

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.387.2 : 519.685

В. М. Ефимов, А. Н. Колесников
(Новосибирск)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ СЖАТИЯ
ИНФОРМАЦИИ В ДВУМЕРНЫХ МАССИВАХ ДАННЫХ
БЕЗ ПОТЕРИ ТОЧНОСТИ ПРИ ИХ ВОССТАНОВЛЕНИИ

Оцениваются показатели сжатия для ряда алгоритмов сокращения избыточности информации в двумерных массивах данных, использующих итеративные иерархические и построчные процедуры с применением интерполяции по двум, трем и четырем элементам массива. Предложен достаточно простой построчный алгоритм сжатия с использованием предсказания по трем значениям элементов массива, проведено сравнение с ранее известными аналогичными методами. Восстановление массива предполагается безошибочным.

Введение. Материал этой работы является продолжением исследований, начатых в [1]. В качестве модели сжимаемого массива данных предполагается использовать набор цифровых значений стационарного случайного изотропного поля с нормальным распределением, заданный на равномерной пространственной решетке с шагом Δ . Результаты оценки коэффициента сжатия конкретизируются на примере изотропного поля с корреляционной функцией марковского типа, описываемой зависимостью

$$\rho(r) \cong 1 - \alpha r \quad (1)$$

при $r \rightarrow 0$, где r — евклидово расстояние между элементами массива.

Предполагается также, что шаг квантования по уровню q при аналого-цифровом преобразовании значений поля в узлах решетки по величине существенно уступает среднеквадратичному значению постинтерполяционного остатка. При этом можно пренебречь вкладом ошибки квантования в дисперсию последнего и распределение постинтерполяционного остатка считать близким к нормальному, а для оценки сжатия использовать дифференциальную энтропию, для вычисления которой достаточно знания соответствующих дисперсий*.

В разд. 1 проведен анализ иерархических алгоритмов сжатия массива данных с интерполяцией, в разд. 2 исследованы иерархические алгоритмы сжатия с двумерным вейвлет-преобразованием, в разд. 3 рассмотрены более простые построчные алгоритмы с предсказанием по трем точкам.

1. Иерархические алгоритмы сжатия с интерполяцией. Эффект от сжатия можно ожидать только в том случае, если элементы массива коррелированы между собой. Поэтому при использовании этих процедур массив имеет объем $(2^n + 1) \times (2^n + 1)$, где значение n для корреляционной функции, определяемой соотношением (1), примерно равно величине $-\log_2(\alpha\Delta)$.

* Распределения и энтропия постинтерполяционного остатка для первой и второй конечной разности квантованного сигнала исследованы в [2, 3].

1.1. В [4—6] описан иерархический алгоритм сжатия с интерполяцией. Пусть в исходном подмассиве $a_{i,j}$, расположенном на равномерной решетке с шагом Δ , содержится $2^n + 1$ столбцов и столько же строк. Преобразование осуществляется следующим образом: вначале интерполируются значения для каждого второго элемента на периметре массива по элементам, примыкающим к нему, затем внутри массива для всех элементов массива (кроме «опорных» $a_{2i, 2j}$) за два шага осуществляется интерполяция по четырем значениям элементов, расположенных на «прямых» (шаг 1) или «косых» (шаг 2) крестах.

Шаг 1. Интерполяция для $a_{2i+1, 2j}$ по четырем элементам на «прямом» кресте:

$$\begin{array}{c}
 a_{2i, 2j} \\
 a_{2i+1, 2j-1} \quad a_{2i+1, 2j} \quad a_{2i+1, 2j+1} \\
 a_{2i+2, 2j}
 \end{array} \quad (1.1)$$

$$d_{2i+1, 2j} = E \left[a_{2i+1, 2j} - (a_{2i, 2j} + a_{2i+1, 2j-1} + a_{2i+1, 2j+1} + a_{2i+2, 2j})/4 \right].$$

$$(i, j = 0, 1, \dots, n/2)$$

Шаг 2. Интерполяция для $a_{2i+1, 2j+1}$ по четырем элементам на «косом» кресте:

$$\begin{array}{c}
 a_{2i, 2j} \qquad \qquad a_{2i, 2j+2} \\
 a_{2i+1, 2j+1} \\
 a_{2i+2, 2j} \qquad \qquad a_{2i+2, 2j+2}
 \end{array} \quad (1.2)$$

$$d_{2i+1, 2j+1} = E \left[a_{2i+1, 2j+1} - (a_{2i, 2j} + a_{2i, 2j+2} + a_{2i+2, 2j} + a_{2i+2, 2j+2})/4 \right].$$

$$(i, j = 0, 1, \dots, n/2)$$

Здесь и далее $E[x]$ означает целую часть x .

