

УДК 535.317.1

В. В. Котляр, В. А. Сойфер, С. Н. Хонина

(Самара)

**АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДИФРАКЦИОННЫХ  
ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ  
ВРАЩАЮЩИХСЯ МОДАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Предложен градиентный алгоритм расчета фазовых дифракционных оптических элементов, формирующих когерентные световые поля с продольной периодичностью и коническим спектром плоских волн. Показано, что при некоторых условиях наблюдается вращение поперечного сечения таких световых пучков, которые можно назвать многомодовыми пучками Бесселя. Обсуждается вопрос о вращении многомодовых световых пучков Гаусса — Лагерра, распространяющихся в волокне с квадратичной зависимостью показателя преломления.

В последнее время сохраняется устойчивый интерес к задачам формирования модовых пучков с помощью дифракционных оптических элементов (ДОЭ) [1]. Световые поля, обладающие модовой структурой, появляются как в свободном пространстве, так и в световых волокнах [2].

Известны методы расчета фазовых ДОЭ, формирующих световые моды Гаусса — Лагерра, Гаусса — Эрмита [1, 3] и моды Бесселя (бездифракционные световые пучки) [4—6]. В [7] рассмотрены световые поля с продольной периодичностью, являющиеся обобщением бесселевых мод.

Другие алгоритмы синтеза ДОЭ, формирующих световые пучки с заданными характеристиками распространения в пространстве, приведены в [8, 9].

В данной работе рассмотрен подкласс световых полей с продольной периодичностью, обладающих коническим спектром плоских волн. Их можно назвать многомодовыми пучками Бесселя. Предложен градиентный алгоритм расчета фазовых ДОЭ, формирующих такие световые поля. Выяснены условия, при которых наблюдается вращение поперечного сечения световых бесселевых пучков. Рассмотрен также вопрос вращения многомодового пучка Гаусса — Лагерра, распространяющегося в волокне с квадратичной зависимостью показателя преломления. Приведены примеры численного моделирования.

1. Вращение многомодового бесселева пучка. Известно, что частными решениями уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)U(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  являются функции вида [10]

$$U_{mp}(r, \varphi, z) = J_m(r\sqrt{k^2 + \rho^2}) \exp(\rho z + im\varphi), \quad (2)$$

где  $k$  — волновое число. Общее решение уравнения (1) можно представить как линейную комбинацию частных решений:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} C_{mn} J_m \left( r \sqrt{k^2 + \rho_n^2} \right) \exp(\rho_n z + im\varphi). \quad (3)$$

Параметры  $\rho_n$  находятся из условия периодичности модуля комплексной амплитуды:

$$\left| U(r, \varphi, z + z_0) \right| = \left| U(r, \varphi, z) \right|, \quad (4)$$

где  $z_0$  — период.

Из уравнения (4) следует выражение для амплитуды световых полей с продольной периодичностью:

$$U(r, \varphi, z) = \exp(ik\sigma z) \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} C_{mn} J_m(kr\rho_n) \exp\left(i \frac{2\pi n z}{z_0} + im\varphi\right), \quad (5)$$

$$\rho_n = \sqrt{1 - (\sigma + n(\lambda/z_0))^2}. \quad (6)$$

Здесь  $\lambda$  — длина волны света;  $\sigma$  — постоянная. Номер  $n$  в уравнении (5) выбирается из условия положительности подкоренного выражения в уравнении (6) и удовлетворяет неравенству

$$-\left[ \sigma \frac{z_0}{\lambda} \right] \leq n \leq \left[ (1 - \sigma) \frac{z_0}{\lambda} \right], \quad (7)$$

где [...] — целая часть числа.

