

УДК 621.391.2

А. М. Искольдский

(Екатеринбург)

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ НОВЫХ МЕТОДОВ
АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ
В ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ. Ч. II

В первой части работы рассмотрена такая характеристика выборки, как детерминированность. В общем случае вместе с ростом шага квантования сигнала по времени детерминированность падает, при уменьшении его детерминированность растет, и, если последовательность состоит всего из трех пар, она всегда равна единице. Во второй части работы введена другая характеристика выборки, а именно представительность, которая ведет себя альтернативным образом: слишком короткие выборки оказываются непредставительными, и по мере увеличения шага квантования сигнала по времени представительность выборки растет. Можно считать, что мы имеем дело с детерминированным сигналом, если представительная выборка является детерминированной.

Введение. Напомним некоторые определения и алгоритмы обработки данных, рассмотренные в первой части [1].

Непрерывный сигнал $x_0(t)$ считается одной из переменных динамической системы (необязательно конечномерной). После измерений (квантования сигнала по времени и амплитуде) этому сигналу отвечает конечная последовательность кодов, которую можно рассматривать как последовательность натуральных чисел:

$$X(t) = \{x_t\}, \quad (1)$$

где целочисленный параметр $t = 0, \dots, N_0 - 1$ играет роль дискретного времени.

Если следить за тем, чтобы использовался весь диапазон кодов и сигнал не выходил за границу этого диапазона:

$$2^{k_0-1} \leq \max x_t < 2^{k_0}, \quad (2)$$

то шаг квантования сигнала по времени — единственный параметр, который можно изменять по своему усмотрению:

$$\Delta t = \Delta t_0, \dots, 2^{m_0} \Delta t_0. \quad (3)$$

Величина $p_0 = \log N_0$ характеризует объем памяти измерительного устройства, а всевозможные выборки (режимы измерения) могут быть представлены матрицей:

$$X(t) = \|X(t)\|_{ijk}, \quad (4)$$

где $i = 0, \dots, p_0 - 1$, $j = 0, \dots, k_0 - 1$, $k = 0, \dots, m_0 - 1$.

Выборка X_{000} отвечает минимальному $\min \Delta t = \Delta t_0$. Среди этих выборок есть подмножество *первичных*, а именно тех, что получают непосредственно

в результате измерений. Они имеют нули в первых двух позициях и отличаются друг от друга третьим индексом.

Сдвиг (увеличение на единицу) по первому индексу разделяет первичную выборку на две половины, по второму — имитирует измерения с вдвое меньшим амплитудным разрешением.

В основе методики обработки сигнала лежит соображение о том, что при «правильном» выборе режима (тройки $(ijk)_{opt}$) интересующие нас свойства динамики $X_{ijk}(t)$ совпадают с таковыми для $Z_{ijk}(\tau)$, где последовательность $Z_{ijk}(\tau)$ представляет собой сжатую определенным образом $X_{ijk}(t)$:

$$\text{Comp}(X_{ijk}) = Z_{ijk}. \quad (5)$$

В результате сжатия из последовательности кодов возникает упорядоченная последовательность, в которой на нечетных позициях стоит собственно код, а на четных — число последовательных его повторений. $Z_{ijk}(\tau)$ упорядочена по времени τ :

$$\tau = 0, \dots, N_{ijk}, \quad (6)$$

где N_{ijk} — не что иное, как число пар, зависящее от свойств сигнала, в последовательности Z_{ijk} . Z_{ijk} представляет собой маршрут, локализованный в пределах площади:

$$S_{ijk} = \Delta x_{ijk} \times \Delta y_{ijk}, \quad (7)$$

где $\Delta x_{ijk} = (\max x_{ijk} - \min x_{ijk})$ — размах выборки по кодам, $\Delta y_{ijk} = (\max y_{ijk} - \min y_{ijk})$ — по числу повторений.

1. Репрезентативность выборки. Определим *репрезентативность* (статистическую значимость) выборки таким образом, как это делается обычно. Тем самым будут учтены две альтернативные тенденции: рост статистической значимости выборки при увеличении шага квантования сигнала по времени и одновременное уменьшение такого ее свойства, как детерминированность. Соответственно при уменьшении шага статистическая значимость выборки (ее определение дано ниже) падает, хотя детерминированность растет.

Если фиксировать первый индекс в (4), например, использовать всю доступную в однократном измерении память ($i = 0$, или, что то же самое, $p = p_0$)*, то остаются две возможности: уменьшать амплитудное разрешение (увеличивать первый из оставшихся индексов)** и шаг квантования сигнала по времени (изменять второй).

Для простоты будем считать, что размер буферной памяти измерителя фиксирован и нам известна величина N_{0jk} — полное число пар, возникающих после процедуры сжатия (5).

Необходимо ответить на вопрос: можно ли считать рассматриваемую выборку представительной в статистическом смысле, имея две величины N_{0jk} и S_{0jk} — полное число узлов в (7)?

