

УДК 681.327

Я. А. Фурман  
(Йошкар-Ола)

**СИММЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОРМЫ  
ПРОИЗВОЛЬНОГО ПЛОСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ**

Рассмотрен способ разложения произвольного контура на два ортогональных в пространстве  $E^{2k}$  контура: сопряженно-симметрический и сопряженно-антисимметрический. Найдены условия, при которых эти контуры будут ортогональны и в  $C^k$ . Введены для произвольного контура три собственных угла, при которых он обладает особыми симметрическими свойствами. Показана сопряженная симметричность контура автокорреляционной функции (АКФ) и выходного контура согласованного фильтра, а также слабая зависимость максимального значения коэффициента сопряженной симметрии от воздействия контурных шумов.

**Введение и постановка задачи.** Форма плоского изображения задается его контуром и может быть определена как инвариант его аналитического описания к группе линейных преобразований, включающей масштабирование, поворот на произвольный угол и сдвиг начальной точки контура [1—3]. Такой подход хорошо соответствует нашим интуитивным представлениям о форме, хотя ее аналитическое описание будет варьироваться в зависимости от количества неузнанных параметров преобразования контура. Инвариантность задания формы к углу поворота изображения не исключает зависимости некоторых характеристик формы от угла поворота. Речь в данном случае идет о существовании некоторых преимущественных, приоритетных значений угла поворота, в дальнейшем условно названных собственными углами контура, которые характеризуются особыми свойствами его симметрии и антисимметрии.

Кроме задачи о собственных углах контура, существует еще одна задача обработки контуров изображений, связанная со свойствами их симметрии и антисимметрии. Известен подход к разложению полигонального контура  $\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1}$  [4], где  $\gamma(n) = |\gamma(n)| \exp\{i\varphi(n)\}$ ,  $n = 0, 1, \dots, k-1$ , — элементарные векторы (ЭВ);  $k$  — размерность контура по элементарным контурам, имеющим вид (рис. 1, а, б)

$$\Gamma_m = \left\{ \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\} \right\}_{0, k-1}, \quad m = 0, 1, \dots, k-1, \quad (1)$$

и образующим в  $k$ -мерном комплексном линейном пространстве  $C^k$  ортогональный базис. Если  $P = \{\rho(m)\}_{0, k-1}$  — контур спектра Фурье полигонального контура  $\Gamma$ , т. е.

$$\rho(m) = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k} mn\right\}, \quad m = 0, 1, \dots, k-1, \quad (2)$$

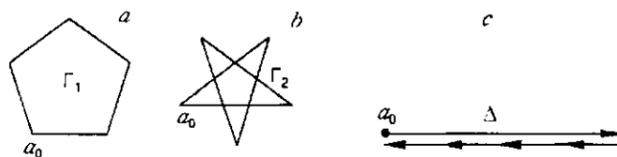


Рис. 1. Полигональные сопряженно-симметрические контуры размерностью  $k = 5$ :  
 $a - \Gamma_1 = \{1; 0,309 + 0,951i; -0,809 + 0,588i; -0,809 - 0,588i; 0,309 - 0,951i\}$ ;  $b - \Gamma_2 =$   
 $= \{1; -0,809 + 0,588i; 0,309 - 0,951i; 0,309 + 0,951i; -0,809 - 0,588i\}$ ;  $c - \Delta =$   
 $= \{4, -1, -1, -1, -1\}$

то произвольный контур  $\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1}$  представляется взвешенной суммой элементарных контуров  $\Gamma_m, m = 0, 1, \dots, k-1$  [5, 6]:

$$\Gamma = \sum_{m=0}^{k-1} \rho(m) \Gamma_m. \quad (3)$$

Данное разложение в общем случае имеет число членов, равное  $k$ , и для контуров большой размерности является достаточно громоздким. В работе [7] описаны свойства комплексных последовательностей, в частности, представление произвольной комплексной последовательности в виде двух последовательностей: сопряженно-симметрической (СС) и сопряженно-антисимметрической (СА). Применительно к комплекснозначным заданным полигональным контурам у СС-контур  $\Gamma_{СС}$  его ЭВ связаны условием

$$\gamma(n) = \gamma^*(-n) = \gamma^*(k-n), \quad (4)$$

а у СА-контур  $\Gamma_{СА}$  — условием

$$\gamma(n) = -\gamma^*(-n) = -\gamma^*(k-n). \quad (5)$$

Произвольный контур  $\Gamma$  разлагается на безвесовую сумму СС- и СА-контуров (рис. 2,  $a-c$ ), т. е.  $\Gamma = \Gamma_{СС} + \Gamma_{СА}$ , причём

$$\Gamma_{СС} = 0,5(\Gamma + \Gamma_{обр}^*) \quad \text{и} \quad \Gamma_{СА} = 0,5(\Gamma - \Gamma_{обр}^*), \quad (6)$$

где  $\Gamma_{обр}^*$  — комплексно-сопряженный контур, обратный контуру  $\Gamma$ , т. е.  $\Gamma_{обр}^* = \{\gamma^*(k-n)\}_{0, k-1}$ .

