РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1998

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

ДК 621.391 : 519.234.3

Г. И. Салов

(Новосибирск)

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ, ДВИЖУЩИХСЯ К ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ*

Путем редукции с помощью пар статистик Манна — Уитни последовательности блоков независимых случайных величин, наблюдаемых вдоль луча из заданной точки на изображении (изображениях), к последовательности случайных величин, принимающих значения +1, −1 и 0, построены два последовательных непараметрических критерия для обнаружения следа траектории объекта, движущегося к заданной точке.

Введение. При создании разного рода информационных систем (научного, военного и гражданского назначения) возникает проблема обнаружения движущихся объектов, появляющихся в произвольные моменты времени в произвольной точке контролируемого пространства, особенно когда фон случайный и видимость плохая. Трудность этой проблемы заключается, в частности, в том, что она в подавляющем большинстве случаев приводит к нерешенным задачам математической статистики и статистики случайных процессов.

Рассмотрим задачу обнаружения объектов, движущихся к заданной точке O (к цели с центром в точке O) на одном изображении (снимке) с накопленной информацией, полученной при сравнительно долго открытом затворе объектива, и на последовательности изображений быстрой съемки. Часто обнаружение ведется по одному или по ряду контролируемых направлений от точки O — по лучам из точки O. Достаточно рассмотреть обнаружение по одному направлению.

Для своевременного принятия необходимых действий наблюдателю требуется на основании результатов измерений (наблюдений) по мере их получения вдоль луча из точки O решить, присутствует ли след от объекта, движущегося к точке O, и по возможности более точно определить последнее (ближнее к O) местоположение объекта на изображении. Эту задачу можно истолковать как задачу оптимального обнаружения «момента» появления изменений («разладки») в вероятностных характеристиках последовательности наблюдаемых случайных величин. Когда статистические характеристики сигналов от объекта и фона известны заранее, упомянутая задача решается с помощью оптимальных правил последовательного анализа [1, 2]. Однако с течением времени возможны большие колебания значений наблюдаемых

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-07-89489).

величин, вызываемые изменениями положения объекта в пространстве, неуправляемыми возмущениями атмосферы, внутренними возмущениями самого приемного (регистрирующего) устройства и т. д. Более того, объект может быть новым. Поэтому в настоящей работе рассматривается более реальная ситуация, когда относительно распределений вероятностей значений наблюдаемых сигналов имеется лишь некоторая информация. Что касается однородности изображения (изображений), то достаточно наличия лишь локальной однородности внутри каждой подгруппы (блока) наблюдений в случае, когда след траектории объекта отсутствует.

Постановка задачи. Рассмотрим сначала менее сложную ситуацию с одним анализируемым изображением. Для определенности можно считать, что на изображении движение объекта к точке O прямолинейное, т. е. центр объекта движется по прямой линии, проходящей через точку O. След (траектории) движущегося объекта на изображении может представлять собой нечеткий и неоднородный по длине (даже имеющий разрывы) отрезок линии или полосы, неизвестной наблюдателю длины и, возможно, ширины.

Схема наблюдений вдоль луча с вершиной в точке O представляется следующей. Все наблюдения выполняются на последовательности перпендикуляров к лучу в симметричных относительно луча точках. Пусть на i-м ($i = 1, \ldots$ $\ldots, N$, считая от точки O) перпендикуляре к лучу наблюдаются величины $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}, \zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{im}, \psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$ $(m, n \geq 1)$, причем величины $\zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{im}$ принадлежат точкам, расположенным равномерно поперек контролируемого положения следа, ожидаемой ширины, а величины $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}$ и $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$ — точкам, находящимся по разные стороны от этого положения. Числа m, n и N выбираются так, чтобы при отсутствии в поле зрения (следа) объекта для $i = 1, \ldots, N$ величины внутри i-го блока $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}, \zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{im}, \psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$ имели (по крайней мере, приближенно) одну и ту же непрерывную функцию распределения вероятностей (скажем, F_i) и все наблюдаемые величины можно было считать статистически независимыми в совокупности. Функции F_i зависят от i и направления луча, если фон на изображении неоднородный и неизотропный соответственно.

Если на изображении присутствует след траектории объекта, направленный на точку O, а исходящий из O луч при некотором $i = \sigma$ «встретит» и затем рассечет его вдоль центральной линии, то для $i \geq \sigma$ величины $\zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{im}$ будут принадлежать точкам следа объекта и поэтому будут иметь новую функцию распределения $G_i(x) \neq F_i(x)$. В действительности не в каждом случае след непременно достигает наибольшего (самого дальнего от точки O) значения i. Это следует учитывать при создании алгоритма обнаружения. Предположим, что $G_i(x) < F_i(x)$ для всех x, т. е. величины $\zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{im}$, принадлежащие точкам следа, стохастически больше величин $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}$ и $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$, принадлежащих точкам фона. Помимо этой минимальной информации, ничего не известно о функциях $F_i(x)$ и $G_i(x)$.

В таком случае для обнаружения следа траектории объекта и получения оценки для «момента» σ — точки ближнего положения объекта на изображении — требуется непараметрический (не зависящий от F_i и G_i) критерий для проверки сложной гипотезы H_0: наблюдаемые величины внутри каждого блока однородны (след траектории объекта отсутствует, $\sigma > N$) против сложной гипотезы (множества сложных альтернатив) H_1: существуют такие целые числа σ и τ $(1 \leq \sigma < \tau \leq N)$, что при $1 \leq i < \sigma$ и $\tau < i \leq N$ величины внутри i-го блока однородны, а при $\sigma \leq i \leq \tau$ величины $\zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{im}$ стохастически больше, чем $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}$ и $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$.