Кодированию подлежат постинтерполяционные остатки $d_{k,i}$ — разность между истинным значением элемента массива и его интерполяционной оценкой.

«Опорные» элементы $a_{2i, 2j}$, оставшиеся не закодированными после этой операции, расположены на равномерной решетке с шагом 2Δ . К массиву размером $(2^{n-1} + 1) \times (2^{n-1} + 1)$ элементов итеративным образом применяется описанная выше процедура. Оставшийся, в конце концов, массив содержит всего четыре элемента. Остальные элементы массива представлены соответствующими (округленными с шагом q) постинтерполяционными остатками. Восстановление осуществляется в обратном порядке итеративным образом, причем на каждом этапе сначала восстанавливаются значения по «косому» кресту, а затем — по «прямому».

Разность энтропии, выраженная в битах на один элемент в соответствии с [1], определяется соотношением

$$\delta H = \sum_{k=1}^n P_k \log_2(\sigma_0/\sigma_2(2^{k-1}\Delta)) + \sum_{k=1}^{2^n-1} Q_k \log_2(\sigma_0/\sigma_4(2^{(k-1)/2}\Delta)). \quad (1.3)$$

Весовые коэффициенты (доля элементов с соответствующей постинтерполяционной дисперсией):

$$P_k = 2^{n+2-k}/(2^n + 1)^2, \quad (1.4)$$

$$Q_k = \begin{cases} (2^{2n-k} - 2^{n-(k-1)/2})/(2^n + 1)^2, & k = 1, 3, 5, \dots, \\ 2^{2n-k}/(2^n + 1)^2, & k = 2, 4, \dots \end{cases}$$

В соответствии с соотношениями (6) и (12) из [1]

$$\begin{aligned}\sigma_2^2(2^{k-1}\Delta) &= \sigma_0^2 [3 - 4\rho(2^{k-1}\Delta) + \rho(2^k\Delta)]/2, \\ \sigma_4^2(2^{(k-1)/2}\Delta) &= \sigma_0^2 [5 - 8\rho(2^{(k-1)/2}\Delta) + 2\rho(2^{k/2}\Delta) + \rho(2^{(k+1)/2}\Delta)]/4.\end{aligned}\quad (1.5)$$

В асимптотике ($\alpha\Delta \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}\sigma_2^2(2^{k-1}\Delta) &\cong \sigma_0^2 \alpha \Delta 2^{k-1}, \\ \sigma_4^2(2^{(k-1)/2}\Delta) &\cong \sigma_0^2 \alpha \Delta ((3 - \sqrt{2})/2) 2^{(k-1)/2}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Из соотношений (1.3), (1.4) и (1.6) вытекает, что эффективность рассматриваемого в [4—6] алгоритма для подмассива выражается соотношением

$$\delta H \cong -\frac{1}{2} \log_2(\alpha\Delta) - \gamma(\alpha\Delta), \quad (1.7)$$

где значения величины $\gamma(\alpha\Delta)$ определяются первыми строками третьего столбца табл. 1.