Цель данной статьи заключается в рассмотрении свойств СС- и СА-контуров и обуславливаемых ими симметрических и антисимметрических характеристик форм произвольных изображений.

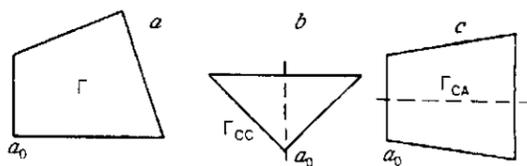


Рис. 2. Разложение контура  $\Gamma$  на сопряженно-симметрический  $\Gamma_{СС}$  и сопряженно-антисимметрический  $\Gamma_{СА}$

1. Свойства СА- и СС-контуров. Примерами СС-контуров являются элементарные контуры, заданные в виде (1) (см. рис. 1, а, б), и дельтовидный контур [б] (рис. 1, с).

Начальный ЭВ  $\gamma(0)$  у СС-контуров будет чисто вещественным, так как в соответствии с (4)  $\gamma(0) = \gamma^*(0)$ , что возможно лишь при  $\text{Im}\gamma(0) = 0$ . Соответственно у СА-контуров  $\gamma(0) = -\gamma^*(0)$ , что возможно лишь при  $\text{Re}\gamma(0) = 0$ , т. е. этот ЭВ задается чисто мнимым числом. СС-контуры симметричны относительно вертикальной, а СА-контуры — относительно горизонтальной оси. При нахождении в соответствии с (2) прямого дискретного преобразования Фурье (ДПФ) СС-контуров образуются пары слагаемых вида

$$|\gamma(n)| \left\{ \exp\left\{i\left[\varphi(n) - \frac{2\pi}{k} mn\right]\right\} + \exp\left\{-i\left[\varphi(n) - \frac{2\pi}{k} mn\right]\right\} \right\},$$

а для СА-контуров — слагаемые вида

$$|\gamma(n)| \left\{ \exp\left\{i\left[\varphi(n) - \frac{2\pi}{k} mn\right]\right\} - \exp\left\{-i\left[\varphi(n) - \frac{2\pi}{k} mn\right]\right\} \right\}.$$

В первом случае получаются вещественные, а во втором — мнимые числа. Поэтому СС-контуры имеют вещественные, а СА-контуры — чисто мнимые спектры. При этом спектр СС-контура  $\Gamma_{\text{СС}}$  равен  $\text{Re}\{\rho(m)\}_{0, k-1}$ , а СА-контура  $\Gamma_{\text{СА}}$  —  $\text{Im}\{\rho(m)\}_{0, k-1}$ , где  $P = \{\rho(m)\}_{0, k-1}$  — спектр исходного контура  $\Gamma$ . Получим аналитические характеристики контуров  $\Gamma_{\text{СС}}$  и  $\Gamma_{\text{СА}}$ . Вначале определим скалярное произведение ( $\Gamma_{\text{СС}}, \Gamma_{\text{СА}}$ ). Принимая во внимание выражения (4) и (5), запишем

$$\begin{aligned} (\Gamma_{\text{СС}}, \Gamma_{\text{СА}}) &= 0,25 \sum_{n=0}^{k-1} [\gamma(n) + \gamma^*(k-n)][\gamma(n) - \gamma^*(k-n)]^* = \\ &= -0,5i \sum_{n=0}^{k-1} \text{Im}\{\gamma(n)\gamma(k-n)\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, скалярное произведение контуров  $\Gamma_{\text{СС}}$  и  $\Gamma_{\text{СА}}$  есть всегда мнимая величина, а сами эти контуры ортогональны в действительном пространстве  $E^{2k}$ . Расстояние между контурами равно

$$R^2 = \|\Gamma_{\text{СС}}\|^2 + \|\Gamma_{\text{СА}}\|^2 - 2\text{Re}(\Gamma_{\text{СС}}, \Gamma_{\text{СА}}) = \|\Gamma_{\text{СС}}\|^2 + \|\Gamma_{\text{СА}}\|^2, \quad (8)$$