Параметризация задачи. На основании результатов работ [3, 4] «параметризуем» эту задачу следующим образом. Введем в рассмотрение (полные) группы событий A_i, B_i и $C_i = \overline{A_i \cup B_i}$. При $n = m = 1$ $A_i = \{\zeta_i > \xi_i, \zeta_i > \psi_i\}$, $B_i = \{\zeta_i < \xi_i, \zeta_i < \psi_i\}$. В этом случае, если в поле зрения объект отсутствует, то вероятность $\mathbf{P}(A_i) = p^0_{A_i} = p^0_{B_i} = \mathbf{P}(B_i) = 1/3$ для всех i. Если же объект присутствует, то по предположению при $\sigma \leq i \leq \tau$ $\mathbf{P}(A_i) > \mathbf{P}(B_i)$. Присутствие объекта скажется и на вероятности $p_{C_i} = \mathrm{P}(C_i)$, но более характерным является именно неравенство $\mathrm{P}(A_i) > \mathrm{P}(B_i)$.

В общем случае ($m \geq 1$, $n \geq 1$) события A_i, B_i и $C_i = \overline{A_i \cup B_i}$ определяются значениями следующих статистик Манна — Уитни:

$$\mu_{i1}^{+} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} I\{\zeta_{is} > \xi_{it}\}, \qquad \mu_{i2}^{+} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} I\{\zeta_{is} > \psi_{it}\},$$
$$\mu_{i1}^{-} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} I\{\zeta_{is} < \xi_{it}\}, \qquad \mu_{i2}^{-} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} I\{\zeta_{is} < \psi_{it}\}. \tag{1}$$

Здесь и ниже $I\{\cdot\}$ — индикатор события $\{\cdot\}$, равный 1 или 0 в зависимости от того, произошло или не произошло событие $\{\cdot\}$. Событие A_i (симметрично B_i) состоит из определенных событий вида $\{\mu_{i1}^{+} = u,\ \mu_{i2}^{+} = \mathrm{v}\}$ (соответственно $\{\mu_{i1}^{-} = u,\ \mu_{i2}^{-} = \mathrm{v}\}$). Для выбора этих событий удобно ввести две матрицы всех возможных событий вида $\{\mu_{i1}^{+} = u,\ \mu_{i2}^{+} = \mathrm{v}\}$ и $\{\mu_{i1}^{-} = u,\ \mu_{i2}^{-} = \mathrm{v}\}$, у которых столбцы и строки перенумерованы от 0 до $m \times n$. При этом по построению пара (u, v) будет также адресом определяемого ею события. В силу (1) максимальное допустимое событие A_i (B_i) представляет собой объединение всех событий, расположенных ниже побочной диагонали первой (второй) матрицы. Наиболее подходящее же событие A_i (B_i) является подмножеством максимального допустимого события. Его элементы удаляются от побочной диагонали матрицы с ростом произведения $m \times n$ (см. также [4]).

Вероятности $\mathrm{P}\{\mu_{i1}^{+} = u,\ \mu_{i2}^{+} = \mathrm{v} \mid H_0\}$ и $\mathrm{P}\{\mu_{i1}^{-} = u,\ \mu_{i2}^{-} = \mathrm{v} \mid H_0\}$ событий, входящих в две упомянутые матрицы, при H_0 не зависят от распределений F_i и могут быть представлены в виде [4]

$$\frac{m!(n!)^2}{(m+2n)!} \sum_{\pi'(n)} \sum_{\pi''(n)} \prod_{j=0}^{m} \binom{n_j' + n_j''}{n_j'}, \tag{2}$$

здесь и далее $(:)$ — биномиальный коэффициент, а суммирование выполняется по всем парам $\pi'(n) = \{n_0', n_1', \ldots, n_m'\}$ и $\pi''(n) = \{n_0'', n_1'', \ldots, n_m''\}$ разбиений числа n на $m + 1$ целых неотрицательных (≥ 0) слагаемых, удовлетворяющих равенствам

$$\sum_{j=0}^{m} (m-j)n_j' = u, \qquad \sum_{j=0}^{m} (m-j)n_j'' = \mathrm{v} \tag{3}$$

или

$$\sum_{j=0}^{m} jn_j' = u, \qquad \sum_{j=0}^{m} jn_j'' = \mathrm{v} \tag{4}$$

в соответствии с тем, вычисляется первая вероятность или вторая. В силу симметрии (2), а также (3) и (4) обе вероятности равны. Поэтому события A_i и B_i, составленные из элементов с общим полем адресов в матрицах, равновероятны, т. е. $\mathrm{P}\{A_i \mid H_0\} = \mathrm{P}\{B_i \mid H_0\}$.

Введем теперь последовательность независимых случайных величин $\gamma_i = I\{A_i\} - I\{B_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, принимающих значения +1, −1 и 0 с вероятностями

$$p_i(x) = \mathrm{P}\{\gamma_i = x\} = p_{A_i}^{(|x|+x)/2} p_{B_i}^{(|x|-x)/2} p_{C_i}^{(1-|x|)}. \tag{5}$$

Величина γ_i характеризует результаты наблюдений в i-м блоке (на i-м перпендикуляре или i-м шаге). При редукции наблюдений к последовательности γ_i имеет место некоторая потеря информации, однако выполняя ее, задачу обнаружения при отсутствии полной априорной информации можно свести к задаче проверки простой гипотезы H_0^*: для каждого $i = 1, ..., N$ имеет место равенство $p_i(1) = p_i(-1) = p_{B_i}^0$ (след объекта отсутствует, $\sigma > N$) против сложной гипотезы (множества сложных альтернатив) H_1^*: существуют такие целые числа σ и τ $(1 \le \sigma < \tau \le N)$, что при $1 \le i < \sigma$ и $\tau < i \le N$ имеет место равенство $p_i(1) = p_i(-1) = p_{B_i}^0$, а при $\sigma \le i \le \tau$ — вероятность $p_i(1) > p_i(-1)$.