Считаем выборку представительной, если, с одной стороны,

$$R_p x = \log N_{0jk} - \log(\max x_{0jk} - \min x_{0jk}) \geq C_R(x), \quad (8)$$

а с другой —

$$R_p y = \log N_{0jk} - \log(\max y_{0jk} - \min y_{0jk}) \geq C_R(y), \quad (9)$$

* Как правило, $p_0 \geq k_0$. Причем для $k_0 = 64$ часто $p_0 = 128$, а для $k_0 = 8$ $p_0 = 10$ или 11.

** Это можно делать для любой фиксированной выборки.

где $C_R(x)$, $C_R(y)$ — некоторые положительные числа, вообще говоря, разные. Пока предполагаем, что действительно соотношение (2). Диапазон ijk , в котором неравенства (8), (9) совместны, является таким, где выборки X_{ijk} представительные в статистическом смысле.

1.1. *Представительность случайных выборок.* Ниже покажем, что энтропия псевдослучайной последовательности, пропорциональная числу различных используемых в ней кодов, перестанет изменяться, как только $C_R \geq 2$.

На рис. 1 приведена зависимость энтропии выборки, представляющей собой последовательность байтов, порожденную датчиком псевдослучайных чисел, от логарифма длины выборки. Когда $p \geq 10$, энтропия выходит на максимум ($\max H_8 = 8$ бит) и перестает изменяться. В этой связи выборки с $p \geq 10$ ($p \geq (k + 2)$) естественно считать представительными.

Для случайных последовательностей вероятность получения двух и более идущих подряд кодов относительно мала, так что основная процедура сжатия, сводящаяся к подсчету идущих подряд одинаковых кодов, оказывается здесь малоэффективной. Например, для $k_0 = 8$, $p_0 = 11$ последовательность из 2048 байт «сжимается» до ≈ 2040 пар.

2. **Аттрактор Лоренца.** Рассмотрим реализацию, отражающую поведение x -компоненты известной системы нелинейных уравнений Лоренца, возникающей при исследованиях термоконвекции (см., например, [2]):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma y - \sigma x, \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{10}$$

На рис. 2 приведена реализация (10), полученная при условиях: число Рэлея $r = 26$, число Прандтля $\sigma = 10$, геометрический фактор $b = 8/3$. Система находится в установившемся режиме, и ее аттрактор странный. Выборка представляет собой последовательность из 8192 ($p_0 = 13$) 16-разрядных ($k_0 = 16$) кодов.

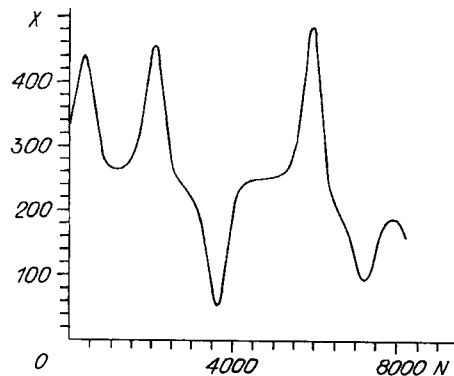


Рис. 2

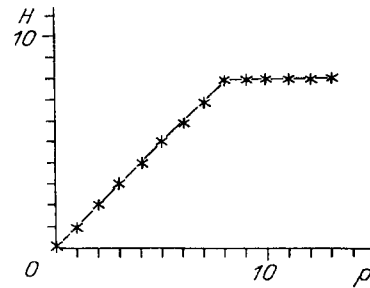


Рис. 1

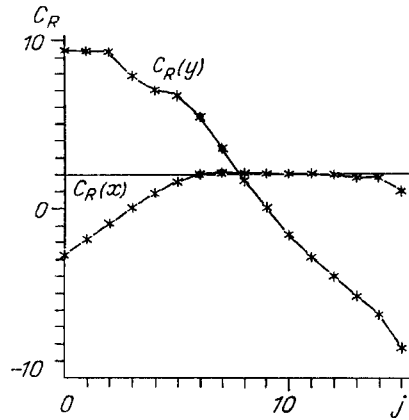


Рис. 3

На рис. 3 представлены графики критериальной пары из (8), (9) для выборки $X_{0,7,0}$, соответствующей рис. 2. Видно, что критерию представительности $C_R(x) = C_R(y) = 2$ удовлетворяют две из 16 возможных выборок, а именно выборки с амплитудным разрешением, отвечающим 10 и 9 битам ($j = 6, 7$).

Если вдвое уменьшить шаг квантования сигнала по времени, то число представительных выборок падает до нуля: возникает ограничение снизу на величину шага квантования сигнала по времени, так как в этом случае падает статистическая значимость. Ясно, что каждой фиксированной паре $C_R(x)$, $C_R(y)$ соответствует минимальный шаг Δt_0 , при котором область совместности критериальных неравенств существует.

При увеличении шага квантования сигнала по времени относительное число статистически значимых выборок, отвечающих одной и той же первичной, растет, однако при этом каждая из них становится «более случайной». Изложенное иллюстрирует табл. 1. В ней по горизонтали отложена величина j , а по вертикали — k . Как уже сообщалось, минимальному шагу по времени Δt_0 соответствует $k = 0$.