т. е. сумме энергий этих контуров. Нетрудно показать, что сумма этих энергий равна энергии исходного контура, т. е.  $\|\Gamma\|^2 = \|\Gamma_{\text{СС}}\|^2 + \|\Gamma_{\text{СА}}\|^2$ . Найдем соотношения для энергий контуров  $\Gamma_{\text{СС}}$  и  $\Gamma_{\text{СА}}$ . Используя (6) и учитывая, что энергии контуров  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{\text{обр}}^*$  и  $\Gamma_{\text{обр}}$  одинаковы, получим

$$\|\Gamma_{\text{СС}}\|^2 = 0,5 [\|\Gamma\|^2 + \text{Re}\pi] \quad \text{и} \quad \|\Gamma_{\text{СА}}\|^2 = 0,5 [\|\Gamma\|^2 - \text{Re}\pi], \quad (9)$$

где

$$\pi = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n)\gamma(k-n).$$

2. Собственные углы произвольного контура. Из выражений (9) следует, что для каждого произвольного контура можно установить несколько преимущественных углов поворота. Введем коэффициент  $q_{\text{СС}}$  сопряженной симметрии контура  $\Gamma$  как отношение энергий  $q_{\text{СС}} = \|\Gamma_{\text{СС}}\|^2 / \|\Gamma\|^2$ . Аналогично коэффициент сопряженной антисимметрии контура  $q_{\text{СА}}$ , дополняющий  $q_{\text{СС}}$  до единицы, введем как отношение энергий  $\|\Gamma_{\text{СА}}\|^2 / \|\Gamma\|^2$ . При повороте контура

$\Gamma$  будет меняться величина  $\pi$ . Если контур  $\Gamma$  повернуть на угол  $\Delta\varphi$ , то ЭВ  $\gamma(n)$  будет соответствовать ЭВ  $\gamma(n)\exp\{i\Delta\varphi\}$ , а ЭВ  $\gamma(k-n)$  — элементарному вектору  $\gamma(k-n)\exp\{i\Delta\varphi\}$ . Поэтому вектор  $\pi$  в результате поворота контура на угол  $\Delta\varphi$  повернется на угол  $2\Delta\varphi$ . Если угол поворота контура  $\Gamma$  выбрать таким образом, чтобы вектор  $\pi$  стал горизонтальным и направленным вправо, то энергия контура  $\Gamma_{CC}$  и, следовательно, коэффициент  $q_{CC}$  приняли бы максимальные возможные значения. Так как при повороте вектора величина его модуля сохраняется, а реальная часть горизонтально расположенного вектора равна его модулю, то

$$q_{CC\max} = 0,5 \left( 1 + \frac{|\pi|}{\|\Gamma\|^2} \right). \quad (10)$$

Угол  $\alpha_1$ , равный половине аргумента вектора  $\pi$ , т. е.

$$\alpha_1 = 0,5 \operatorname{arg} \pi, \quad (11)$$

назовем первым собственным углом контура  $\Gamma$ . Если вектор  $\pi$  повернуть на угол  $-2\alpha_1$ , то его реальная часть станет равна модулю и достигнет наибольшего значения. При этом контур  $\Gamma$  повернется на угол  $-\alpha_1$  и его коэффициент сопряженной симметрии  $q_{CC}$  достигнет максимума. Мнимая часть вектора  $\pi$  при этом равна нулю, и контуры  $\Gamma_{CC}$  и  $\Gamma_{CA}$  становятся ортогональными не только в  $E^{2k}$ , но и в  $C^k$ . В этом случае контур  $\exp\{-i\alpha_1\}\Gamma$  равен сумме двух ортогональных в  $C^k$  контуров, т. е.  $(\exp\{-i\alpha_1\}\Gamma)_{CC} = 0,5\exp\{-i\alpha_1\}(\Gamma + \Gamma_{\text{обр}}^*)$  и  $(\exp\{-i\alpha_1\}\Gamma)_{CA} = 0,5\exp\{-i\alpha_1\}(\Gamma - \Gamma_{\text{обр}}^*)$ , а его ЭВ наилучшим образом удовлетворяют условию сопряженной симметрии:  $\gamma(n) = \gamma^*(k-n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, k-1$ .

