x}_m \overset{\circ}{x}_2}(0) & \dots & R_{\overset{\circ}{g}_m \overset{\circ}{g}_m}(0) - D(\varepsilon_m) \end{matrix} \right\| \approx$$

$$\approx \left\| \begin{matrix} R_{\overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_1}(0) & R_{\overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_2}(0) & \dots & R_{\overset{\circ}{x}_1 \overset{\circ}{x}_m}(0) \\ R_{\overset{\circ}{x}_2 \overset{\circ}{x}_1}(0) & R_{\overset{\circ}{x}_2 \overset{\circ}{x}_2}(0) & \dots & R_{\overset{\circ}{x}_2 \overset{\circ}{x}_m}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{\overset{\circ}{x}_m \overset{\circ}{x}_1}(0) & R_{\overset{\circ}{x}_m \overset{\circ}{x}_2}(0) & \dots & R_{\overset{\circ}{x}_m \overset{\circ}{x}_m}(0) \end{matrix} \right\| = \mathbf{R}_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(0).$$

Очевидно, что обусловленность этой матрицы по сравнению с матрицей (1.6) будет значительно лучше, что позволит, в свою очередь, улучшить адекватность уравнения регрессии.

Заключение. Показано, что когда технологические параметры состоят из смеси полезного сигнала с шумом и между ними отсутствует корреляция, погрешность диагональных элементов корреляционной матрицы образуется из дисперсий помех, которые являются причиной их плохой обусловленности и ухудшения адекватности уравнения регрессии. Для ее улучшения и обеспечения адекватности математических моделей предложено корректировать оценки диагональных элементов путем вычитания из них оценки дисперсии помехи. Если при этом разность оценок корреляционных функций при $\mu = 0\Delta t$, $\mu = 1\Delta t$ и $\mu = 1\Delta t$, $\mu = 2\Delta t$ равна нулю, то можно считать, что анализируемые сигналы не содержат помехи и нет необходимости корректировать диагональные элементы корреляционных матриц; в противном случае величину отличия указанных разностей можно принять за оценку дисперсии помехи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цыпкин Я. З.** Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984.
2. **Бессонов А. А., Загашвили Ю. В., Маркелов А. С.** Методы и средства идентификации динамических объектов. Л.: Энергоатомиздат, 1989.
3. **Алиев Т. А.** Экспериментальный анализ. М.: Машиностроение, 1991.
4. **Себер Дж.** Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
5. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
6. **Тихонов А. Н., Гончаровский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.** Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
7. **Hoerl A., Kennard R.** Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems // Technometrics. 1970. 12.
8. **Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е.** Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987.
9. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф.** Статистическая идентификация с уравновешиванием погрешностей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 3.
10. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф.** Алгоритм уменьшения погрешности оценки корреляционной функции сигнала с шумом // Автометрия. 1995. № 4. С. 105.
11. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф.** Алгоритмы определения дисперсии и погрешностей, вызываемых помехами случайных сигналов // Автометрия. 1997. № 3. С. 80.

Поступила в редакцию 22 ноября 1995 г.