Последовательные критерии. Задача состоит в выборе последовательного критерия, определяющего на основе уже полученных на каждом шаге значений γ_i момент остановки T наблюдений с правилом оценивания σ и правилом принятия решения следующего вида: гипотеза H_0^* отклоняется тогда и только тогда, когда $T \le N$.

В работе [5] Пейдж ввел такой критерий для проверки гипотезы $p_i(+1) = p_i(-1)$, $i = 1, 2, ...$, в случае наблюдения последовательности бернуллиевских случайных величин γ_i, принимающих значения $+1$ и -1. Критерий основан на кумулятивных суммах $S_t = \gamma_1 + ... + \gamma_t$, $t = 1, 2, ...$, при этом момент остановки имеет вид:

$$T_c = \min\left\{t\colon \max_{1 \le u \le t}(S_t - S_u) \ge c\right\}. \qquad (6)$$

Применение критерия Пейджа к последовательности случайных величин, принимающих значения $+1$, -1 и 0, изучалось в [6—8]. Однако это применение при ближайшем рассмотрении оказывается необоснованным. Можно построить более мощные критерии.

Предварительно следует рассмотреть специальный случай $H_1^{*\prime}$ гипотезы H_1^*, приписывающий «моментам» σ и τ фиксированные значения $\sigma = u$, $\tau = k$. В этом случае задача состоит в проверке простой гипотезы $H_0^{*\prime}$: при всех $u \le i \le k$ вероятность $p_i(1) = p_i(-1) = p_{B_i}^0$ (след траектории объекта отсутствует) против одной сложной альтернативы $H_1^{*\prime}$: при $u \le i \le k$ вероятность $p_i(1) > p_i(-1)$. Совместное распределение величин $\gamma_u, \gamma_{u+1}, ..., \gamma_k$, согласно (5), имеет вид (предположим на время, что вероятности $p_i(x)$ не зависят от $u \le i \le k$):

$$\mathbf{P}(\gamma_u = x_u, ..., \gamma_k = x_k) = \left[p(1)\right]^{\nu_A}\left[p(-1)\right]^{\nu_B}\left[p(0)\right]^{\nu_C},$$

где

$$\nu_A = \sum_{i=u}^{k} I\{x_i = 1\}, \qquad \nu_B = \sum_{i=u}^{k} I\{x_i = -1\}, \qquad \nu_C = \sum_{i=u}^{k} I\{x_i = 0\}.$$

Статистики ν_A, ν_B, ν_C имеют совместное полиномиальное (более точно, триномиальное) распределение, которому можно придать (см., например, [3]) форму двухпараметрического экспоненциального семейства с параметрами $\theta = \log(p_A/p_B)$ и $\psi = \log(p_C/p_B)$. Гипотеза $H_0^{*\prime}$ эквивалентна гипотезе $\theta = 0$, $\psi = \psi^0$. Согласно, например, [9, с. 280, 281], критерий для этой гипотезы строится на условном распределении ν_A при фиксированном значении $\nu_C = z$, которое является биномиальным с параметром $p^* = p_A/(p_A + p_B)$ и числом независимых испытаний $L = (k - u + 1) - z$. Задача сводится к проверке гипотезы $p^* = 1/2$ против альтернативы $p^* > 1/2$ в биномиальном распределении. Критическая область несмещенного и равномерно наиболее мощного (имеющего наибольшую вероятность отклонения этой гипотезы, когда она не верна) критерия знаков имеет вид $\nu_A \ge \lambda(L)$, где «пороговый» уровень $\lambda = \lambda(L)$ — наименьшее целое число, такое что

$$\sum_{i=\lambda}^{L} \binom{L}{i} 2^{-L} \le \alpha. \qquad (7)$$

Так как левая часть (7) возрастает с уменьшением λ дискретно, то знак равенства, обеспечивающий достаточность максимизации условной мощности, к сожалению, может не достигаться. Отсюда заключаем, учитывая [9], что нерандомизированный критерий для $H_0^{*\prime}$ вида

$$\nu_A \geq \lambda(\nu_A + \nu_B) \tag{8}$$

является несмещенным и по крайней мере для больших значений $k - u$ приближается к равномерно наиболее мощному, если и не является в точности таковым с фактически достигаемым уровнем значимости. Величина α в (7) подбирается так, чтобы этот уровень был близким к заданному (см. также [4]).

Критерий (8) эквивалентен критерию

$$\nu_A - \nu_B \geq 2\lambda(\nu_A + \nu_B) - (\nu_A + \nu_B) = \lambda^*(\nu_A + \nu_B),$$

или, что то же самое,

$$S_{u,k} \geq \lambda^*(S^*_{u,k}), \tag{9}$$

здесь и далее

$$S_{u,k} = \sum_{i=u}^{k} \gamma_i, \qquad S^*_{u,k} = \sum_{i=u}^{k} |\gamma_i|.$$

Как известно [10], функция λ^* с большой точностью аппроксимируется квадратным корнем, так что критерий (9) можно приближенно записать в виде

$$S_{u,k} \geq b\sqrt{S^*_{u,k}}. \tag{10}$$

Здесь и далее числа b и c выбираются по заданному уровню значимости критериев и не всегда одни и те же, если относятся к разным критериям.

Вернемся теперь к рассмотрению более сложного общего случая (σ и τ наблюдателю не известны). Необходимо отметить, что здесь не существует равномерно наиболее мощного критерия, так как мощность любого критерия может быть меньше мощности по крайней мере одного из критериев, построенных для специальных случаев.