Вторым собственным углом произвольного контура  $\Gamma$  назовем угол  $\alpha_2$ , равный

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \pi/4. \quad (12)$$

При повороте на угол  $-2\alpha_2$   $\operatorname{Im} \pi = |\pi|$  и  $\operatorname{Re} \pi = 0$ . Тогда из (9) следует, что  $\|\Gamma_{CC}\|^2 = \|\Gamma_{CA}\|^2 = 0,5\|\Gamma\|^2$  и  $q_{CC} = q_{CA} = 0,5$ , т. е. энергии СС- и СА-контуров одинаковы, а также одинаковы коэффициенты сопряженной симметрии и антисимметрии контура  $\exp\{i\alpha_2\}\Gamma$ . При этом, как следует из (7), модуль скалярного произведения  $(\Gamma_{CC}, \Gamma_{CA})$  достигает максимума, что свидетельствует о наибольшей схожести задаваемых этими контурами форм.

Третьим собственным углом назовем угол  $\alpha_3$ , равный

$$\alpha_3 = \alpha_1 - \pi/2. \quad (13)$$

При повороте вектора  $\pi$  на угол  $-2\alpha_3$   $\operatorname{Im} \pi = 0$ , а  $\operatorname{Re} \pi = -|\pi|$ . Как следует из (9), коэффициент сопряженной симметрии контура  $\exp\{-i\alpha_3\}\Gamma$  будет при этом минимальным, а коэффициент сопряженной антисимметрии — максимально возможным, т. е. ЭВ контура  $\exp\{-i\alpha_3\}\Gamma$  отвечают наилучшим образом условию сопряженной симметрии  $\gamma(n) = -\gamma^*(k-n)$ . Контуры  $\Gamma_{CC}$  и  $\Gamma_{CA}$  в этом случае будут ортогональными в  $C^k$ .

**П р и м е р.** Проиллюстрируем на примере контура  $\Gamma = \{4i; 5 + 2i; 2 - 6i; -7\}$  полученные выше соотношения. Используя (6), находим разложение этого контура на контуры  $\Gamma_{CC}$  и  $\Gamma_{CA}$ :

$$\Gamma_{CC} = \{0; -1 + i; 2; -1 - i\}; \quad \Gamma_{CA} = \{4i; 6 + i; -6i; -6 + i\}.$$

При этом  $\|\Gamma\|^2 = 134$ ,  $\|\Gamma_{CC}\|^2 = 8$ ,  $\|\Gamma_{CA}\|^2 = 126$ ,  $q_{CC} = 0,06$  и  $q_{CA} = 0,94$ .

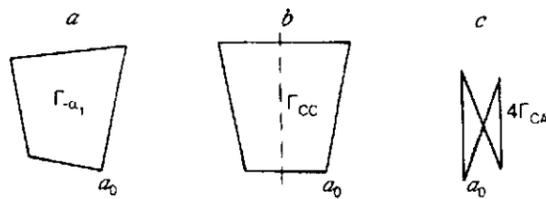


Рис. 3. Контур  $\Gamma$  (см. рис. 2), повернутый на собственный угол  $-\alpha_1$  (a), его СС-контур  $\Gamma_{CC}$  (b) и СА-контур  $\Gamma_{CA}$  (c)

Спектры контуров  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{CC}$  и  $\Gamma_{CA}$  имеют соответственно вид:

$$P_{\Gamma} = \{0; -2i; 4 - 4i; -2 + 22i\}; \quad P_{\Gamma_{CC}} = \{0; 0; 4; -4\}; \quad P_{\Gamma_{CA}} = \{0; -2i; -4i; 22i\}.$$

В контуре  $\Gamma$  преобладает сопряженная антисимметрия. Определим вектор  $\pi$ , а также его аргумент и модуль:  $\pi = -118 - 52i$ ;  $|\pi| = 128,95$ ;  $\arg[\pi] = -156,218^\circ$ .

С помощью выражений (11)–(13) найдем собственные углы контура  $\Gamma$ :  $\alpha_1 = -78,109^\circ$ ;  $\alpha_2 = -123,109^\circ$ ;  $\alpha_3 = -168,109^\circ$ .

При этом  $\exp\{-i\alpha_1\}\Gamma = \{-3,91 + 0,82i; -0,93 + 5,3i; 6,28 + 0,72i; -1,44 - 6,84i\}$ ;  $q_{CC} = 0,981$ .

Коэффициент сопряженной симметрии близок в данном случае к единице, т. е. вырос примерно в 16 раз. Вследствие этого ЭВ  $\gamma(n)$  и  $\gamma^*(k-n)$  слабо отличаются друг от друга:  $\gamma(0) = -3,91 + 0,82i$  и  $\gamma^*(0) = -3,91 - 0,82i$ ;  $\gamma(1) = -0,93 + 0,53i$  и  $\gamma^*(3) = 1,44 + 6,84i$ ;  $\gamma(2) = 6,28 + 0,72i$  и  $\gamma^*(2) = 6,28 - 0,72i$ ;  $\gamma^*(3) = 1,44 - 6,84i$  и  $\gamma^*(1) = -0,93 - 0,53i$ . Контур  $\exp\{-i\alpha_1\}\Gamma = \Gamma_{-a_1}$  и соответствующие ему СС- и СА-контур показаны на рис. 3.