В уравнение (5) входят слагаемые, описывающие конические волны, распространяющиеся под углами  $\psi_n$  к оси  $z$ , которые удовлетворяют уравнению, сходному с уравнением для дифракционной решетки:

$$\cos\psi_n = \cos\psi_0 + n \frac{\lambda}{z_0}, \quad \rho_n = \sin\psi_n, \quad \sigma = \cos\psi_0. \quad (8)$$

Из уравнения (5) следует, что если отличные от нуля коэффициенты  $C_{mn}$  имеют одинаковый номер  $n = n_0$ , то световое поле распространяется без дифракции как бесселева мода:

$$U(r, \varphi, z) = \exp\left(ik\sigma z + i \frac{2\pi n_0 z}{z_0}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J_m(kr\rho_0) e^{im\varphi}, \quad (9)$$

где  $C_m = C_{mn_0}$ ,  $\rho_0 = \rho_{n_0}$ .

Продольная периодичность светового поля (5) имеет место, когда хотя бы два слагаемых с различными номерами  $n_1$  и  $n_2$  отличны от нуля.

Вращение поперечного сечения светового пучка, описываемого выражением (5), является частным случаем продольной периодичности и обеспечивается согласованным выбором отличных от нуля слагаемых с разными номерами  $n$  и  $m$ . Для получения условия вращения пучка вместо уравнения (5) запишем выражение для интенсивности:

$$I(r, \varphi, z) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \left| C_{mn} J_m(kr\rho_n) \right|^2 + 2 \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \sum_{m', n'=-\infty}^{\infty} \left| C_{mn} C_{m'n'} \right| J_m(kr\rho_n) J_{m'}(kr\rho_{n'}) \cos\Phi_{mn}^{m'n'}(r, \varphi), \quad (10)$$

$$\Phi_{mn}^{m'n'}(r, \varphi) = \arg C_{mn} - \arg C_{m'n'} + \frac{2\pi(n-n')z}{z_0} + (m-m')\varphi. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что все слагаемые в уравнении (10) будут иметь одинаковую зависимость полярного угла  $\varphi$  от продольной координаты  $z$  при условии

$$\frac{m-m'}{n-n'} = A, \quad n \neq n', \quad m \neq m', \quad (12)$$

где  $A$  — постоянная величина. Из (12) видно, что если в уравнении (5) отличны от нуля только два слагаемых, то при любых значениях их номеров  $n \neq n'$  и  $m \neq m'$  световое поле будет вращаться вокруг оси распространения. Из (12) также следует менее общее, но более удобное для использования условие вращения пучка:

$$\frac{m}{n} = A. \quad (13)$$

При выполнении условия (12) или (13) с изменением расстояния на величину  $\Delta z$  значение интенсивности  $I(r, \varphi, z)$  в уравнении (10) не изменится при выборе величины угла  $\varphi + \Delta\varphi$ , где

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{\Delta z}{Az_0}. \quad (14)$$

Из уравнения (14) видно, что если  $1/A$  — целое число, то на длине периода  $z_0$  будет совершаться целое число оборотов при вращении пучка, а направление вращения (левое или правое) определяется знаком постоянной  $A$ .

2. Градиентный алгоритм для генерации бesselевых вращающихся пучков. Рассмотрим ортогональный базис собственных функций колебаний круглой тонкой мембраны радиусом  $R$  [11]:

$$\Omega_{mn}(r, \varphi) = A_{mn} J_m \left( \frac{r}{R} \gamma_{mn} \right) e^{im\varphi}, \quad (15)$$

$$A_{mn} = \left[ \sqrt{\pi} R J_m'(\gamma_{mn}) \right]^{-1}, \quad (16)$$

где  $J_m'(x)$  — производная функции Бесселя первого рода  $m$ -го порядка;  $\gamma_{mn}$  — корни функции Бесселя:  $J_m(\gamma_{mn}) = 0$ .