Из рассмотрения специального случая следует, что естественным претендентом на подходящий момент остановки наблюдений является момент

$$T_b = \min\left\{t\text{: существует } u < t - t_0 + 1 \text{ такое, что } \bar{S}_{u,t} \geq b\sqrt{S^*_{u,t}}\right\} \tag{11}$$

(считая $T_b = t^* > N$, если не существуют такие u и t), где t_0 и b подбираются так, чтобы обеспечить заданный уровень значимости и максимизировать мощность критерия. При этом за оценку для σ можно взять то значение u, при котором выполняется неравенство в фигурных скобках в (11).

Однако для практического использования критерий (11) может оказаться слишком сложным, так как при каждом t он требует, вообще говоря, сравнительно большого числа проверок неравенства, что может быть неприемлемо с точки зрения времени вычислений.

Практически (и теоретически) удобным, но, по-видимому, менее выгодно использующим наблюдения является линейное приближение к критерию (11) следующего вида:

$$T_{b,c} = \min\left\{t\text{: существует } u \text{ такое, что } \bar{S}_{u,t} > bS^*_{u,t} + c\right\}, \tag{12}$$

где числа $0 < b < 1$ и $c > 0$ подбираются так, чтобы обеспечить заданный уровень значимости и максимизировать мощность критерия. Если в (12) положить $b = 0$, то получится критерий Пейджа (6).

Критерий Пейджа и критерий (12) можно записать в более удобной форме. Достаточно рассмотреть только критерий (12).

Обозначим

$$Y_i = \gamma_i - b|\gamma_i|, \qquad M_t = \max_{0 \le j \le t} \sum_{i=j}^{t} Y_i, \quad t \ge 1. \tag{13}$$

Тогда определение (12) равносильно следующему:

$$T_{b,c} = \begin{cases} \text{первому } t > 1 \text{ такому, что } M_t \ge c, \\ t^* > N, \text{ если такого } t \text{ не существует.} \end{cases} \tag{14}$$

Важную роль для анализа критерия (12) и критерия Пейджа играет очевидная рекуррентная формула, обеспечивающая также простоту вычислений при практическом использовании этих критериев:

$$M_t = Y_t + \max(0, M_{t-1}), \quad t \ge 1, \tag{15}$$

где $M_0 = 0$ (при так называемом «горячем» старте $M_0 > 0$). Из (15) видно, что M_t образует цепь Маркова.

Статистические свойства критериев. Последовательные критерии, как и обычные, характеризуются уровнем значимости (вероятностью ложной тревоги) и мощностью. Критерий (11) наиболее труден для исследования. При специальном выборе числа b уровень значимости $\alpha = \mathbf{P}\{T_{b,c} \le N \mid H_0\}$ и мощность $\beta = \mathbf{P}\{T_{b,c} \le N \mid H_1\}$ критерия (12) и типа кумулятивных сумм Пейджа можно вычислить с помощью подхода (в слегка обобщенном виде), использованного в [11] и приводящего к рекурсивному алгоритму. В работе [11] рассматривается критерий, по форме похожий на критерий (12), но при этом предполагается, что исходные случайные величины и константы целые и неотрицательные. В настоящей работе последовательность Y_t и число $0 < b < 1$ предполагаемым в статье [11] свойством не обладают. Подход [11] можно распространить на рассматриваемый здесь случай выбором рационального b.

Представим число b в виде рациональной дроби p/q с наименьшим возможным положительным знаменателем. Пусть для простоты число c тоже рациональное (в частности, целое) со знаменателем q. Для упрощения нужных в дальнейшем обозначений преобразуем Y_t в целочисленную случайную величину $Y_t^* = qY_t$. Согласно (13) и (5), Y_t^* принимает значения $(q - p)$, $-(p + q)$ и 0 с вероятностями $p_t(1)$, $p_t(-1)$ и $p_t(0)$ соответственно. Обозначим

$$P_t^*(y) = \mathbf{P}\{Y_t^* \le y\}, \qquad p_t^*(j) = P_t^*(j) - P_t^*(j-1), \qquad t \ge 1.$$

Пусть M_t^* — последовательность, получаемая по формуле (15) при замене Y_t на Y_t^*. Момент $T_{b,c}$ не изменится, если в его определении (14) заменить M_t на M_t^*, а c на $c^* = qc$.

Рассмотрим теперь последовательность вероятностных функций (для краткости будем писать просто T вместо $T_{b,c}$)

$$H_t(x) = \mathbf{P}\{M_t^* \le x,\ T \ge t\}, \quad t \ge 1. \tag{16}$$

Для $t = 1$ имеем $H_1(x) = P_1^*(x)$. Из (15) при замене Y_t на Y_t^* и M_t на M_t^* следует, что

$$H_t(x) = \sum_{j=j_m}^{c^*-1} \mathbf{P}\{Y_t^* + M_{t-1}^{*+} \le x,\ M_{t-1}^* = j,\ T \ge t-1\} =$$

$$= \sum_{j=j_m}^{c^*-1} \mathbf{P}\{Y_t^* + M_{t-1}^{*+} \le x \mid M_{t-1}^* = j,\ T \ge t-1\} h_{t-1}(j), \tag{17}$$

где $j_m = -(p + q)$ — наименьшее возможное значение Y^*_{t-1} и M^*_{t-1}; $M^{*+}_{t-1} = \max(0, M^*_{t-1})$, $h_{t-1}(j) = H_{t-1}(j) - H_{t-1}(j-1)$. Так как Y^*_t не зависит от M^*_{t-1}, а событие $\{T \geq t-1\}$ является дополнительным к событию

$$\bigcup_{i=1}^{t-2}\{T = i\} = \bigcup_{i=1}^{t-2}\left\{M^*_1 < c^*, \ldots, M^*_{i-1} < c^*, M^*_i \geq c^*\right\},$$