Запишем выражения для контура

$$\exp\{-i\alpha_2\}\Gamma = [-3,35 - 2,185i; -4,406 + 3,096i; 3,933 + 4,953i; 3,824 - 5,863i]$$

и соответствующих ему СС- и СА-контуров (рис. 4):

$$\Gamma_{CC} = [-3,35; -0,29 + 4,48i; 3,93; -0,29 - 4,48i];$$

$$\Gamma_{CA} = [-2,19i; -4,11 - 1,38i; 4,95i; 4,11 - 1,38i].$$

Энергии этих контуров одинаковы и равны:  $\|\Gamma_{CC}\|^2 = \|\Gamma_{CA}\|^2 = 67$ ,  $q_{CC} = q_{CA} = 0,5$ . Задаваемые формы очень схожи между собой.

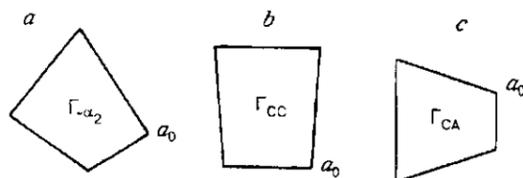


Рис. 4. Контур  $\Gamma$  (см. рис. 2), повернутый на собственный угол  $-\alpha_2$  (a), его СС-контур  $\Gamma_{CC}$  (b) и СА-контур  $\Gamma_{CA}$  (c)

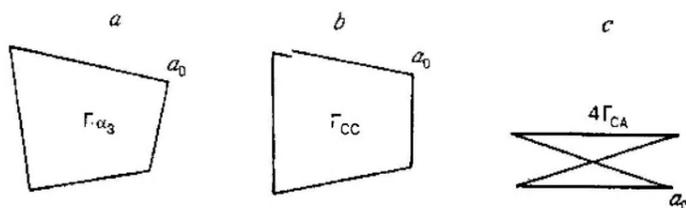


Рис. 5. Контур  $\Gamma$  (см. рис. 2), повернутый на собственный угол  $-\alpha_3$  (а), его СС-контур  $\Gamma_{CC}$  (б) и СА-контур  $\Gamma_{CA}$  (с)

Для контура  $\Gamma$ , повернутого на угол  $-\alpha_3$ , можно записать:

$$\exp\{-i\alpha_3\}\Gamma = \{-0,82 - 3,91i; -5,3 - 0,93i; -0,92 + 6,28i; 6,86 - 1,44i\},$$

$q_{CC} = 0,019$ . Этот контур и соответствующие ему СС- и СА-контур показаны на рис. 5.

Теперь уже в контуре преобладает сопряженная антисимметрия, а векторы  $\gamma(n)$  и  $-\gamma^*(k-n)$  близки друг к другу.

3. Симметрические свойства контуров взаимно корреляционной функции (ВКФ) и АКФ. При обработке комплекснозначных сигналов, например контуров изображений, корреляционный анализ дает возможность найти меру схожести исследуемого контура со всеми сдвинутыми его копиями или же со сдвинутыми копиями других контуров. Публикации, связанные со свойствами ВКФ и АКФ таких циклических сигналов, как контуры изображений, отсутствуют. Учитывая важную роль этих функций, целесообразно дать определение и рассмотреть их основные свойства. ВКФ контуров  $N = \{v(n)\}_{0, k-1}$  и  $\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1}$  введем на основе определения скалярного произведения этих контуров [8]:

$$(N, \Gamma) = \sum_{n=0}^{k-1} v(n)\gamma^*(n). \quad (14)$$

Для получения контура  $T = \{\tau(m)\}_{0, k-1}$  ВКФ контуров  $N$  и  $\Gamma$  полагаем, что их ЭВ обладают свойством периодичности:  $v(n) = v(n \pm \alpha k)$ ,  $\gamma(n) = \gamma(n \pm \alpha k)$ , а начальная точка одного из контуров, например  $\Gamma$ , меняется скользящим образом:

$$\tau(m) = \sum_{n=0}^{k-1} v(n)\gamma^*(n+m), \quad m = 0, 1, \dots, k-1. \quad (15)$$

Число  $\alpha$  здесь и далее равно  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Так как скалярное произведение в  $C^k$  из-за наличия мнимой части более информативно [8], ВКФ (15) позволяет обнаружить большую степень близости контуров  $N$  и  $\Gamma$ , чем ВКФ вещественных сигналов [4]. Договоримся переменную  $m$  в выражении (15) называть внешней, а  $n$  — внутренней. Перечислим легко доказуемые свойства ВКФ.