Таблица 1

$1/\alpha\Delta$	n	$\gamma(\alpha\Delta)$
8	3	0,12
		0,17
		0,11
16	4	0,13
		0,21
		0,12
32	5	0,11
		0,20
		0,13
64	6	0,11
		0,20
		0,12
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	$\frac{1}{2} \log_2(2/(3 - \sqrt{2})) - 1/4$
		$\frac{1}{6} \log_2(2/(3 - \sqrt{2})) - 13/48$
		$\frac{1}{6} \log_2(2/(3 - \sqrt{2})) - 3/16$

Очевидно, что для оценки эффективности алгоритма на всем массиве объемом $(2^N + 1) \times (2^N + 1)$ ($N \gg n$) необходимо умножить правую часть (1.7) на величину $(1 - (\alpha\Delta)^2)$, учитывая, что почти все опорные элементы массива используются в четырех подмассивах:

$$\delta H \cong (1 - (\alpha\Delta)^2) \left(-\frac{1}{2} \log_2(\alpha\Delta) - \gamma(\alpha\Delta) \right). \quad (1.8)$$

1.2. В [7] рассмотрен алгоритм, отличие которого от описанного в предыдущем разделе заключается в том, что вместо интерполяции по четырем точ-

кам на «прямом» кресте осуществляется интерполяция по вертикальным (а) и горизонтальным (б) парам элементов:

$$\begin{aligned} \text{а) } d_{2i+1, 2j} &= E \left[a_{2i+1, 2j} - (a_{2i, 2j} + a_{2i+1, 2j})/2 \right] \quad (i, j = 0, 1, \dots, n/2), \\ \text{б) } d_{2i, 2j+1} &= E \left[a_{2i, 2j+1} - (a_{2i, 2j} + a_{2i, 2j+2})/2 \right] \quad (i, j = 0, 1, \dots, n/2). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Сжатие на один элемент при этом в соответствии с [1] составляет:

$$\delta H \cong \sum_{k=1}^n P_k \log_2 [\sigma_0/\sigma_2(2^{k-1}\Delta)] + \sum_{k=1}^n Q_k \log_2 [\sigma_0/\sigma_4(2^{k-1/2}\Delta)]. \quad (1.10)$$

Коэффициенты в (1.10)

$$\begin{aligned} P_k &= (2^{2n+1-2k} + 2^{n+1-k})/(2^n + 1)^2, \\ Q_k &= 2^{2(n-k)}/(2^n + 1)^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Дисперсия постинтерполяционного остатка $\sigma_2^2(2^{k-1}\Delta)$ определяется соотношением (1.5), а при $\alpha\Delta \rightarrow 0$ — соотношением (1.6). Соотношение для дисперсии постинтерполяционного остатка $\sigma_4^2(2^{k-1/2}\Delta)$ имеет вид

$$\sigma_4^2(2^{k-1}\Delta) = \sigma_0^2 [5 - 8\rho(2^{k-1/2}\Delta) + 2\rho(2^k\Delta) + \rho(2^{k+1/2}\Delta)]/4. \quad (1.12)$$

При $\alpha\Delta \rightarrow 0$

$$\sigma_4^2(2^{k-1}\Delta) \cong \sigma_0^2 \alpha \Delta ((3 - \sqrt{2})/2) 2^{k-1/2}. \quad (1.13)$$

Используя (1.6), (1.10), (1.11) и (1.13), получим асимптотическую формулу для оценки эффективности алгоритма, совпадающую с (1.7), где значения величины $\gamma(\alpha\Delta)$ определяются вторыми строками третьего столбца табл. 1.

1.3. Отметим, что если в этом алгоритме использовать для интерполяции вначале «прямой» крест, а затем интерполяцию по двум отсчетам, то его характеристики улучшатся. Данные по величине $\gamma(\alpha\Delta)$ для этой модификации находятся в третьих строках третьего столбца табл. 1. Эффективность алгоритма на всем массиве объемом $(2^N + 1) \times (2^N + 1)$ ($N \gg n$) определяется соотношением (1.8).

2. Иерархические алгоритмы сжатия с вейвлет-преобразованием. Алгоритмы сжатия этой группы основываются на итеративном вычислении и последующем экономном кодировании набора трансформант двумерного вейвлет-преобразования, обладающего тем свойством, что существует безошибочное обратное преобразование для получения значений элементов исходного массива данных.