значит, зависит только от значений $Y^*_1, \ldots, Y^*_{t-2}$ и не зависит от Y^*_t, то

$$\mathbf{P}\left\{Y^*_t + M^{*+}_{t-1} \leq x \mid M^*_{t-1} = j,\ T \geq t-1\right\} = \begin{cases} P^*_t(x), & j \leq 0, \\ P^*_t(x-j), & j > 0. \end{cases}$$

Поэтому, согласно (17),

$$H_t(x) = P^*_t(x)H_{t-1}(0) + \sum_{j=1}^{c^*-1} P^*_t(x-j)\left[H_{t-1}(j) - H_{t-1}(j-1)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{c^*-2} p^*_t(x-j)H_{t-1}(j) + P^*_t(x - c^* + 1)H_{t-1}(c^* - 1), \quad j_m \leq x < \infty. \qquad (18)$$

Из (18) видно, что для каждого x значение $H_t(x)$ является линейной комбинацией значений, принимаемых функцией $H_{t-1}(x)$ в точках $x = j$. И так как в силу (16) вероятность $\mathbf{P}\{T > N\} = H_N(c^* - 1)$, то для ее подсчета достаточно вычислять значения $H_t(x)$ лишь в точках $x = 0, 1, \ldots, c^* - 1$. Коротко это можно записать в матричной (операторной) форме. Составим вектор-столбцы

$$\mathbf{H}_1 = (P^*_1(0),\ P^*_1(1), \ldots, P^*_1(c^* - 1))',$$

$$\mathbf{H}_t = (H_t(0), H_t(1), \ldots, H_t(c^* - 1))', \quad t \geq 2,$$

где штрих обозначает транспонирование, и матрицы Q_t, $t \geq 2$, с элементами (обозначения очевидны)

$$q_{ij}(t) = \begin{cases} p^*_t(i-j), & j = 1, \ldots, c^* - 1, \\ P^*_t(i - c^*), & j = c^*. \end{cases}$$

Тогда из (18) следует, что на языке операторов Q_t отвечающих матрицам Q_t,

$$\mathbf{H}_t = Q_t\mathbf{H}_{t-1}, \qquad \mathbf{H}_N = Q_NQ_{N-1}, \ldots, Q_2\mathbf{H}_1.$$

Таким образом, отправляясь от известного вектора $\mathbf{H}_1$, векторы $\mathbf{H}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{H}_N$ можно вычислить рекуррентно. При этом вероятность $\mathbf{P}\{T > N\}$ будет равна c^*-му элементу вектора $\mathbf{H}_N$.

Наряду с мощностью, существенной характеристикой последовательных критериев является средняя задержка, т. е. среднее время между моментом σ встречи следа и моментом $T \wedge N = \min(T, N)$ остановки наблюдений и принятия окончательного решения. Для $\sigma = u$ средняя задержка дается формулой

$$\delta = \mathbf{M}_u\left\{T \wedge N - u + 1 \mid T \geq u\right\} = \frac{1}{\mathbf{P}_u\{T \geq u\}}\sum_{t=u}^{N} t\mathbf{P}_u\left\{T \wedge N = t\right\} - u + 1,$$

где

$$\mathbf{P}_u\{T \wedge N = t\} = \begin{cases} \mathbf{P}_u\{T = t\}, & t < N, \\ \mathbf{P}_u\{T \ge N\}, & t = N, \end{cases}$$

$\mathbf{M}_u$ и $\mathbf{P}_u$ обозначают соответственно математическое ожидание и вероятность, отвечающие значению $\sigma = u$.

Для задачи числового исследования мощности и средней задержки критерия Пейджа (6) и критерия (12) был взят важный конкретный случай, когда в изображении наиболее вероятны малые уровни яркости и менее вероятны — большие. Известно, что в таком случае подходящей аппроксимацией распределения вероятностей значений яркости является экспоненциальное распределение $F_i(x) = 1 - \exp(-x/\sigma_i)$, $x \ge 0$, $i = 1, ..., N$, в точках окружающего фона на изображении и $G_i(x) = 1 - \exp(-(x - a_i)/\tau_i)$, $a_i > 0$, $x \ge a_i$, в точках области следа (объекта), $\sigma \le i \le \tau$. Для простоты вычисления проводились при $\sigma_i = \tau_i = 1$, $a_i = a$. В этом случае при H_1 вероятности $\mathbf{P}\{\mu_{i1}^+ = u,\ \mu_{i2}^+ = \mathrm{v} \mid H_1\}$ и $\mathbf{P}\{\mu_{i1}^- = u,\ \mu_{i2}^- = \mathrm{v} \mid H_1\}$, $\sigma \le i \le \tau$, событий, входящих в две вышеуказанные матрицы, могут быть представлены в виде [4]

$$m!(n!)^2 \sum_{\pi'(n)} \sum_{\pi''(n)} \prod_{j=0}^{m} \binom{n_j' + n_j''}{n_j'} \sum_{s=0}^{n_0' + n_0''} d^{\,2n - n_0' - n_0'' + s} g^{\,n_0' + n_0'' - s} \times$$

$$\times \left[(n_0' + n_0'' - s)!(2n + m - n_0' - n_0'' + s)!\right]^{-1},$$

где $d = \exp(-a)$, $g = 1 - d$, а суммирование вновь проводится по всем парам $\pi'(n) = \{n_0', n_1', ..., n_m'\}$ и $\pi''(n) = \{n_0'', n_1'', ..., n_m''\}$ разбиений числа n на $m + 1$ целых неотрицательных (≥ 0) слагаемых $n_0', n_1', ..., n_m'$ и соответственно $n_0'', n_1'', ..., n_m''$, удовлетворяющих равенствам (3), если при этом вычисляется первая вероятность, и равенствам (4), если вторая.