периодичность:  $\tau(m) = \tau(m \pm \alpha k)$ ;

симметричность:  $\tau(m) = \tau(-m) = \tau(k-m)$ ;

эквивалентность:  $\tau(m) = \sum_{n=0}^{k-1} v(n)\gamma^*(n+m) = \sum_{n=0}^{k-1} v(n-m)\gamma^*(n)$ ;

сопряженность:  $\tau(m) = \sum_{n=0}^{k-1} v(n)\gamma^*(n+m) = \sum_{n=0}^{k-1} v(n-m)\gamma^*(n)$ .

Свойства контуров АКФ следуют из того, что эта функция есть частный случай ВКФ при  $N = \Gamma$ . Кроме периодичности ЭВ-контур  $T = \{\tau(m)\}_{0, k-1}$  этой функции, отметим следующее:

1) нулевой отсчет равен энергии контура и является максимальным по модулю:  $\tau(0) \geq |\tau(m)|, m = 0, 1, \dots, k-1$ ;

2) смена знака или места внешней переменной  $m$  приводит к обратному порядку отсчетов АКФ:  $\tau(k-m) = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n)\gamma^*(n-m) = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n+m)\gamma^*(n)$ ;

3) отсчеты  $\tau(m)$  и  $\tau(k-m)$  АКФ являются комплексно-сопряженными числами, т. е.  $\tau(m) = \tau^*(k-m) = \tau^*(-m)$ . Если построить график модулей отсчетов АКФ  $\tau(m)$ , то он будет характеризоваться центральной симметрией относительно отсчета  $\tau(0) = \|\Gamma\|^2$ , периодичностью отсчетов с периодом, равным  $k$ , и симметрией внутри каждого периода относительно центрального отсчета (рис. 6, c).

Контур  $T = \tau(m)$  в соответствии со свойством 3 будет сопряженно-симметрическим (рис. 6, b), и его спектр Фурье будет чисто вещественным. Это становится понятным, если учесть, что роль такого спектра выполняет энергетический спектр исходного контура  $\Gamma$  (рис. 6, a).

4. Симметрические свойства выходного контура согласованного фильтра. Контурный согласованный фильтр (КСФ) формирует на своем выходе сигнал  $H = \{\eta(m)\}_{0, k-1}$  [9, 10], где

$$\eta(m) = \sum_{n=0}^{k-1} \nu(n)\gamma^*(n-m+k-1) = \sum_{n=0}^{k-1} \nu(m-n)\gamma^*(k-n-1), \quad (16)$$

и является технической реализацией устройства, вычисляющего ВКФ или АКФ контурных сигналов. Уточним характер связи между АКФ и выходным сигналом КСФ. Сравнивая между собой выражения (15) и (16) для АКФ и выходного сигнала КСФ, т. е.

$$\tau(m) = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n)\gamma^*(n+m) \quad \text{и} \quad \eta(m) = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n)\gamma^*(n-m+k-1),$$

приходим к выводу, что отношение соответствия между ними имеет вид  $\eta(m) = \tau(k-m-1)$  и  $\tau(m) = \eta(k-m-1)$ . Отсюда следует, что выходной сигнал КСФ, определяемый (16), представляет собой сдвинутую на  $k$  отсчетов АКФ фильтруемого согласованного сигнала и порядка следования отсчетов

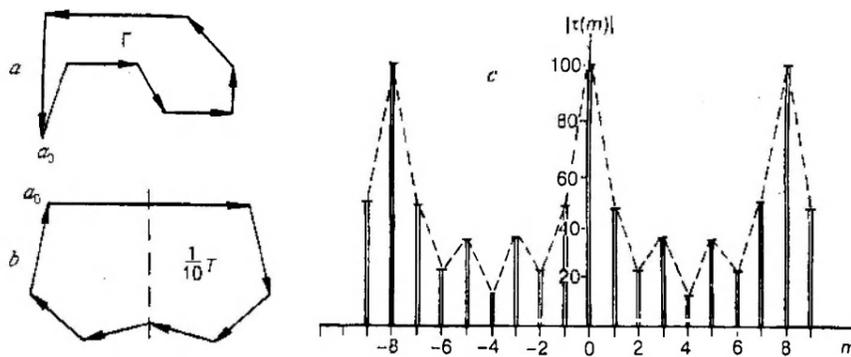


Рис. 6. Контур  $\Gamma$  (a), контур  $\frac{1}{10}T$  его АКФ (b) и фрагмент графика модулей АКФ (c)