Знак «+» отвечает тем наборам индексов jk , для которых неравенства (8), (9) совместны при $C_R(x) = C_R(y) = 2$. Напомним, что здесь речь идет о первичных выборках с $i = 0$.

2.1. Детерминированность. Ограничение сверху на Δt . Для детерминированных (неслучайных) выборок проблема определения оптимальных условий измерений сводится к поиску разумного компромисса между детерминированностью и статистической значимостью.

В первой части работы обсуждается критерий детерминированности, при выполнении которого траектория (в S_{0jk}) приходит в наиболее посещаемую точку решетки только из близлежащих:

$$D_{0jk} \approx D(\Omega_{0jk}), \quad (11)$$

Таблица 1

k, j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
1	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-

Таблица 2

k, j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
1	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

где первая величина представляет собой кратность выборки (максимальное число посещений одного и того же узла S_{0jk}), а вторая — число отделимых прямоугольников, покрывающих этот узел.

В табл. 2 приведены данные, касающиеся строгого равенства ($D_{0jk} = D(\Omega_{0jk})$). Видно, что в отличие от табл. 1 здесь число выборок, удовлетворяющих заданному критерию, *падает* с увеличением шага квантования сигнала по времени.

Если потребовать, чтобы одновременно выполнялись как условия (8), (9), так и (11), то из 64 выборок выделяются шесть, а именно: $X_{0,6,0}$, $X_{0,7,0}$; $X_{0,7,1}$, $X_{0,8,1}$; $X_{0,9,2}$, $X_{0,10,2}$ — по две выборки для каждого шага по времени.

В итоговой табл. 3 знаком «O» помечены указанные выборки. Знак «-» отвечает выборкам, не удовлетворяющим ни одному из критериев. Представительные выборки помечены знаком «+», расположенным слева от разделителя, а детерминированные — этим же знаком, стоящим справа от разделителя.

2.1.1. Простые критерии детерминированности. С практической точки зрения критерий детерминированности (11) может оказаться неудобным, так как для его нахождения приходится решать достаточно громоздкую систему неравенств.

Можно предложить более простые критерии, для построения которых достаточно иметь лишь следующие пять параметров, представляющих выборку:

$$\min x, \max x, \min y, \max y, N. \quad (12)$$

Один из таких критериев свяжем с тем обстоятельством, что для детерминированных процессов в некотором диапазоне (близком к тому, где выполняется (11)) число пар N_{ijk} в последовательности Z_{ijk} уменьшается приблизительно вдвое при возрастании j на единицу.

На рис. 4 приведен график этой зависимости для последовательности $X_{0,0}$.

Можно потребовать выполнения критерия

$$D_{ijk}^* = N_{ijk} / N_{i(j+1)k} > |2 - \epsilon_*|, \quad (13)$$

где ϵ_* — малая величина, нужным образом подобранная.

Таблица 3

k, j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-	-	-	-	-	-	O	O	-/+	-/+	-	-	-	-	-	-
1	-	-	-	-	-	-	+/-	O	O	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	+/-	+/-	+/-	+/-	O	O	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	+/-	+/-	+/-	+/-	+/-	+/-	+/-	-	-	-	-

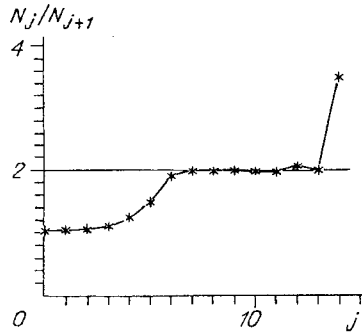


Рис. 4

Так если принять $\varepsilon_* = 0,05$, то из всей матрицы X_{ijk} будут отобраны следующие четыре:

$$X_{0,7,0}, X_{0,8,1}, X_{0,9,2}, X_{0,10,3}. \quad (14)$$

Видно, что в число отобранных попали три выборки, удовлетворяющие критерию (11).

В качестве критерия детерминированности можно также использовать то обстоятельство, что для случайных выборок практически невозможно иметь

$$\min u \geq 2, \quad (15)$$

тогда как для детерминированных этого можно добиться, изменяя j и k . Критерий (15) является более «жестким», чем (13). Например, если по формуле (13) отбирается выборка $X_{0,8,1}$, то по (15) будет отобрана $X_{0,9,1}$. В общем случае весь ряд отобранных выборок оказывается смещенным по j на одну позицию вправо относительно (14).

2.2. *Статистические свойства. Сигнал и шум.* Каждая из выборок, например $X_{0,7,0}$, после сжатия принимает вид последовательности пар:

$$\text{Comp}(X_{0,7,0}) = Z_{0,7,0}(\tau), \quad (16)$$

где $\tau = 0, \dots, N_{0,7,0}$.

Последовательность (16) представляет собой $\cong 1800$ пар таких, что и для первой компоненты пары (код x) $\text{Per}x = 2,07 > C_R(x) = 2$ и для второй (число повторений y) — $\text{Per}y = 3,52 > C_R(y) = 2$. Указанный уровень представительности означает, что число испытаний (в данном случае 1800) в 4 раза больше, чем доступное число позиций по x ($\max x - \min x$), и в 11 раз больше, чем по y .