С целью внесения некоторой ясности относительно роста мощности и убывания средней задержки критериев при увеличении m и n числовое исследование проводилось для $(m, n) = (1, 1), (3, 2), (5, 3)$. Полученные результаты представлены в табл. 1—3 соответственно. Мощность и средняя задержка критериев подсчитаны для $a = 0{,}0\ (0{,}1)\ 0{,}9$, $\sigma = 10\ (10)\ 60$, $\tau = 80$ и $N = 100$. Значения мощности при $a = 0{,}0$ являются фактическими уровнями значимости критериев. Для каждого значения σ первая двойная строка принадлежит критерию Пейджа, вторая и третья — критерию (12) с $p/q = 1/10$ и $1/5$ соответственно.

При $m = 3$, $n = 2$ событие A_i (аналогично B_i) состоит из событий, расположенных ниже побочной диагонали и двух смежных с ней соответствующей вышеуказанной матрицы возможных событий, а при $m = 5$, $n = 3$ — из событий, расположенных ниже побочной диагонали и трех смежных с ней. В последнем случае (см. табл. 3) уровень значимости критерия Пейджа равен 0,0067594, критерия (12) — 0,0067509 при $p/q = 1/10$ и 0,0067459 при $p/q = 1/5$, где все цифры точные.

Полученные результаты для разных m и n дают приблизительно одну и ту же картину. С точки зрения мощности превосходство критерия (12) при $p/q = 1/10$ над критерием Пейджа (6) почти незначительно при малых значениях σ, но увеличивается с ростом σ и становится значительным для больших σ, т. е. для коротких следов. Критерий (12) обладает также решительным преимуществом средней задержки (по сравнению с критерием Пейджа). При $p/q = 1/5$ имеет место небольшая потеря мощности для малых значений σ, однако для больших значений σ результат сравнения обратный. При $p/q = 1/3$ мощность для больших значений σ еще больше.

Выбор p/q в значительной степени зависит от того, придается ли главное значение дальнему обнаружению, где след траектории объекта будет коротким.

Таблица 1

σ		a									
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
10	β	0,0117	0,0790	0,2783	0,5807	0,8323	0,9547	0,9916	0,9989	$0{,}9^{3}89$	
	δ	90,81	89,42	84,25	74,03	62,02	52,16	45,32	40,58	37,12	
	β	0,0114	0,0792	0,2847	0,5950	0,8452	0,9607	0,9932	$0{,}9^{3}19$	$0{,}9^{4}29$	
	δ	90,75	89,02	82,75	70,91	57,68	47,36	40,47	35,82	32,47	
	β	0,0107	0,0713	0,2630	0,5687	0,8288	0,9548	0,9916	$0{,}9^{3}00$	$0{,}9^{4}08$	
	δ	90,70	88,81	82,12	69,41	55,11	43,97	36,68	31,94	28,64	
20	β	0,0117	0,0656	0,2170	0,4667	0,7218	0,8915	0,9683	0,9930	0,9988	$0{,}9^{3}83$
	δ	80,81	79,76	76,21	68,99	59,47	50,52	43,74	38,99	35,59	33,02
	β	0,0114	0,0673	0,2291	0,4937	0,7522	0,9115	0,9768	0,9954	$0{,}9^{3}31$	
	δ	80,75	79,41	74,97	66,28	55,50	46,02	39,20	34,58	31,31	
	β	0,0107	0,0620	0,2175	0,4816	0,7455	0,9095	0,9765	0,9954	$0{,}9^{3}32$	
	δ	80,70	79,22	74,34	64,82	53,10	42,92	35,78	31,05	27,80	
30	β	0,0117	0,0520	0,1563	0,3381	0,5610	0,7597	0,8923	0,9603	0,9879	0,9969
	δ	70,81	70,07	67,88	63,41	56,84	49,57	43,12	38,16	34,58	31,97
	β	0,0114	0,0542	0,1700	0,3727	0,6111	0,8070	0,9236	0,9757	0,9937	0,9986
	δ	70,75	69,81	66,98	61,33	53,48	45,41	38,77	33,97	30,60	28,16
	β	0,0107	0,0511	0,1668	0,3757	0,6218	0,8194	0,9321	0,9797	0,9951	$0{,}9^{3}01$
	δ	70,70	69,65	66,45	60,03	51,26	42,51	35,58	30,73	27,40	25,03
40	β	0,0117	0,0400	0,1042	0,2165	0,3715	0,5452	0,7059	0,8307	0,9132	0,9602
	δ	60,81	60,32	59,11	56,75	53,08	48,38	43,33	38,62	34,70	31,61
	β	0,0114	0,0417	0,1152	0,2473	0,4273	0,6179	0,7786	0,8888	0,9513	0,9813
	δ	60,76	60,15	58,57	55,46	50,73	45,00	39,28	34,40	30,65	27,92
	β	0,0107	0,0398	0,1167	0,2606	0,4570	0,6580	0,8168	0,9164	0,9672	0,9888
	δ	60,74	60,06	58,21	54,49	48,86	42,29	36,10	31,13	27,50	24,93
50	β	0,0117	0,0300	0,0649	0,1217	0,2019	0,3025	0,4160	0,5328	0,6432	0,7401
	δ	50,82	50,52	49,93	48,89	47,32	45,21	42,63	39,74	36,76	33,88
	β	0,0114	0,0308	0,0708	0,1395	0,2394	0,3647	0,5022	0,6357	0,7514	0,8418
	δ	50,79	50,43	49,68	48,31	46,19	43,31	39,88	36,22	32,69	29,56
	β	0,0107	0,0295	0,0726	0,1519	0,2708	0,4189	0,5746	0,7151	0,8253	0,9017
	δ	50,79	50,41	49,52	47,81	45,06	41,37	37,14	32,90	29,12	26,04
60	β	0,0117	0,0222	0,0383	0,0612	0,0911	0,1278	0,1705	0,2180	0,2688	0,3215
	δ	40,84	40,68	40,43	40,07	39,57	38,93	38,17	37,29	36,32	35,27
	β	0,0114	0,0221	0,0398	0,0664	0,1027	0,1488	0,2038	0,2661	0,3334	0,4031
	δ	40,83	40,66	40,36	39,91	39,27	38,43	37,39	36,18	34,81	33,34
	β	0,0107	0,0207	0,0397	0,0704	0,1152	0,1750	0,2484	0,3323	0,4223	0,5134
	δ	40,85	40,68	40,35	39,80	38,97	37,82	36,34	34,57	32,58	30,47