Функцию пропускания ДОЭ  $U_0(r, \varphi)$  можно искать как линейную комбинацию функций (15). Модули коэффициентов при этом считаются заданными, а их аргументы являются свободными параметрами. Модуль самой функции пропускания  $|U_0(r, \varphi)|$  также задан и имеет смысл амплитуды освещающего ДОЭ пучка. Данная линейная комбинация имеет вид:

$$U_0(r, \varphi) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} C_{mn} \Omega_{mn}(r, \varphi). \quad (17)$$

Сравнивая вид аргументов функций Бесселя в уравнениях (5) и (15), можно найти условие, которому должны подчиняться отличные от нуля слагаемые в разложении (17):

$$kR \rho_n = \gamma_{mn}. \quad (18)$$

Задачу поиска фазы функции  $U_0(r, \varphi)$  и соответственно аргументов  $C_{mn}$  в сумме (17) можно сформулировать как задачу минимизации квадратичного критерия:

$$K = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[ \left| U_0(r, \varphi) \right| - \left| \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} C_{mn} \Omega_{mn}(r, \varphi) \right| \right]^2 r dr d\varphi. \quad (19)$$

Градиентный метод минимизации критерия (19) нетрудно построить, используя результаты работы [12]. При этом итеративная процедура поиска аргументов коэффициентов  $\nu_{mn} = \arg C_{mn}$  будет выглядеть следующим образом:

$$\nu_{mn}^{(p+1)} = \nu_{mn}^{(p)} + \tau_p \frac{\partial K}{\partial \nu_{mn}^{(p)}}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \nu_{mn}^{(p)}} = 2 \left| C_{mn} \bar{C}_{mn}^{(p)} \right| \sin(\nu_{mn}^{(p)} - \nu_{mn}^{-(p)}), \quad (21)$$

$$\bar{C}_{mn}^{(p)} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) \Omega_{mn}^*(r, \varphi) r dr d\varphi, \quad (22)$$

$$F(r, \varphi) = \left| U_0(r, \varphi) \right| \frac{U(r, \varphi)}{|U(r, \varphi)|} - U(r, \varphi), \quad (23)$$

$$U(r, \varphi) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} C_{mn} \Omega_{mn}(r, \varphi), \quad (24)$$

где  $\bar{\nu}_{mn}^{(p)} = \arg \bar{C}_{mn}^{(p)}$ ,  $p$  — номер итерации. Модули  $|C_{mn}|$  задаются произвольно и являются параметрами задачи, от которых зависит вид поперечного сечения формируемого пучка.

Шаг  $\tau_p$  в уравнении (20), следуя работе [12], можно представить в виде

$$\tau_p = \frac{K}{K_p}, \quad (25)$$

$$\bar{K}_p = - \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial K}{\partial \nu_{mn}^{(p)}} \right|^2. \quad (26)$$

**3. Вращение многомодового пучка Гаусса — Лагерра в волокне.** В многомодовом световом волокне круглого сечения и с квадратичной зависимостью показателя преломления

$$n^2(r) = n_0^2 \left( 1 - 2\Delta \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (27)$$

где  $n_0$  — максимальное значение показателя преломления на оси волокна;  $r_0$  — радиус волокна;  $\Delta$  — параметр дисперсии показателя преломления, распространяется световое поле, являющееся суперпозицией мод Гаусса — Лагерра [2]:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{m, n=0}^{\infty} C_{mn} \left( \frac{r\sqrt{2}}{\sigma} \right)^n L_m^n \left( \frac{2r^2}{\sigma^2} \right) \exp \left[ i\alpha_{mn}z - \frac{r^2}{\sigma^2} \pm in\varphi \right], \quad (28)$$

где  $\sigma = \left(\frac{\lambda r_0}{\pi n_0}\right)^{1/2} (2\Delta)^{-1/4}$ ;  $\alpha_{mn} = [k^2 n_0^2 - 4\sigma^{-2}(2m + n + 1)]^{1/2}$ ;  $L_m^n(x)$  — обобщенный многочлен Лагерра;  $\sigma$  — эффективный радиус первой моды;  $\alpha_{mn}$  — коэффициент, пропорциональный фазовой скорости соответствующей моды.