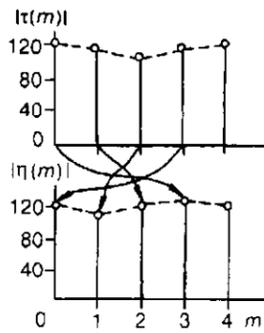


Рис. 7. Соответствие между модулями отсчетов АКФ и КСФ для контура на рис. 2, а

$\eta(m)$  и  $\tau(m)$  у них противоположны (рис. 7). Между контурами  $T = \{\tau(m)\}_{0, k-1}$  и  $H = \{\eta(m)\}_{0, k-1}$  имеется следующая зависимость:  $T = H_{\text{обр}}^{(k-1)}$  и  $H = T_{\text{обр}}^{(1)}$ . Здесь  $H_{\text{обр}}^{(k-1)}$  — контур, обратный контуру  $H$  со сдвинутой на  $(k-1)$  ЭВ начальной точкой;  $T_{\text{обр}}^{(1)}$  — контур, обратный контуру  $T$  со сдвинутой на один ЭВ начальной точкой (рис. 8).

Представляет интерес трансформация свойств АКФ в свойства КСФ. Свойство сопряженной симметрии АКФ  $\tau(m)$ , обуславливающее сопряженную симметрию контура АКФ, принимает следующий вид:

$$\eta(m) = \eta^*(k - m - 2), \quad m = 0, 1, \dots, k - 1. \quad (17)$$

Контур АКФ и КСФ прослеживаются в противоположных направлениях: первый — против, второй — по часовой стрелке. Выражения для  $\tau(m)$  и  $\eta(m)$  показывают, что ЭВ контура  $H$  расположены симметрично. Отсчет  $\eta(k-1) = \|\Gamma\|^2$  представляет собой горизонтально расположенный вектор, и для него справедливо  $\eta(k-1) = \eta^*(k-1)$ .

Поэтому вертикальная ось симметрии будет проходить через середину этого вектора. Если размерность  $k$  — четное число, то  $\eta(k/2 - 1) = \eta^*(k/2 - 1)$ , т. е. и этот ЭВ задается чисто вещественными числами. В результате контур  $H$  будет содержать второй горизонтально расположенный вектор.

**Выводы и обсуждение результатов.** Проведенный анализ свойств симметрии произвольного контура позволяет сделать следующие выводы.

Произвольный контур представляется суммой СС- и СА-контуров, ортогональных в  $E^{2k}$ , причем сумма энергий этих контуров равна энергии исходного контура.

Существуют два собственных угла  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  произвольного контура, компенсация которых путем поворота контура на углы  $-\alpha_1$  или  $-\alpha_3$  приводит к максимальному проявлению сопряженной симметрии или антисимметрии. СС- и СА-контур при этом ортогональны не только в  $E^{2k}$ , но и в  $C^k$ .

Для произвольного контура существует собственный угол  $\alpha_2$ , компенсация которого обеспечивает проявление в одинаковой степени свойств сопряженной симметрии и антисимметрии. При этом исходный контур разлагается на два равных по энергии СС- и СА-контура.

Степень проявления симметрических свойств произвольного контура, а также близости форм составляющих его СС- и СА-контуров определяется

величиной  $\frac{\pi}{\|\Gamma\|^2} = \frac{1}{\|\Gamma\|^2} \sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n)\gamma(k-n)$ , являющейся

модулем нормированного скалярного произведения исходного контура  $\Gamma$  и комплексно-сопряженного обратного контура  $\Gamma_{\text{обр}}^*$ . Чем ближе эта величина к единице, тем сильнее проявляются данные свойства.