Т а б л и ц а 2

σ		*a*									
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	β δ	0,0071 90,89	0,1437 87,83	0,5950 73,01	0,9295 53,82	0,9958 41,88	$0{,}9^{4}07$ 35,00				
10	β δ	0,0071 90,86	0,1440 87,33	0,5970 71,19	0,9302 51,18	0,9958 39,16	$0{,}9^{4}06$ 32,38				
	β δ	0,0070 90,84	0,1360 87,05	0,5772 70,14	0,9212 49,05	0,9948 36,50	$0{,}9^{3}86$ 29,74				
	β δ	0,0071 80,89	0,1106 78,75	0,4750 68,41	0,8511 52,27	0,9817 40,47	$0{,}9^{3}00$ 33,66				
20	β δ	0,0071 80,86	0,1139 78,33	0,4887 66,75	0,8615 49,74	0,9840 37,91	$0{,}9^{3}17$ 31,23				
	β δ	0,0070 80,84	0,1103 78,06	0,4804 65,69	0,8561 47,79	0,9827 35,53	$0{,}9^{3}05$ 28,83				
	β δ	0,0071 70,89	0,0794 69,52	0,3394 63,19	0,7062 51,19	0,9280 39,89	0,9904 32,76	$0{,}9^{3}27$ 28,44			
30	β δ	0,0071 70,86	0,0835 69,22	0,3602 61,89	0,7333 48,86	0,9406 37,43	0,9929 30,50	$0{,}9^{3}52$ 26,31			
	β δ	0,0070 70,84	0,0830 68,99	0,3642 60,92	0,7401 47,01	0,9435 35,26	0,9934 28,36	$0{,}9^{3}56$ 24,30			
	β δ	0,0071 60,89	0,0537 60,08	0,2110 56,79	0,4924 49,58	0,7712 40,39	0,9308 32,80	0,9859 27,92	0,9980 24,86	$0{,}9^{3}80$ 22,77	
40	β δ	0,0071 60,87	0,0568 59,89	0,2300 55,99	0,5314 47,78	0,8078 38,03	0,9487 30,55	0,9910 25,92	0,9989 23,01	$0{,}9^{4}07$ 21,00	
	β δ	0,0070 60,84	0,0576 59,75	0,2416 55,26	0,5578 46,07	0,8312 35,83	0,9587 28,46	0,9934 24,08	$0{,}9^{3}27$ 21,35		
	β δ	0,0071 50,89	0,0344 50,45	0,1122 49,05	0,2644 45,92	0,4765 40,89	0,6910 34,91	0,8516 29,42	0,9422 25,32	0,9816 22,59	0,9952 20,81
50	β δ	0,0071 50,87	0,0360 50,36	0,1226 48,69	0,2948 44,95	0,5278 39,13	0,7467 32,60	0,8928 27,10	0,9640 23,29	0,9903 20,85	0,9978 19,25
	β δ	0,0070 50,87	0,0366 50,30	0,1323 48,33	0,3265 43,86	0,5796 37,15	0,7971 30,23	0,9249 24,93	0,9784 21,52	0,9950 19,38	$0{,}9^{3}07$ 17,95
	β δ	0,0071 40,90	0,0212 40,70	0,0514 40,22	0,1052 39,30	0,1862 37,82	0,2918 35,75	0,4130 33,19	0,5376 30,36	0,6539 27,49	0,7535 24,82
60	β δ	0,0071 40,89	0,0216 40,66	0,0543 40,11	0,1147 39,04	0,2082 37,27	0,3317 34,74	0,4728 31,62	0,6137 28,21	0,7378 24,92	0,8351 22,07
	β δ	0,0070 40,90	0,0215 40,65	0,0572 40,03	0,1273 38,75	0,2388 36,55	0,3854 33,42	0,5463 29,67	0,6960 25,84	0,8152 22,44	0,8978 19,76