Детерминированность выборки характеризуется числом

$$\varepsilon_{0,7,0} = 0,037 < \varepsilon_* = 0,05.$$

2.2.1. *Отношение сигнал/шум. Эмпирические статистики.* Выборка $X_{0,7,0}$ получена из первичной $X_{0,0,0}$. Сама эта выборка классифицирована как детерминированная. Тогда несколько младших разрядов первичной выборки ($j_* < 7$) можно интерпретировать как шум. Введем обозначение:

$$\text{Sdn}(0, j_*, 0) = k_0 - j_*. \quad (17)$$

Величина (17) есть двоичный логарифм отношения сигнал/шум для соответствующей выборки. На основании (17) из (14) можно выделить всего одну выборку — $X_{0,7,0}$. В данном разделе будем рассматривать именно ее (см. рис. 2).

Эмпирические статистики удобно характеризовать следующими тремя моментами:

$$\gamma_0(x) = \frac{\sqrt{D(x)}}{E(x)}, \quad \gamma_0(y) = \frac{\sqrt{D(y)}}{E(y)}, \quad (18)$$

где γ_0 — относительная ширина эмпирического распределения; D и E — дисперсия и среднее соответственно для кодов и чисел повторения.

Для рассматриваемой выборки при $j_* = 6$ $\gamma_0(x) = 0,088$, $\gamma_0(y) = 0,128$:

$$\gamma_1(x) = \frac{\mu_3(x)}{D(x)^{3/2}}, \quad \gamma_1(y) = \frac{\mu_3(y)}{D(y)^{3/2}}. \quad (19)$$

Здесь γ_1 — коэффициент асимметрии; μ_3 — третий центральный момент соответствующего распределения.

Для рассматриваемой выборки $\gamma_1(x) = -0,254$, $\gamma_1(y) = 10,5$:

$$\gamma_2(x) = \frac{\mu_4(x)}{D(x)^2} - 3, \quad \gamma_2(y) = \frac{\mu_4(y)}{D(y)^2} - 3, \quad (20)$$

где γ_2 — коэффициент эксцесса; μ_4 — четвертый центральный момент соответствующего распределения.

Для рассматриваемой выборки $\gamma_2(x) = -1,12$, $\gamma_2(y) = 153$.

Видно, что наибольшие различия между статистическими свойствами двух компонент пары для детерминированной части выборки касаются эксцесса: если для статистики кодов этот коэффициент отрицательный (вершина распределения более плоская, чем у нормального), то эмпирическая плотность вероятности для чисел повторения имеет острую вершину (большой положительный коэффициент эксцесса).

Кроме того, в отличие от распределения по кодам в распределении чисел повторений имеются далеко отстоящие отсчеты, отделенные от основного (компактного) массива, где локализовано среднее и наиболее вероятное значение, полосой из нескольких идущих подряд нулей. Отбрасывать далеко отстоящие отсчеты нельзя, так как они соответствуют достаточно продолжительному во времени отрезкам сигнала. Для циклических процессов время между посещениями зоны отдаленных отсчетов должно быть близким к периоду цикла. Если это не так, то можно сделать вывод о том, что мы имеем дело с детерминированным хаотическим процессом.

Подчеркнем, что вывод основан на анализе *одной* выборки и здесь не требуется рассматривать *длинную временную последовательность*. Увеличение общего времени наблюдения приходится делать тогда, когда мы интересуемся *структурой* хаоса или иными более подробными характеристиками аттрактора, например его фрактальной размерностью.

Если определить те же характеристики для младших разрядов выборки X_{000} , которые интерпретируем как шум, и сравнить их с приведенными выше, то окажется, что основное отличие касается эксцесса: для шума коэффициент эксцесса равен $\gamma_2^n(y) = 2581$. Практически это означает, что распределение шума близко к экспоненциальному и не имеет точки перегиба. Для сравнения: распределение $p = e^{-x}$ имеет эксцесс $\gamma_2^e = 1521$.

2.3. Разведочный анализ. Обычно, наряду с получением цифровых данных, строится ряд графиков для визуального анализа выборки. Один из таких графиков имитирует пару $x(t)$, $x(t + \tau)$. Для этого исходная выборка смещается относительно самой себя на заданное время. В результате возникает последовательность пар отсчетов, длина которой меньше длины исходной выборки. Именно она представляет собой искомый график. Величина смещения подбирается таким образом, чтобы размеры графика по обеим координатам были бы близки друг другу.

В нашем случае поиск величины смещения τ облегчается тем, что уже найден разумный шаг квантования сигнала по времени. При этом можно зафиксировать, например, $\tau = N_0/4$. На рис. 5 приведен такой график для x -компоненты выборки X_{070} . На основе визуального анализа данного графика уже можно сделать вывод о том, что аттрактор соответствующей динамической системы не цикл (для цикла график должен быть замкнутой кривой) и, скорее всего, не инвариантный тор.