2.1. В алгоритме, рассматриваемом в [8], используется итеративная процедура, представляющая собой дискретное двумерное вейвлет-преобразование по функциям Хаара для группы из 2×2 элементов. При первой итерации значения элементов каждой группы из массива размером $2^N \times 2^N$ подвергаются преобразованию с последующим округлением с шагом квантования по уровню q :

$$\begin{aligned} & \begin{array}{cc} a_{2i, 2j} & a_{2i, 2j+1} \\ a_{2i+1, 2j} & a_{2i+1, 2j+1} \end{array} \\ d_{++} &= E \left[(a_{2i, 2j} + a_{2i, 2j+1} + a_{2i+1, 2j} + a_{2i+1, 2j+1})/4 \right], \\ d_{+-} &= E \left[(a_{2i, 2j} + a_{2i, 2j+1} - a_{2i+1, 2j} - a_{2i+1, 2j+1})/2 \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$d_{-+} = E \left[(a_{2i, 2j} - a_{2i, 2j+1} + a_{2i+1, 2j} - a_{2i+1, 2j+1}) / 2 \right],$$

$$d_{--} = a_{2i, 2j} - a_{2i, 2j+1} - a_{2i+1, 2j} + a_{2i+1, 2j+1}.$$

Из трансформант d_{++} , полученных для каждой четверки элементов, формируется новый массив данных размером $2^{N-1} \times 2^{N-1}$ элементов. В этом массиве вновь формируются группы из 2×2 элементов, значения которых подвергаются преобразованию (2.1). Трансформанты d_{+-} , d_{-+} , d_{--} при каждой итерации дальнейшему преобразованию не подлежат, а экономным образом кодируются.

Для того чтобы оценить эффективность этой процедуры для рассматриваемой модели сигнала (в пренебрежении шумом квантования трансформант), достаточно вычислить дисперсию трансформант при каждой итерации.

Например, для первой итерации значения трансформант в соответствии с (2.1) равны следующим величинам:

$$\begin{aligned} \sigma_{++}^2 &= \sigma_0^2 (1 + 2\rho(\Delta) + \rho(\sqrt{2}\Delta)) / 4, \\ \sigma_{+-}^2 &= \sigma_0^2 (1 - \rho(\sqrt{2}\Delta)), \\ \sigma_{-+}^2 &= \sigma_0^2 (1 - \rho(\sqrt{2}\Delta)), \\ \sigma_{--}^2 &= 4\sigma_0^2 (1 - 2\rho(\Delta) + \rho(\sqrt{2}\Delta)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

В асимптотике ($\alpha\Delta \rightarrow 0$) значения этих дисперсий приведены в табл. 2 (k — номер итерации).

Т а б л и ц а 2

$-\sigma_0^2 (1 - \alpha\Delta(2 + \sqrt{2})(8^k - 1) / (2^{2k} \gamma))$	$-\sigma_0^2 \alpha \Delta \quad k=1$ $-\sigma_0^2 \alpha \Delta (2^k - 1/2 - (2 + \sqrt{2})(8^k - 1) / (2^{2(k-1)} \gamma))$
$-\sigma_0^2 \alpha \Delta \quad k=1$ $-\sigma_0^2 \alpha \Delta (2^k - 1/2 - (2 + \sqrt{2})(8^k - 1) / (2^{2(k-1)} \gamma))$	$-\sigma_0^2 \alpha \Delta \cdot 4(2 - \sqrt{2}) \quad k=1$ $-\sigma_0^2 \alpha \Delta \cdot 2 \quad k=2$ $-\sigma_0^2 \alpha \Delta \cdot 3 \quad k=3$

Эффективность алгоритма в соответствии с [1] может быть определена по формуле

$$\delta H \cong \sum_{m=1}^{3k+1} P_m \log_2(\sigma_0 / \sigma(m)), \quad (2.3)$$

где P_m — доля, а $\sigma(m)$ — среднеквадратическое значение m -й трансформанты. В асимптотике ($\alpha \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \delta H \cong & -(1/2^{2k}) \frac{1}{2} \log_2(1 - \alpha\Delta(2 + \sqrt{2})(8^k - 1) / 2^{2k} \gamma) - \\ & - (1 - 1/2^{2k}) \frac{1}{2} \log_2(\alpha\Delta) - \gamma(k). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Величина $\gamma(k)$ в соответствии с табл. 2 принимает следующие значения: $\gamma(1) \approx 0,278$, $\gamma(2) \approx 0,374$, $\gamma(3) \approx 0,418$.