Вследствие дисперсии фазовых скоростей мод Гаусса — Лагерра сформированное на входе волокна изображение  $U(r, \varphi, z = 0)$  будет деградировать по мере распространения. Чтобы частично компенсировать дисперсию фазовых скоростей мод, нужно из суммы (28) выбрать такие слагаемые, для которых фазовые скорости некоторым образом согласованы. Например, можно заставить световой многомодовый пучок, сгенерированный фазовым ДОЭ, вращаться вокруг оси по спирали. Условия вращения поперечного сечения пучка (28) аналогичны условиям (12) и (13) для многомодовых пучков Бесселя и имеют соответственно вид:

$$\frac{\alpha_{mn} - \alpha_{m'n'}}{n - n'} = B, \quad m \neq m', \quad n \neq n', \quad (29)$$

$$\frac{\alpha_{mn}}{n} = B, \quad (30)$$

где  $B$  — постоянная величина. В уравнении (29) величины  $\alpha_{mn}$  можно приближенно заменить на выражение

$$\alpha_{mn} \cong kn_0 - \alpha_0(2m + |n| + 1), \quad (31)$$

так как  $kn_0 \gg \alpha_0$ ,  $\alpha_0 = 2(kn_0\sigma^2)^{-1}$ . Например, при характерных параметрах волокна ( $r_0 = 10$  мкм,  $\Delta = 0,01$ ,  $n_0 = 1,5$ ) и для видимого света ( $k = 10^4$  мм<sup>-1</sup>) получим следующие значения:  $kn_0 = 1,5 \cdot 10^4$  мм<sup>-1</sup> и  $\alpha_0 = 15$  мм<sup>-1</sup>.

С учетом уравнения (31) условие (29) будет иметь более простой вид:

$$\alpha_0 \left[ \frac{2(m - m')}{n - n'} + \frac{|n| - |n'|}{n - n'} \right] = B. \quad (32)$$

В данном случае условие (32) похоже на условие (12) для бесселевых мод. Модули в числителе в уравнении (32) употреблены, чтобы подчеркнуть, что номера  $n$  могут быть и отрицательными. При небольших значениях номеров мод ( $m < 10$ ) приближенное равенство в уравнении (31) соблюдается при выбранных параметрах волокна с точностью около 2 %.

Период  $z_0$ , на котором будет происходить полный оборот, рассчитывается по формуле

$$z_0 = \frac{2\pi}{|B|} \quad (33)$$

и для выбранных параметров равен десяткам—сотням микрон.

**4. Численные примеры. 4.1. Распространение бесселевых пучков в пространстве.** Итеративным алгоритмом рассчитывались фазовые оптические элементы, формирующие световые поля, состоящие на 80—90 % из двух—трех мод Бесселя.

Пример бездифракционного пучка или моды Бесселя показан на рис. 1 в левом столбце. Параметры расчета следующие:  $\lambda = 1,06$  мкм,  $z_0 = 20$  мм,  $R = 1$  мм,  $\sigma = 0,01$ . На рис. 1 в левом столбце приведена бинарная фаза ДОЭ (1а), формирующего световой пучок, состоящий из двух слагаемых в уравнении (5) с номерами  $(m, n)$ :  $(-3, -3)$ ,  $(3, -3)$ . Так как оба слагаемых имеют одинаковый номер  $n = -3$ , то, согласно уравнению (9), световое поле при распространении не изменяет своей структуры. Это видно из рис. 1, на котором в левом столбце показаны распределения поперечной интенсивности данного