В отличие от стандартной ситуации мы имеем возможность строить график в координатах код — число повторений. На рис. 6 приведен такой график для той же самой выборки.

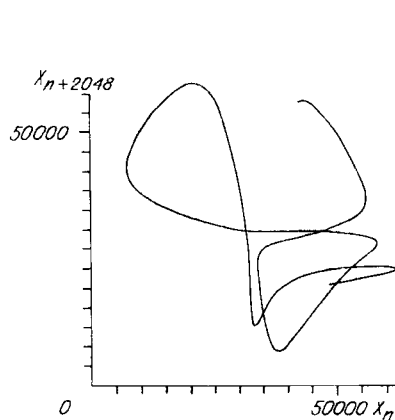


Рис. 5

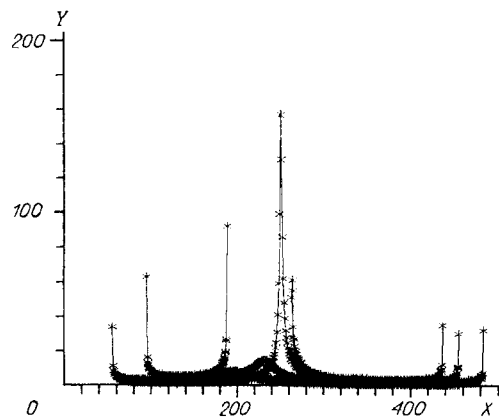


Рис. 6

Следующий шаг разведочного анализа связан с построением точечного отображения (отображения Пуанкаре). Последнее передает уже определенную глобальную структуру аттрактора. Для реализации такого отображения необходимо иметь значительное число выборок, так как из полного числа отсчетов одиночной выборки в отображение попадают единичные точки. Для реализации указанного отображения производится еще один сдвиг, в результате появляется матрица из трех столбцов, где третий представляет собой исходную выборку, смещенную относительно самой себя на $2\tau = N_0/2$. Всего из каждой выборки формируется трехстолбцовая матрица с числом строк $N_0/2$. Далее на график выводятся только те значения (пара, сформированная отсчетами первого и второго столбцов), которые удовлетворяют некоторому условию, задаваемому третьим. Как правило, это условие состоит в том, что на график выносятся точки, отвечающие направленному переходу через наиболее часто встречающийся код.

Если динамическая система задана в виде некоторого числа обыкновенных дифференциальных уравнений, то для построения матрицы из трех столбцов используют различные компоненты динамической системы. Для аттрактора Лоренца это может быть пара (x, y) , отобранная по условию, связанному с компонентой z .

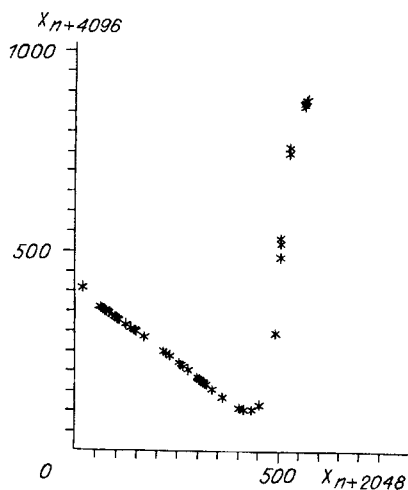


Рис. 7

На рис. 7 приведено отображение, построенное в результате обработки около 50 фрагментов сигнала, аналогичных рис. 5, а на рис. 8 — «истинное» отображение, полученное стандартной процедурой с использованием x -, y -, z -компонент исходной системы уравнений, зарегистрированных с шагом, найденным в результате обработки одной из них, а именно x -компоненты.

Видно, что выбранный нами шаг по времени и величина смещения позволяют рассмотреть основные особенности аттрактора.

3. Инвариантный тор. Часто переход к хаосу идет через разрушение инвариантного тора. В частности, именно этот сценарий реализуется в семимодовой модели Франческини, которая будет нами рассмотрена ниже.

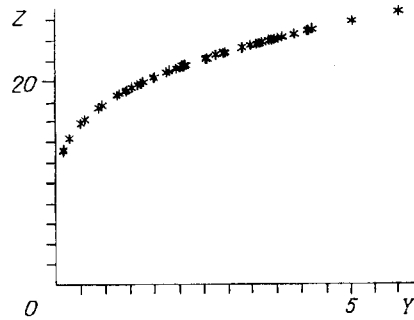


Рис. 8

В данном разделе рассмотрим модель инвариантного тора, введенную в [3] в связи с исследованиями конвективных структур в течении Куэтта.

Система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (10 + 5\cos\omega_2 t)\cos\omega_1 t, \\ x_2(t) &= (10 + 5\cos\omega_2 t)\sin\omega_1 t, \\ x_3(t) &= 8\sin\omega_1 t, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{31,376}{13}. \end{aligned} \quad (21)$$

3.1. *Оптимальные условия измерений.* В установившемся режиме регистрировалась переменная $x_1(t)$ из (21). Выборка $X(t)$ представляла собой 8192 16-разрядных слова. В табл. 4 знаком «О» помечены те клетки (пары $(j, k)_{\text{opt}}$), для которых

$$C_R(x) = C_R(y) = 2 \text{ и } D_{jk} = D(\Omega_{jk}), \quad (22)$$

т. е. условия, отвечающие представительным детерминированным выборкам.