Из анализа приведенных выше соотношений следует, что рациональное число итераций определяется величиной падения коэффициента корреляции

на интервале между соседними (по столбцу или строке) элементами массива. Так, например, при $\alpha\Delta = 1/16$ третья итерация дает дополнительную экономию около 0,1 бита на элемент.

2.2. Развитием рассмотренного в [8] алгоритма сжатия является его модификация, направленная на уменьшение дисперсии трансформант [11—13]. Это достигается путем использования следующего одномерного преобразования:

$$\begin{aligned}
 & a_{2j-2} \quad a_{2j-1} \quad a_{2j} \quad a_{2j+1} \quad a_{2j+2} \quad a_{2j+3} \\
 & d_+ = E[(a_{2j} + a_{2j+1})/2], \quad (2.5) \\
 & d_- = E[(-E[(a_{2j-2} + a_{2j-1})/2] + 4(a_{2j} - a_{2j+1}) - E[(a_{2j+2} + a_{2j+3})/2])/4].
 \end{aligned}$$

Двумерное преобразование осуществляется путем последовательного применения одномерного преобразования по вертикали и горизонтали.

Данные для дисперсий трансформант для первых трех итераций приведены в табл. 3. При этом дисперсия первой трансформанты ($k = 1$) совпадает с данными первой строки табл. 2. В соответствии с данными табл. 3 величины $\gamma(1) \cong -0,01$, $\gamma(2) \cong -0,12$, $\gamma(3) \cong -0,14$. Таким образом, величина модуля $\gamma(k)$ по сравнению с предыдущим алгоритмом существенно уменьшается.

Таблица 3

$\sim \sigma_0^2 (1 - \alpha\Lambda(2 + \sqrt{2})(8^k - 1)/(2^{2k}7))$	$\sim \sigma_0^2 \alpha\Delta \cdot 0,88 \quad k = 1$
	$\sim \sigma_0^2 \alpha\Delta \cdot 0,99 \quad k = 2$
	$\sim \sigma_0^2 \alpha\Delta \cdot 1,73 \quad k = 3$
$\sim \sigma_0^2 \alpha\Delta \cdot 0,88 \quad k = 1$	$\sim \sigma_0^2 \alpha\Delta \cdot 2,26 \quad k = 1$
$\sim \sigma_0^2 \alpha\Delta \cdot 0,99 \quad k = 2$	$\sim \sigma_0^2 \alpha\Delta \cdot 1,66 \quad k = 2$
$\sim \sigma_0^2 \alpha\Delta \cdot 1,73 \quad k = 3$	$\sim \sigma_0^2 \alpha\Delta \cdot 2,49 \quad k = 3$

3. Построчные алгоритмы сжатия. 3.1. Оценим далее построчный алгоритм сжатия, в котором осуществляется прогнозирование по трем значениям элементов массива.

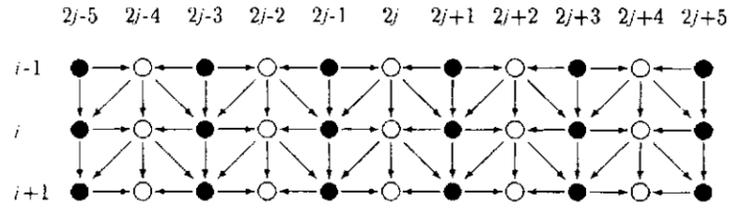
Для сжатия информации, содержащейся в массиве, по всем строкам, начиная со второй, последовательно применяется алгоритм прогнозирования по следующей схеме (см. рисунок):

а) интерполяция по трем точкам для нечетных элементов строки:

$$\begin{aligned}
 & a_{i-1,2j} \quad a_{i-1,2j+1} \quad a_{i-1,2j+2} \\
 & \quad \quad \quad a_{i,2j+1} \quad (3.1) \\
 & d_{i,2j+1} = E[a_{i,2j+1} - (w_{1a}a_{i-1,2j} + w_{2a}a_{i-1,2j+1} + w_{3a}a_{i-1,2j+2})]; \\
 & \quad (i = 1, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, N/2-1)
 \end{aligned}$$

