РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1998

УДК 621.3 : 519

М. С. Соппа

(Новосибирск)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОРМЫ ИМПЕДАНСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается обратная задача электромагнитного рассеяния, состоящая в определении формы поверхности по заданной диаграмме рассеяния. Для ее численного решения предлагается метод искусственного «погружения» данной задачи в более общую, когда искомым является также и поверхностный импеданс. Это позволяет перейти к нелинейному операторному уравнению, численное решение которого обладает высокой скоростью сходимости.

Постановка задачи. Рассеяние H-поляризованной плоской электромагнитной волны на цилиндрической поверхности S с импедансными свойствами описывается двумерным уравнением Гельмгольца с граничным условием [1, 2]:

$$\frac{\partial u}{\partial n} - i\zeta u_0 = 0, \tag{1}$$

где $\zeta = kW^1/W_0$; $k = 2\pi/\lambda$; λ — длина волны; $W_0 = 120\pi$ Ом; W^1 — поверхностный импеданс; $u = H_z$ — ненулевая компонента магнитного поля (u_0 — решение прямой задачи рассеяния на идеально проводящей поверхности S).

Обратная задача восстановления формы рассматривается в следующей постановке: найти функцию $\rho(\psi)$, $\psi \in [0, 2\pi]$, задающую контур искомой поверхности S, обеспечивающую приближение с достаточной точностью к заданной диаграмме рассеяния (ДР) $h_1(\varphi)$, $\varphi \in \{\varphi_j, j = 1, ..., m\}$, φ — полярный угол. Критерий приближения к заданной ДР понимается в среднеквадратичном смысле.

Переход к операторному уравнению. Проведем «погружение» рассматриваемой задачи в более общую задачу, когда искомым (помимо формы поверхности) является и ее поверхностный импеданс, т. е. функция $W(\psi)$.

Введем операторы обращения прямой задачи:

$$u = u_0 - iku_0A(\rho)^{-1}B(\rho)W/W_0,$$

где $A(\rho)\sigma = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S(\rho)} \frac{\partial g}{\partial n}\sigma dS$, $B(\rho)\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S(\rho)} g\sigma dS$ (g — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца). Тогда для рассеянного поля имеем

$$h = \sqrt{r}\exp(-ikr)\frac{ik}{2\pi W_0}\int\limits_{S(\rho)}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial n}A^{-1}B + g\right)W - \frac{\partial g}{\partial n}\right)u_0 dS. \tag{2}$$

Таким образом, функция $\rho(\psi)$ (решение обратной задачи) должна определяться из условия экстремальности:

$$J = \sum_{j=1}^{m}\left|h(\varphi_j) - h_1(\varphi_j)\right|^2 \to \min_{\rho(\psi)}. \tag{3}$$

Заметим, что $h(\varphi) = (u(x, y) - u_2)\sqrt{r}\exp(-ikr)$; $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$; $y/x = \operatorname{tg}\varphi$; u_2 — поле падающей плоской волны.

Обычные методы типа покоординатного или градиентного спуска в таких задачах имеют весьма низкую скорость сходимости, что объясняется, в частности, сильной овражностью целевой функции. Предлагается новый подход к решению этой задачи. В работе [2] указан эффективный метод восстановления поверхностного импеданса по заданному полю в случае фиксированной геометрии. Тем самым определен оператор

$$W = Y(h_1(\varphi),\ \rho(\psi)).$$

Если при некоторой геометрии $\rho_*(\psi)$ найденное распределение W будет совпадать с W^1, это означает, что функция $\rho_*(\psi)$ является решением обратной задачи о восстановлении формы импедансной поверхности S по заданной ДР $h_1(\varphi)$. Следовательно, вместо экстремальной задачи (3), приходим к нелинейному операторному уравнению

$$Y(h_1(\varphi),\ \rho(\psi)) = W^1(\psi), \tag{4}$$

которое может быть решено, например, методом Ньютона (напомним, что $W^1(\psi)$ — известная функция). Некорректность постановки исходной обратной задачи, возникающая в связи с нарушением условий однозначной разрешимости и устойчивости, переходит при этом во вспомогательную задачу определения $W(\psi)$ при фиксированной форме поверхности S. Отметим, что для данной вспомогательной задачи в работе [2] введена эффективная регуляризация и предложен быстрый в реализации метод численного решения возникающего линейного интегрооператорного уравнения.