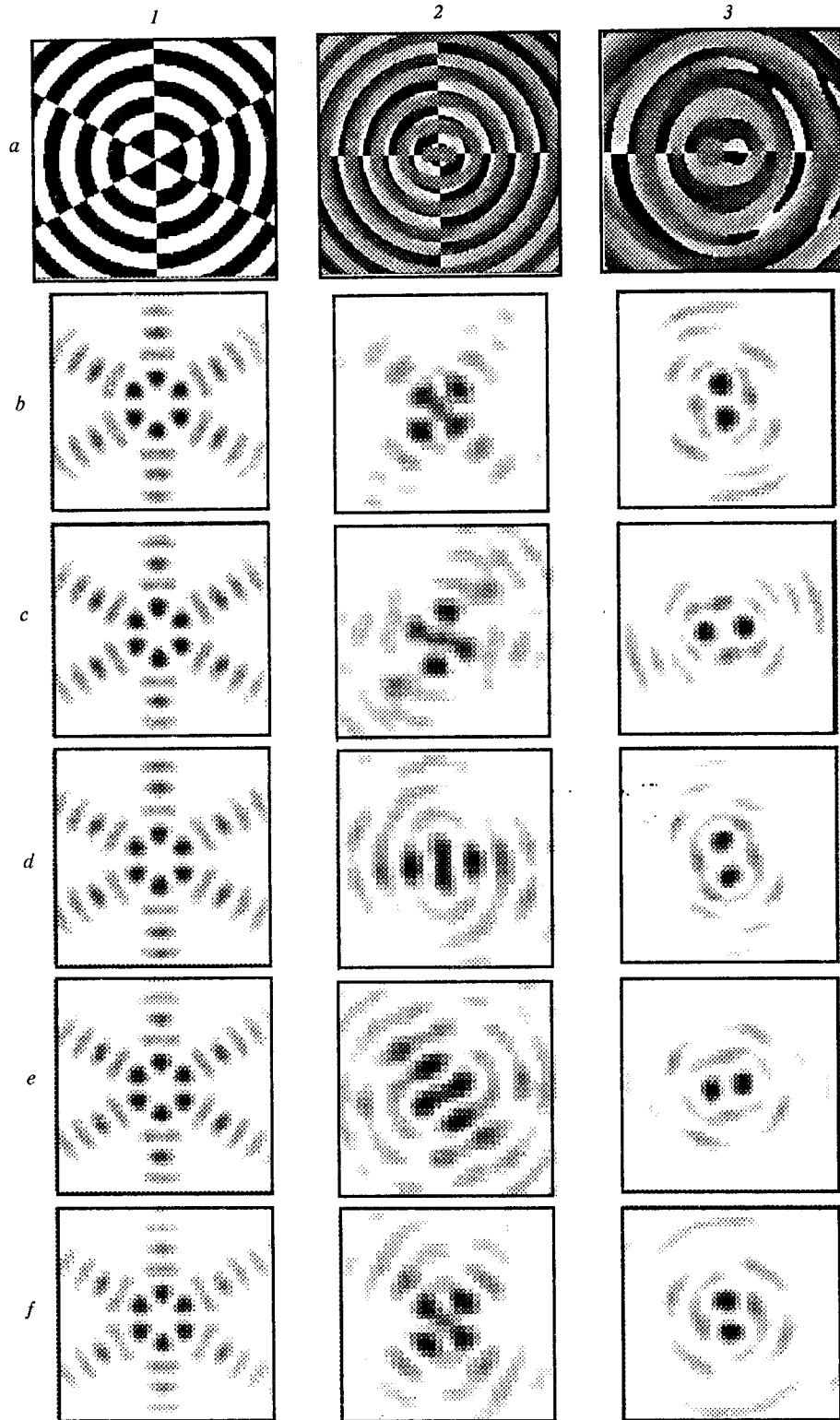


Рис. 1. Примеры расчета фазы ДОЭ ( $a1-a3$ ) и поперечные сечения многомодовых бesselевых пучков ( $b1-f3$ ), генерируемых такими ДОЭ

пучка (негатив) на расстояниях  $z$  (мм): 25 (1b), 30 (1c), 35 (1d), 40 (1e), 45 (1f).