б) интерполяция по трем точкам для четных элементов строки:

$$\begin{aligned}
 & \quad \quad \quad a_{i-1,2j} \\
 & \quad \quad \quad a_{i,2j-1} \quad a_{i,2j} \quad a_{i,2j+1} \quad (3.2) \\
 & d_{i,2j} = E[a_{i,2j} - (w_{1b}a_{i,2j-1} + w_{2b}a_{i-1,2j} + w_{3b}a_{i,2j+1})]. \\
 & \quad (i = 1, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, N/2-1)
 \end{aligned}$$



Веса w_1 , w_2 и w_3 определяются из условия минимума дисперсии постинтерполяционного остатка (шум квантования, как и выше, считаем пренебрежимо малым):

$$\begin{aligned}
 w_{1a} = w_{3a} &= (1 - \rho(2\Delta) + \rho(\sqrt{2}\Delta)) / (3 - 4\rho(\Delta) + \rho(2\Delta)), \\
 w_{2a} &= 1 - 2w_{1a}, \\
 w_{1b} = w_{3b} &= (1 - \rho(\sqrt{2}\Delta)) / (3 - 4\rho(\sqrt{2}\Delta) + \rho(2\Delta)), \\
 w_{2b} &= 1 - 2w_{1b}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Дисперсия постинтерполяционного остатка:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{3a}^2 &= 2\sigma_0^2 \left[1 - \rho(\Delta) - \frac{(1 - 2\rho(\Delta) + \rho(\sqrt{2}\Delta))^2}{3 - 4\rho(\Delta) + \rho(2\Delta)} \right], \\
 \sigma_{3b}^2 &= 2\sigma_0^2 \left[1 - \rho(\Delta) - \frac{(1 - \rho(\sqrt{2}\Delta))^2}{3 - 4\rho(\sqrt{2}\Delta) + \rho(2\Delta)} \right].
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

В асимптотике ($\alpha\Delta \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}
 w_{1a} = w_{3a} &= 1 - 1/\sqrt{2}, \quad w_{2a} = \sqrt{2} - 1, \\
 w_{1b} = w_{3b} &= 1/(4 - \sqrt{2}), \quad w_{2b} = (\sqrt{2} - 1)/(2\sqrt{2} - 1), \\
 \sigma_{3a}^2 &\cong 4\sigma_0^2 \alpha\Delta(\sqrt{2} - 1), \\
 \sigma_{3b}^2 &\cong 4\sigma_0^2 \alpha\Delta(\sqrt{2} - 1)/(2\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Эффективность рассматриваемого алгоритма

$$\delta H = 0,5 \log_2(\sigma_0/\sigma_{3a}) + 0,5 \log_2(\sigma_0/\sigma_{3b}). \tag{3.6}$$

В асимптотике ($\alpha\Delta \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}
 \delta H &= -0,5 \log_2(\alpha\Delta) - 0,25 \log_2(4(\sqrt{2} - 1)) - \\
 &- 0,25 \log_2(4(\sqrt{2} - 1)/(2\sqrt{2} - 1)) \cong -0,5 \log_2(\alpha\Delta) - 0,1484.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2. Прогнозирование по трем значениям элементов массива используется в алгоритме [6, 9, 10]:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cc} a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} \\ & a_{i,j-1} & a_{i,j} \end{array} \\
 d_{i,j} &= E \left[a_{i,j} - (w_{1c} a_{i,j-1} + w_{2c} a_{i-1,j-1} + w_{3c} a_{i-1,j}) \right], \\
 & (i, j = 1, \dots, N-1)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для изотропного массива оптимальные веса

$$\begin{aligned} w_{1c} = w_{3c} &= (1 - \rho(\sqrt{2}\Delta)) / (3 - 4\rho(\Delta) + \rho(\sqrt{2}\Delta)), \\ w_{2c} &= 1 - 2w_{1c}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