Всего представительных детерминированных выборок, отвечающих заданным критериальным требованиям, в табл. 4 шесть. Максимальное отношение сигнала к шуму имеет выборка $X_{6,1}$. Для нее $Sdn = 10$.

Из четырех выборок, отвечающих одному и тому же шагу квантования сигнала по времени ($k = 1$), локальная размерность вложения, определенная так, как это сделано в разд. 4.1 первой части данной работы, равна

$$\dim Z_{6,1} = 5, \quad \dim Z_{7,1} = 2, \quad \dim Z_{8,1} = 3, \quad \dim Z_{9,1} = 3. \quad (23)$$

Видно, что правильный ответ ($\dim Z = 3$) получаем лишь в двух случаях.

Обращает на себя внимание выборка $Z_{7,1}$, поскольку для нее оценка размерности вложения, определенная так, как это постулировано в разд. 4 и 4.1

Таблица 4

k, j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	-	-	-	-	-	-/+	-/+	-/+	-/+	-/+	-/-	-/-	-/-	-/-	-	-
1	-	-	-	-	-	-/-	0	0	0	0	-/-	-/-	-/-	-/-	-	-
2	-	-	-	-	-	-/-	+/-	+/-	0	+/-	+/-	-/-	-/-	-/-	-	-
3	-	-	-	-	-	+/-	+/-	+/-	0	+/-	+/-	+/-	+/-	-/-	-	-
4	-	-	-	-	-	+/-	+/-	+/-	+/-	+/-	+/-	+/-	+/-	+/-	-	-

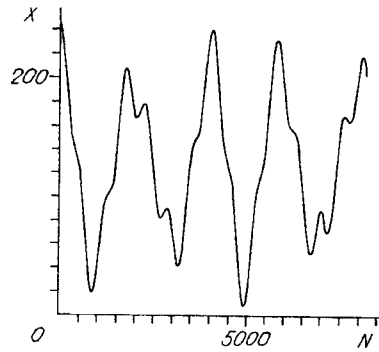


Рис. 9

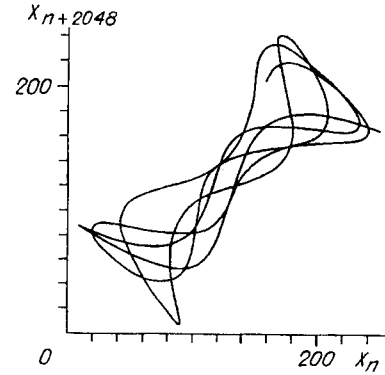


Рис. 10

первой части (по тому минимальному n , при котором $D_{7,1}^n = D_{7,1}^{n+1}$), оказалась заниженной. В разд. 5 этот случай рассмотрен подробнее.

Если ужесточить критерий детерминированности, потребовав выполнения (13) с уровнем значимости $\epsilon_* = 0,05$ или критерия (15), то первые две выборки из (23) будут отбракованы, а оставшиеся две ($Z_{8,1}, Z_{9,1}$) дают нужный ответ.

К вопросу об устойчивости этой характеристики выборки по отношению к малым деформациям траектории мы еще вернемся.

3.2. *Фазовые портреты.* На рис. 9 представлен фрагмент одной из детерминированных выборок, на рис. 10 — фазовый портрет динамической системы, полученный за счет сдвига первичной выборки на 2048 позиций, а на рис. 11 — отображение Пуанкаре, построенное по результатам обработки большого числа (около 200) подобных выборок.

Видно, что полученные изображения свидетельствуют в пользу того, что исследуемая система имеет аттрактор, близкий к инвариантному тору.

4. Семимодовая модель Франческини. Система уравнений модели выглядит следующим образом:

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 4\sqrt{5}x_2x_3 + 4\sqrt{5}x_4x_5,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -9x_2 + 3\sqrt{5}x_1x_3 + 3\sqrt{5}x_6x_7,$$