Таблица 3

		a									
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	β	0,0067	0,2663	0,8634	0,9964	$0,9^{4}85$					
	δ	90,90	84,56	59,77	42,50	34,33					
10	β	0,0067	0,2671	0,8651	0,9965	$0,9^{4}85$					
	δ	90,87	83,51	56,57	38,84	30,97					
	β	0,0067	0,2526	0,8503	0,9955	$0,9^{4}76$					
	δ	90,83	82,85	54,29	35,57	27,56					
	β	0,0067	0,2012	0,7561	0,9832	$0,9^{3}73$					
	δ	80,90	76,60	57,75	41,06	33,00					
20	β	0,0067	0,2084	0,7714	0,9857	$0,9^{3}79$					
	δ	80,87	75,71	54,76	37,65	29,84					
	β	0,0067	0,2037	0,7661	0,9849	$0,9^{3}76$					
	δ	80,83	75,05	52,57	34,69	26,77					
	β	0,0067	0,1390	0,5902	0,9292	0,9958	$0,9^{4}06$				
	δ	70,90	68,27	55,77	40,48	32,05	27,62				
30	β	0,0067	0,1486	0,6242	0,9444	0,9973	$0,9^{4}51$				
	δ	70,87	67,62	53,14	37,25	29,16	25,00				
	β	0,0067	0,1511	0,6369	0,9495	0,9977	$0,9^{4}60$				
	δ	70,83	67,07	51,04	34,47	26,34	22,24				
	β	0,0067	0,0878	0,3848	0,7647	0,9544	0,9954	$0,9^{3}75$			
	δ	60,90	59,45	52,70	41,08	31,89	26,96	24,20			
40	β	0,0067	0,0958	0,4294	0,8156	0,9723	0,9980	$0,9^{4}17$			
	δ	60,87	59,06	50,76	37,88	29,03	24,57	22,03			
	β	0,0067	0,1010	0,4607	0,8448	0,9800	0,9987	$0,9^{4}56$			
	δ	60,84	58,69	48,95	35,06	26,31	22,01	19,56			
	β	0,0067	0,0510	0,1977	0,4570	0,7255	0,8990	0,9727	0,9944	$0,9^{3}11$	
	δ	50,90	50,18	47,41	41,59	34,23	28,06	24,18	21,99	20,67	
50	β	0,0067	0,0553	0,2283	0,5292	0,8038	0,9452	0,9894	0,9985	$0,9^{3}84$	
	δ	50,88	50,01	46,48	39,23	31,01	25,16	21,91	20,10	18,94	
	β	0,0067	0,0593	0,2618	0,5990	0,8627	0,9702	0,9956	$0,9^{3}54$		
	δ	50,87	49,83	45,35	36,52	27,75	22,33	19,49	17,84		
	β	0,0067	0,0277	0,0797	0,1716	0,2967	0,4359	0,5691	0,6829	0,7727	0,8396
	δ	40,91	40,60	39,76	38,14	35,76	32,88	29,89	27,12	24,74	22,82
60	β	0,0067	0,0289	0,0889	0,2009	0,3564	0,5266	0,6805	0,8003	0,8831	0,9353
	δ	40,90	40,55	39,52	37,47	34,38	30,67	26,94	23,70	21,18	19,38
	β	0,0067	0,0302	0,1024	0,2474	0,4497	0,6557	0,8156	0,9142	0,9646	0,9867
	δ	40,90	40,50	39,21	36,36	31,96	26,95	22,55	19,39	17,40	16,22

Наконец, сравнение таблиц дает довольно ясную картину значительного роста мощности и снижения средней задержки критериев при увеличении m и n, по крайней мере, тогда, когда числа m и n являются умеренными.

Обнаружение на последовательности изображений. Прокомментируем, однако, вкратце случай обнаружения на последовательности изображений. Здесь след траектории объекта состоит из последовательности отдельных точек (не более одной на каждом изображении последовательности) или отрезков линий или полос, вообще говоря, неизвестной длины и ширины. При наложении изображений соседние элементы следа будут касаться или между ними будет иметь место зазор, возможно, также неизвестной длины.

В общем случае наблюдаемая последовательность $\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}$, $\zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{im}$, $\psi_{i1}, \ldots, \psi_{in}$ является объединением наблюдений на последовательности изображений, выполняемых с учетом ожидаемой особенности конструкции следа. Полная проверка гипотезы об отсутствии следа объекта потребует перебора всех возможных особенностей.

Заключение. Путем редукции наблюдений к последовательности независимых случайных величин, принимающих значения +1, −1 и 0, построены два последовательных непараметрических критерия для обнаружения объектов, движущихся к заданной точке на одном изображении и последовательности изображений. «Попутно» получены два последовательных критерия для обнаружения момента появления «разладки» в вероятностных характеристиках указанной последовательности случайных величин. Показано превосходство одного из них над известным критерием, восходящим к Пейджу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ширяев А. Н.** Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
2. **Салов Г. И.** Уравнение для апостериорной вероятности наличия «разладки» последовательности зависимых случайных величин и оптимальное по Ширяеву обнаружение момента появления «разладки» // Теория вероятностей и ее применения. 1989. **34**, вып. 4. С. 799.
3. **Салов Г. И.** Метод получения равномерно наиболее мощных критериев для обнаружения протяженных объектов на случайном фоне // Автометрия. 1995. № 1. С. 34.
4. **Салов Г. И.** О мощности непараметрических критериев для обнаружения протяженных объектов на случайном фоне // Автометрия. 1997. № 3. С. 60
5. **Page E. S.** A test for a change in a parameter occuring at an unknown point // Biometrika. 1955. **42**, N 4. P. 523.
6. **Kennedy D. P.** Some martingales related to cumulative sum tests and single-server queues // Stoch. Proc. and their Applic. 1976. **4**. P. 261.
7. **Macken C. A., Taylor H. M.** On deviations from the maximum in a stochastic process // SIAM J. Appl. Math. 1977. **32**, N 1. P. 96.
8. **Khan R. A.** On cumulative sum procedures and the SPRT with applications // J. R. Statist. Soc. Ser. B. 1984. **46**, N 1. P. 79.
9. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973.
10. **Duckworth W. E., Wyatt J. K.** Rapid statistical techniques for operational research workers // Operational Research Quarterly. 1958. **9**, N 3. P. 218.
11. **Zacks S.** The probability distribution and the expected value of a stopping variable associated with one-sided cusum procedures for non-negative integer valued random variables // Commun. in Statistics. 1981. **A10**. P. 2245.

Поступила в редакцию 1 октября 1997 г.