а минимальная дисперсия постинтерполяционного остатка

$$\sigma_{3c}^2 = 2\sigma_0^2 \left[1 - \rho(\sqrt{2}\Delta) - \frac{(1 - \rho(\sqrt{2}\Delta))^2}{3 - 4\rho(\Delta) + \rho(\sqrt{2}\Delta)} \right]. \quad (3.10)$$

В асимптотике

$$\begin{aligned} w_{1c} = w_{3c} &= 1 / (2\sqrt{2} - 1), \\ w_{2c} &= (2\sqrt{2} - 3) / (2\sqrt{2} - 1), \\ \sigma_{3c}^2 &= 4\sigma_0^2 \alpha \Delta (2 - \sqrt{2}) / (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Сжатие в битах на один отсчет

$$\delta H = \log_2(\sigma_0 / \sigma_{3c}). \quad (3.12)$$

В асимптотике ($\alpha\Delta \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \delta H &\cong -0,5 \log_2(\alpha\Delta) - 0,5 \log_2(4(2 - \sqrt{2}) / (2\sqrt{2} - 1)) \cong \\ &\cong -\frac{1}{2} \log_2(\alpha\Delta) - 0,178. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Заключение. Резюмируя изложенное выше, можно свести формулы для оценки эффективности всех типов алгоритмов сжатия в табл. 4.

Таблица 4

Алгоритмы		
интерполяционные	с преобразованием	построенные
$(1 - (\alpha\Delta)^2) \left(-\frac{1}{2} \log_2(\alpha\Delta) - \gamma(\alpha\Delta) \right)$	$-(1/4^k) \frac{1}{2} \log_2(1 - \alpha\Delta(2 + \sqrt{2})(8^k - 1)/4^k) - (1 - 1/4^k) \frac{1}{2} \log_2(\alpha\Delta) - \gamma(k)$	$-\frac{1}{2} \log_2(\alpha\Delta) - \gamma$

По формулам этой таблицы и данным других таблиц, а также [1] составлена табл. 5, при помощи которой можно сравнить эффективность рассмотренных выше и в [1] алгоритмов сжатия.

Эта таблица содержит добавление к главному члену, общему для всех алгоритмов сжатия и равному

$$\delta H \cong -\frac{1}{2} \log_2(\alpha\Delta),$$

и характеризует особенности алгоритмов. Алгоритмы разбиты на три группы, в каждой из которых они упорядочены по эффективности.

Таблица 5

	Алгоритм	$1/\alpha\Delta = 8$	$1/\alpha\Delta = 16$	$1/\alpha\Delta = 32$	$1/\alpha\Delta = 64$
1	1.1 [4—6]	-0,14	-0,13	-0,11	-0,11
	1.3	-0,13	-0,13	-0,13	-0,12
	1.2 [7]	-0,19	-0,21	-0,20	-0,20
2	2.2 [11—13]	-0,36	-0,59	-0,71	-0,85
		-0,20	-0,23	-0,27	-0,30
		-0,15	-0,17	-0,18	-0,19
2	2.1 [8]	-0,63	-0,77	-0,89	-1,00
		-0,46	-0,48	-0,52	-0,55
		-0,42	-0,45	-0,46	-0,47
3	3.1	-0,15	-0,15	-0,15	-0,15
	3.2 [6, 9, 10]	-0,18	-0,18	-0,18	-0,18
	[1, п. 3]	-0,21	-0,21	-0,21	-0,21
	[1, п. 2]	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25
	[1, п. 1]	-0,50	-0,50	-0,50	-0,50

Относительно алгоритмов первой группы можно сказать, что алгоритм 1.3 с применением второй конечной разности и «прямых» крестов практически эквивалентен алгоритму 1.1, использующему «прямые» и «косые» кресты. Это происходит в силу того, что вторая конечная разность наименьшего размера превосходит «косой» крест наименьшего размера. Алгоритм 1.2 [7] из этой группы уступает предыдущему почти 0,1 бита на элемент массива при одинаковой сложности вычислений. Алгоритм 1.3 также значительно превосходит алгоритм 1.2 и практически эквивалентен алгоритму 1.1.