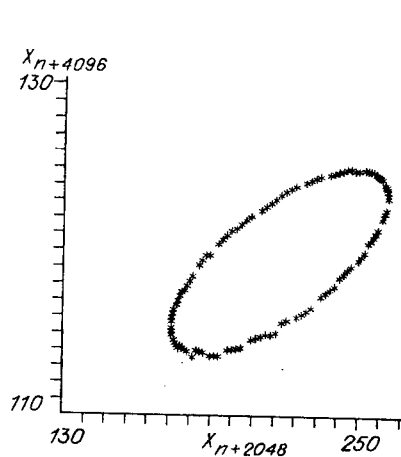


Рис. 11

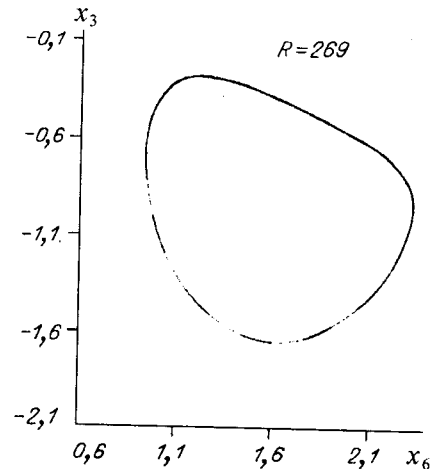


Рис. 12

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} &= -5x_3 + 9x_1x_7 - 7\sqrt{5}x_1x_2 + R, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -5x_4 - \sqrt{5}x_1x_5, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -x_5 - 3\sqrt{5}x_1x_4, \\ \frac{dx_6}{dt} &= -8x_6 - 4\sqrt{5}x_2x_7, \\ \frac{dx_7}{dt} &= -5x_7 + \sqrt{5}x_2x_4 - 9x_1x_3. \end{aligned} \tag{24}$$

В (24) внешний параметр R есть безразмерное число Рейнольдса. Эта модель, связанная с исследованиями хаоса в гидродинамике несжимаемой жидкости [4], интересна тем, что здесь в отличие от модели Лоренца переход к хаосу происходит мягко — через разрушение инвариантного тора. Наблюдается удвоение квазипериода тора: когда внешний управляющий параметр задачи $R = 269$ — точечное отображение — имеет вид, как на рис. 12, при $R = 277$ — как на рис. 13.

При увеличении управляющего параметра происходит относительно медленное разрушение инвариантного тора (см. рис. 13). В частности, при $R = 310$ отображение имеет характерный для странных аттракторов вид, как на рис. 14. (Рисунки заимствованы из [4].) Отображения строились для плоскости (x_3, x_6) , а отбор пар производился по вектору x_1 .

В [4] даны подробные сведения о том, по какому сценарию происходит переход к хаосу в данной задаче. Нас будут интересовать три характерные ситуации, соответствующие приведенному выше рисунку. В двух из них реализуется инвариантный тор, а в третьей — хаотический аттрактор.

На последующих рисунках приведены данные, полученные при обработке большого числа выборок, необходимого для построения точечных отображений по описанному выше алгоритму. Построение производилось для переменной x_3 из (24). Вначале (для каждого режима по R) находилась минимальный шаг Δt_0 , при котором все обрабатываемые X_{ijk} были бы представительными и детерминированными (по (8) с уровнями значимости (22)). Затем для каждой из выборок строилась трехстолбцовая матрица со сдвигами $\tau = 2048\Delta t_0$ и 2τ . Отбор точек велся по третьему столбцу. Отбирались те пары, для которых в

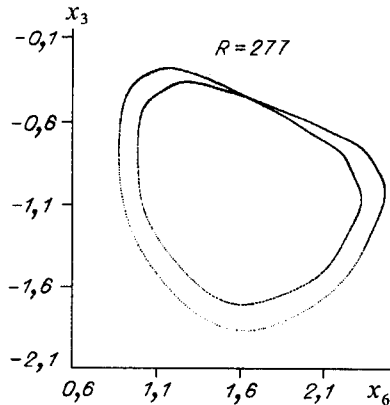


Рис. 13

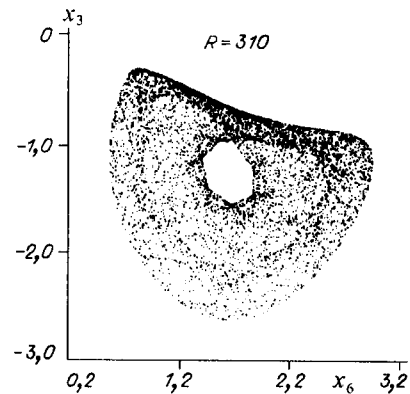


Рис. 14

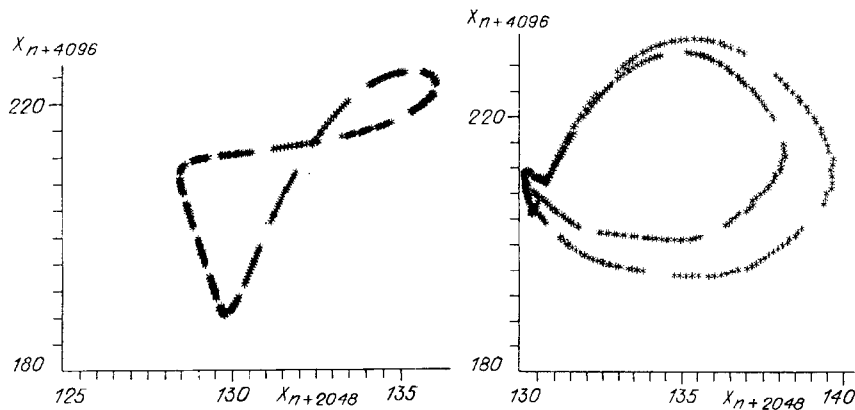


Рис. 15

Рис. 16

третьем столбце, во-первых, находился наиболее часто встречающийся код, а во-вторых, переход через него происходил от большего к меньшему.