Пример светового поля, периодически изменяющегося при распространении, показан в среднем столбце на рис. 1. Параметры расчета:  $\lambda = 1,06$  мкм,  $z_0 = 20$  мм,  $R = 3$  мм,  $\sigma = 0,02$ . В уравнении (5) сохранялись отличными от нуля только три слагаемых с номерами  $(m, n)$ :  $(-2, -3)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(2, -2)$ . При этом условия вращения (12) и (13) не соблюдаются. На рис. 1 показаны полутоновая фаза такого ДОЭ (2a) (черный цвет —  $2\pi$ , белый — 0) и поперечные распределения интенсивности (негатив), сформированные на расстояниях  $z$  (мм): 90 (2b), 95 (2c), 100 (2d), 105 (2e), 110 (2f).

В правом столбце на рис. 1 показан пример вращающегося многомодового пучка Бесселя. Параметры расчета:  $\lambda = 1,06$  мкм,  $z_0 = 20$  мм,  $R = 2$  мм,  $\sigma = 0,015$ . В уравнении (5) отличными от нуля выбирались только три слагаемых с номерами  $(m, n)$ :  $(-3, 3)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, 1)$ . Условия вращения (12) и (13) для данных номеров соблюдаются. На рис. 1 в правом столбце приведена полутоновая фаза ДОЭ (3a), формирующего световой пучок, содержащий три моды Бесселя, поперечные распределения интенсивности которого (негатив) показаны на расстояниях  $z$  (мм): 70 (3b), 75 (3c), 80 (3d), 85 (3e), 90 (3f). Из рисунка видно, что имеет место вращение пучка при его распространении, но заметно также, что происходят некоторые изменения вида картины поперечного сечения пучка, обусловленные интерференцией трех главных мод (около 90 % энергии) с модами высших порядков.

Поперечные картины дифракции на рис. 1 вычислялись с помощью преобразования Френеля, которое, в свою очередь, вычислялось с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье.

4.2. *Распространение мод Гаусса — Лагерра в квадратичной среде.* Аналогично модам Бесселя итеративно рассчитывались фазовые ДОЭ, формирующие световые поля, состоящие на 80—90 % из двух—четырех мод Гаусса — Лагерра (ГЛ) и распространяющиеся в многомодовом волокне с квадратичной зависимостью показателя преломления (27).

На рис. 2 показаны некоторые примеры. Параметры расчета:  $r_0 = 10$  мкм,  $\Delta = 0,01$ ,  $n_0 = 1,5$ ,  $\lambda = 0,63$  мкм,  $R = 0,01$  мм,  $\alpha_0 = 15$  мм<sup>-1</sup>.

На рис. 2 в левом столбце приведен пример моды ГЛ, распространяющейся в волокне почти без дифракции. В уравнении (28) отличными от нуля выбирались только два слагаемых с номерами  $(m, n)$ :  $(2, -2)$  и  $(2, 2)$ . При этом уравнения (31)—(33) приводят к бесконечному периоду:  $z_0 = \infty$ ,  $B = 0$ . На рисунке показаны бинарная фаза такого ДОЭ (1a) и поперечные сечения сформированного пучка (негатив), рассчитанного на разных расстояниях  $z$  (мм): 1 (1b), 2 (1c), 3 (1d), 4 (1e), 5 (1f). Видно, что при распространении такого пучка происходит незначительная модуляция интенсивности, обусловленная периодически изменяющимся влиянием высших мод ГЛ. В расчете учитывалось всего 25 мод с соседними номерами.