В алгоритмах второй группы процедура сжатия 2.1 [8] является плохой, так как с ростом числа итераций ее эффективность повышается слабо и при трех итерациях уступает первому алгоритму первой группы около 0,3 бита на элемент массива. При этом из тенденции повышения эффективности следует, что увеличение числа итераций может улучшить этот алгоритм несущественно. Для алгоритма 2.2 [11—13] тенденция повышения эффективности с ростом числа итераций выражена более отчетливо, однако этот алгоритм, хотя и незначительно, также уступает не только двум первым алгоритмам первой группы (1.1) и (1.3), но и первому алгоритму третьей группы (3.1). У обоих алгоритмов второй группы наблюдается очевидная тенденция ухудшения эффективности с ростом интервала корреляции.

Среди алгоритмов третьей группы лучшими оказываются алгоритмы с использованием интерполяции по трем отсчетам. При этом алгоритм 3.1, являющийся идеологически усовершенствованным вариантом алгоритма [1, п. 1], выигрывает у следующего за ним алгоритма 3.2 около 0,03 бита на один элемент массива.

Предлагаемый построчный алгоритм сжатия 3.1, весьма незначительно уступая алгоритму 1.1 в эффективности, гораздо проще его в реализации, что является важным при сжатии изображений большого размера.

Результаты данной работы были использованы при разработке алгоритмов сжатия изображений для медицинской информационно-коммуникационной системы [14, 15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов В. М., Золотухин Ю. Н., Колесников А. Н. Оценка эффективности некоторых алгоритмов сокращения избыточности информации при абсолютной точности воспроизведения // Автометрия. 1991. № 6. С. 93.
2. Ефимов В. М. Асимптотические распределения конечных разностей квантованного по уровню стационарного случайного сигнала // Автометрия. 1993. № 5. С. 64.
3. Ефимов В. М., Колесников А. Н. Оптимизация алгоритмов сжатия, использующих первую конечную разность цифровых массивов данных // Автометрия. 1995. № 2. С. 90.
4. Roos R., Viergever M. A., van Dijke M. C. A., Peters J. H. Reversible intraframe compression of medical images // IEEE Trans. Medical. Imaging. 1988. 7. P. 328.
5. Huang L., Bijaoui A. An efficient image compression algorithm without distortion // Pattern Recognit. Lett. 1991. 12. P. 69.
6. Wong S., Zaremba L., Gooden D., Huang H. K. Radiologic image compression — a review // Proc. IEEE. 1995. 83. P. 194.
7. Бокштейн И. М. Метод сжатия описаний изображений без потери информации // Автометрия. 1994. № 1. С. 68.
8. Piscaglia P., Macq B. Lossless hierarchical storage of images // European Trans. Telecommunicat. 1995. 6, N 3. P. 267.
9. Netravali A. N., Huskeff B. G. Digital Pictures. Representation and Compression. N. Y.: Plenum Press, 1991.
10. Fischer P. E., Worley R. T., Maeder A. J., Goodwin M. Context-based lossless image compression // Comput. J. 1993. 36, N 1.
11. Zandi A., Allen J. E., Schwartz E. L., Bolick M. CREW: compression with reversible embedded wavelets // IEEE Data Compression Conference. Snowbird, UT, USA, March 1995.
12. Gormish M. J., Schwartz E. L., Keith A. et al. Lossless and near-lossless compression for high quality images // SPIE. San Jose, CA, USA, February 1997.
13. Bolick M., Gormish M. J., Schwartz E. L., Keith A. Next generation image compression and manipulation using CREW // Proc. of 1997 Internat. Conf. on Image Process. (ICIP'97). Santa Barbara, CA, USA, 1997.
14. Kolesnikov A., Kelle O., Kauranne T. Remote medical analysis with web technology // Proc. of Finnish Symposium on Signal Processing (FINSIG'97). Pori, Finland, 1997.
15. Колесников А. Н., Кауранне Т. Удаленный доступ к медицинским информационно-коммуникационным системам по сетям Internet // Тез. докл. IV Междунар. конф. «Развитие и применение открытых систем» (РАПРОС-97). Н. Новгород, Россия, 1997.

Поступила в редакцию 29 сентября 1997 г.