Видно, что принятая процедура выбора шага и временных сдвигов позволяет (за счет анализа *одной* переменной) зафиксировать основные особенности аттрактора: наличие одной петли для $R = 269$ (рис. 15), двух — для $R = 277$ (рис. 16) и хаотического аттрактора для $R = 310$ (рис. 17).

Представляет интерес следующий факт, касающийся рассматриваемой модели: Δt_0 , найденные для трех *различных* режимов, равны друг другу. Его можно рассматривать как указание на то, что в задаче существует характерный временной интервал $T = N_0 \Delta t_0$, представляющий собой некоторый не зависящий от R инвариант.

5. Устойчивость к деформациям. В разд. 2 первой части данной работы рассматривается устойчивость введенных характеристик, таких как детерминированность и выборочная размерность вложения, по отношению к малым деформациям траектории. За счет малых деформаций (сводящихся к полному перебору возможных значений младших разрядов в x и y , составляющих пару $z = (x, y)$) порождается ($\text{min} u \geq 2$) четверка трансляционно-инвариантных траекторий, покрывающая исходную.

Если для одной из траекторий четверки рассматриваемое свойство (детерминированность или размерность вложения) сохраняется, то предлагается считать его устойчивым свойством исходной.

Ниже приведены результаты испытаний траекторий из (23) по отношению к малым деформациям согласно указанной процедуре.

Вывод о том, что данные траектории являются детерминированными, делается на основании результатов, представленных в табл. 5.

После малых деформаций в соответствии с описанным алгоритмом имеем результат, представленный в табл. 6.

Из сравнения приведенных выше таблиц следует, что такое свойство выделенных выборок, как *детерминированность*, не разрушается при малых шевелениях траектории.

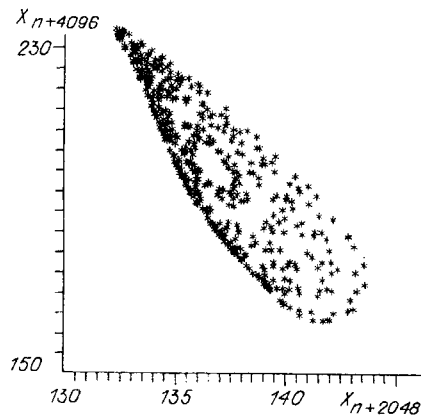


Рис. 17

Таблица 5

	$Z_{6,1}$	$Z_{7,1}$	$Z_{8,1}$	$Z_{9,1}$
D_{jk}	8	7	5	4
$D(\Omega)_{jk}$	8	7	5	4

Таблица 6

	$\tilde{Z}_{6,1}$	$\tilde{Z}_{7,1}$	$\tilde{Z}_{8,1}$	$\tilde{Z}_{9,1}$
D_{jk}	16	12	12	9
$D(\Omega)_{jk}$	16	12	12	9

Иначе ведет себя оценка размерности вложения. Эта характеристика оказывается гораздо менее устойчивой, чем собственно детерминированность. В качестве примера приведем экспериментальные результаты для выборки $Z_{7,1}$ (табл. 7).

Если исходная выборка имеет в соответствии с табл. 7 $\dim Z_{7,1} = 2$, то деформированная — $\dim \tilde{Z}_{7,1} = 3$. Есть основания полагать, что такое поведение слабо зависит от вида критерия (алгоритма оценивания).

Заключение. Основная трудность состоит в том, что теоретические модели используют непрерывные топологические пространства и в большинстве определений (в том числе в определениях различного рода размерностей через покрытия) фигурируют предельные переходы ($\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$), в то время как на основе измерений можно говорить о том или ином свойстве выборки лишь для определенного диапазона изменения некоторого параметра (точнее, для ограниченной области изменений ряда параметров). Выше мы попытались удовлетворить обоим требованиям следующим образом: структура критерия выбиралась так, чтобы оставалась прозрачной связь его с теорией, а далее решалась обычная задача классификации по обучающим выборкам (прецедентам).

Если в эксперименте оказывается, что мы имеем дело с представительной детерминированной выборкой, то такую ситуацию естественно рассматривать как свидетельство в пользу того, что в соответствующей (вообще говоря, пока неизвестной) краевой задаче математической физики имеется устойчивый конечномерный аттрактор.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 96-01-00214) в Институте электрофизики УрО РАН. Автор признателен К. Е. Боброву за проведение численных экспериментов, Н. Б. Волкову и Н. М. Зубареву за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Искольдский А. М. Разработка и исследование новых методов анализа результатов наблюдений в хаотической динамике. Ч. I // Автометрия. 1997. № 2. С. 61.
2. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Статистические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
3. Лукашук С. Н., Предтеченский А. А., Фалькович Г. Е., Черных А. И. О вычислении размерностей аттракторов по экспериментальным данным. Новосибирск, 1985. (Препр. / СО АН СССР. ИАиЭ; 280).
4. Franceschini V. Bifurcations of tori and phase locking in a dissipative system of differential equations // Physica D. 1983. 6. P. 285.

Поступила в редакцию 21 апреля 1997 г.