Пример периодически изменяющегося многомодового пучка ГЛ показан во втором слева столбце на рис. 2. В этом случае в уравнении (28) отличными от нуля считались слагаемые с номерами  $(m, n)$ :  $(1, -1)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(1, 1)$ . Условия вращения (29) и (30) не соблюдались, однако полученные значения  $B$  оказались кратными, что позволило выделить общий период  $z_0 = 0,2087$  мм. На рисунке во втором слева столбце показаны бинарная фаза ДОЭ (2a) и поперечные сечения светового пучка (негатив) на разных расстояниях  $z$  (мм): 2,087 (2b), 2,139 (2c), 2,191 (2d), 2,243 (2e), 2,295 (2f). Видно, что происходит периодическая смена картин дифракции при распространении пучка в волокне.

В третьем слева столбце на рис. 2 приведен пример вращающегося многомодового пучка ГЛ. В сумме (28) сохранялись два слагаемых с номерами  $(m, n)$ :  $(1, -1)$ ,  $(2, 2)$ . Условие вращения (29) выполняется, период вращения  $z_0 = 0,626$  мм. На этом рисунке в третьем слева столбце показаны полутоновая фаза такого ДОЭ (3a) и поперечные сечения пучка (негатив) на разных расстояниях  $z$  (мм): 1 (3b), 1,156 (3c), 1,313 (3d), 1,469 (3e), 1,626 (3f).