Из полученных результатов также следует, что АКФ произвольного контура представляет собой СС-контур, начальный вектор которого всегда горизонта-

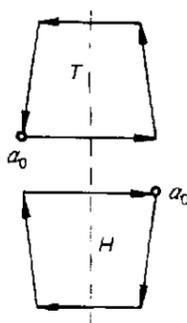


Рис. 8. Соотношение между контурами  $T$  и  $H$  для контура на рис. 2, а

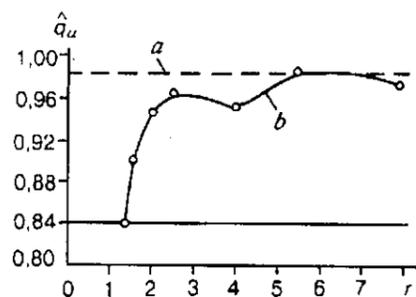


Рис. 9. Результат статистического эксперимента для контура  $\exp\{-i\alpha_1\}\Gamma$ , приведенного на рис. 2, а:

$a$  — значение  $q_{CC}$  при отсутствии шума;  $b$  — оценки математического ожидания  $q_{CC}$  при воздействии контурных шумов

лен, направлен вправо и имеет максимальный модуль. Также сопряженно-симметрическим оказывается выходной контур фильтра при прохождении через него согласованного контура. Установлена связь между контуром АКФ и выходным контуром согласованного фильтра: они соотносятся между собой как взаимно обратные комплексно-сопряженные контуры со сдвинутыми начальными точками. Кроме того, показано, что АКФ и выходной контур согласованного фильтра имеют чисто вещественные спектры Фурье.

Проведенный анализ дает достаточно простую возможность получения пар ортогональных в  $S^k$  контуров или пар разных, но достаточно близких по форме контуров. Для этого необходимо разложить произвольный контур на СС- и СА-контуры, предварительно в первом случае повернув исходный на угол  $-\alpha_1$  или  $-\alpha_3$ , во втором случае — на угол  $-\alpha_2$ .

Положения контуров, связанные с их собственными углами, позволяют нормировать изображения перед их распознаванием по углу поворота. Коэффициенты сопряженной симметрии  $q_{CC}$  и сопряженной антисимметрии  $q_{CA}$  являются информативными слабо подверженными влиянию шумов признаками формы. Это подтверждается графиком на рис. 9 с результатами измерения  $q_{CC}$  для контура на рис. 2, а, повернутого на угол  $-\alpha_1 = 78,109^\circ$  при различных уровнях нормально распределенного шума. Из графика видно, что наличие шума в принципе снижает значение  $q_{CC}$ , но оно является незначительным вплоть до отношения сигнал/шум  $r = \|\Gamma\|/\sigma\sqrt{2k}$  [9], близкого к единице. Следует отметить, что визуально форма изображения является сильно искаженной уже при  $r = 2, \dots, 3$ , а хорошо заметные искажения наблюдаются даже при  $r = 8$ .

В заключение в плане дискуссии можно по результатам данной работы высказать следующее предположение о роли симметрических свойств произвольной формы при восприятии изображений. Распознавание зрительных образов в окружающей человека обстановке является для него жизненно важным. Чем быстрее и легче происходит этот процесс, тем больше времени остается для реализации принятых по результатам распознавания решений. В этом плане сложные изображения с большим количеством симметричных повторяющихся фрагментов (орнаменты, узоры) распознаются значительно быстрее, чем «безобразные» изображения. Чем больше в изображении симметричных элементов, тем приятней становится его восприятие. Как показано в данной работе, симметрические свойства формы зависят от угла поворота плоского изображения. Поэтому то или иное изображение нам кажется более привлекательным, если угол поворота выбран равным, например, первому собственному углу, когда коэффициент сопряженной симметрии максимален.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковязин С. А. О понятии средней формы случайного измеряемого множества // Динамика химических и биологических наук: Сб. научн. тр. /Под ред. В. И. Быкова. Новосибирск: Наука, 1989.
2. Пытьев О. П. Задачи морфологического анализа изображений // Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса. М.: Наука, 1984.
3. Фурман Я. А. О понятии формы плоского изображения // Автометрия. 1992. № 5. С. 113.
4. Фурман Я. А., Юрьев А. Н., Яншин В. В. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений. Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1992.
5. Фурман Я. А. Помехоустойчивые символы для передачи сообщений // Автометрия. 1996. № 1. С. 42.
6. Фурман Я. А. О двух замечательных видах замкнутых контуров изображений // Радиотехника и электроника. 1993. 38, № 6. С. 1054.
7. Каппелини В. и др. Цифровые фильтры и их применение: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1982.
8. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974.
9. Furman Ya. A., Yanshin V. V. Extraction and linear filtering of closed polygonal contours of images // Pattern Recognition and Image Analysis. 1994. 4, N 2. P. 146.
10. Фурман Я. А. Согласованная фильтрация контуров изображений // Радиотехника. 1995. № 6. С. 30.

*Поступила в редакцию 9 января 1997 г.*

---

Реклама продукции в нашем журнале — залог Вашего успеха!