Сходимость численного решения операторного уравнения. Регуляризация линейной вспомогательной задачи определения W по заданной ДР при фиксированной геометрии позволяет вычислить $W(\psi)$ с оценкой нормы, зависящей от параметра регуляризации α:

$$\|\Delta W\| \le M(\alpha)(\|\Delta\rho\| + \|\Delta h_1\|), \tag{5}$$

где $\Delta W = W - W^1$; $\Delta\rho$ и Δh_1 — соответствующие приращения функций ρ и h_1. При решении нелинейного операторного уравнения (4) методом Ньютона после дискретизации с помощью конечных разностей вычисляется матрица производных $DY = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \rho_j}\right)$. Очередное приближение ρ_k находится по формуле

$$\rho_k = \rho_{k-1} - DY^{-1}\Delta\mathbf{W}_{k-1}, \tag{6}$$

где $\Delta\mathbf{W}_{k-1} = Y(h_1,\ \rho_{k-1}) - \mathbf{W}^1$. Установим сходимость приращения поверхностного импеданса к нулю. Разложение Тейлора в окрестности элемента ρ_{k-1} позволяет получить оценку

$$\|\Delta\mathbf{W}_k\| \le \frac{1}{2}\,\|D^2Y(\xi)\|\,\|DY^{-1}\|^2\,\|\Delta\mathbf{W}_{k-1}\|^2,$$

в правую часть неравенства вошли норма матрицы вторых производных и норма обратной матрицы первых производных. Обозначим

$$D = \max\|D^2Y(\xi)\|, \qquad M_1 = \max\|DY^{-1}\|.$$

Соотношение (5) дает возможность такого подбора исходных параметров, чтобы $\|\Delta\mathbf{W}_0\| \le \frac{1}{DM_1^2}$, тогда $\|\Delta\mathbf{W}_k\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1}\|\Delta\mathbf{W}_0\|$. Таким образом, в предположении гладкости выбранное в достаточно малой окрестности точного

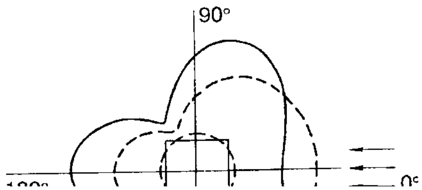

Рис. 1

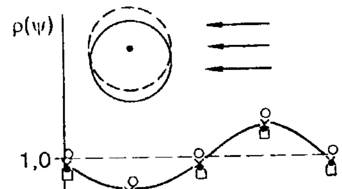

Рис. 2

решения начальное приближение гарантирует сходимость поверхностного импеданса к $\mathbf{W}^1$ со скоростью выше, чем геометрическая прогрессия. Аналогичные оценки и выводы следуют и для последовательности $\{\rho_k\}$.

Результаты вычислительного эксперимента. Рассмотрим задачу восстановления формы квадратного рассеивателя со стороной $a = \lambda/(1{,}11\pi)$, предполагая, что $W^1 = 0$. Комплекснозначное поле (при бистатической локации) задавалось в шести точках в дальнем поле (полная ДР изображена сплошной кривой на рис. 1). Искомый контур определялся значениями $\rho(\psi)$ в восьми опорных сечениях. В качестве направляющей для начального приближения выбиралась окружность радиусом $R = \lambda/(2\pi)$ с диаграммой рассеяния, показанной на рис. 1 пунктиром. На этом же рисунке приведены соответствующие поперечные сечения рассеивателей: пунктиром — окружность, сплошной линией — квадрат. Точность при определении формы 0,1 % достигается за пять шагов реализации метода Ньютона для решения нелинейного операторного уравнения (4). Существенным фактором, влияющим на сходимость вычислительного процесса, является параметр α, регуляризующий вспомогательную задачу определения импеданса W по ДР. Сходимость обеспечивается выбором $\alpha \in (0{,}1;\ 1{,}0)$. Ожидаемого «загрубления» решения $\rho(\psi)$, обусловленного относительно большими значениями α, не происходит, так как при точном решении исходной задачи $\Delta W = 0$.

Представляет интерес рассмотрение случая изменения геометрии вследствие перемещения тела (его параллельного сдвига). Пусть измененная индикатриса получена за счет сдвига оси кругового импедансного цилиндра радиусом $R = \lambda/(2\pi)$ перпендикулярно направлению падающей волны на величину $0{,}3R$. Рассеянное поле фиксировалось на конечном расстоянии от первоначального положения оси объекта: $r = 100R$. Рис. 2 иллюстрирует сходимость вычислительного процесса на четырех итерациях (все последующие шаги дают практически совпадающие контуры поверхности S); N_i — номер итерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г.** Математические модели электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1991.
2. **Соппа М. С., Ершова Е. Е.** Численное решение обратной задачи рассеяния на импедансных телах при E- и H-поляризациях // Автометрия. 1997. № 2. С. 56.

Поступила в редакцию 3 июня 1997 г.