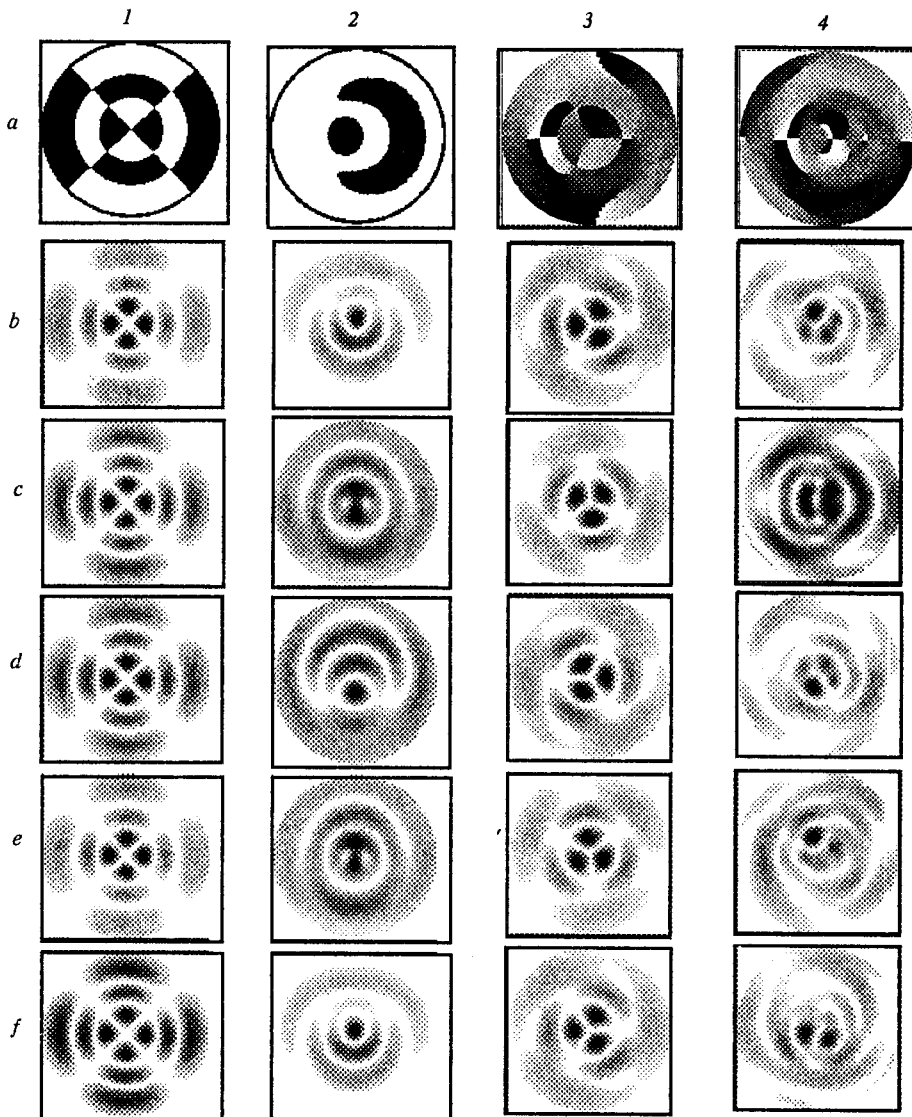


Рис. 2. Примеры расчета фазы ДОЭ ( $a1-a4$ ) и поперечные сечения многомодовых пучков Гаусса — Лагерра ( $b1-f4$ ), генерируемых такими ДОЭ

Заметим, что условию вращения (29) удовлетворяют, например, трехмодовые пучки ГЛ со следующими номерами  $(m, n)$ :  $(1, -1)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(11, 2)$ , а также  $(2, -2)$ ,  $(8, 0)$ ,  $(14, 3)$ .

На рис. 2 в первом справа столбце приведен пример четырехмодового пучка ГЛ, для которого условие вращения (29) не выполняется, и поэтому происходит вращение с искажением вида поперечной картины пучка. На рисунке в первом справа столбце показана полутонкая фаза ДОЭ ( $4a$ ), рассчитанная итеративно с учетом четырех отличных от нуля слагаемых в уравнении (28) с номерами  $(m, n)$ :  $(2, -2)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 2)$ . Поперечные сечения пучка, сформированного таким ДОЭ, показаны в правом столбце на разных расстояниях  $z$  (мм): 1 ( $4b$ ), 1,094 ( $4c$ ), 1,187 ( $4d$ ), 1,281 ( $4e$ ), 1,375 ( $4f$ ). Искажение картины поперечного сечения пучка происходит вследствие того, что отдельные моды вращаются с разными угловыми скоростями и расп-



ростраиваются с разными фазовыми скоростями и скорости эти не согласованы друг с другом, как это было в предыдущих случаях, относящихся к рис. 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Soifer V. A., Golub M. A. Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms. Boca Raton, U. S.: CRC Press, 1994.
2. Adams M. J. An Introduction to Optical Waveguides. Chichester: Wiley & Sons, 1981.
3. Kotlyar V. V., Nikolsky I. V., Soifer V. A. An algorithm for calculating multichannel formers of Gaussian modes // Optik. 1994. 98, N 1. P. 26.
4. Vasara A., Turunen J., Friberg A. T. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms // JOSA. A. 1989. 6. P. 1748.
5. Kotlyar V. V., Khonina S. N., Soifer V. A. Algorithm for the generation of nondiffracting Bessel modes // J. Mod. Opt. 1995. 42, N 6. P. 1231.
6. Kotlyar V. V., Khonina S. N., Soifer V. A. Calculation of phase formers of non-diffracting images and a set of concentric rings // Optik. 1996. 102, N 2. P. 45.
7. Belsky A. M. Self-reproducing beams and their relation to nondiffracting beams // Optics and Spectroscopy. 1992. 73, N 5. P. 568.
8. Piestun R., Spector B., Shamir J. Unconventional light distributions in three-dimensional domains // J. Mod. Opt. 1996. 43, N 7. P. 1495.
9. Kotlyar V. V., Khonina S. N., Soifer V. A. Iterative calculation of diffractive optical elements focusing into a three-dimensional domain and onto the surface of the body of rotation // Ibid. P. 1509.
10. Korn G. A., Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. N. Y.: McGraw-Hill, 1961.
11. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М.: Высш. шк., 1962.
12. Ficup J. R. Phase retrieval algorithms: a comparison // Appl. Opt. 1982. 21, N 15. P. 2758.

*Поступила в редакцию 10 декабря 1996 г.*