РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1997

УДК 621.391.14 : 519.2

В. С. Паршин

(Рязань)

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАСПОЗНАВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СИГНАЛОВ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ*

Рассмотрены параметрические байесовский и инвариантный к масштабу алгоритмы распознавания пространственно-временных сигналов, использующие в качестве признаков выборочный двумерный спектр мощности. Показано, что распределение полученных решающих правил описывается одной и той же плотностью распределения вероятностей.

Многие практические задачи, связанные с обработкой изображений и случайных полей, сводятся к задаче распознавания сигналов, снимаемых с множества K параллельно работающих датчиков. В зависимости от состояния контролируемого объекта сигналы, снимаемые с датчиков, имеют различные спектральные характеристики. Полагая, что по пространственной координате z датчики расположены равномерно, после дискретизации по времени получим дискретный пространственно-временной сигнал $\xi(z_k, t_n)$, $k = \overline{1, K}$, $n = \overline{1, N}$ (двумерное скалярное поле с числом отсчетов K по пространственной координате и с N отсчетами по времени). Работа посвящена анализу эффективности распознавания таких сигналов при использовании в качестве признаков спектральных составляющих выборочного двумерного спектра мощности (периодограммы) [1]:

$$I(\Omega_k, \omega_n) = \left|S(j\Omega_k, j\omega_n)\right|^2/KN,$$

где $S(j\Omega_k, j\omega_n)$ — двумерный спектр Фурье реализации сигнала $\xi(z, t)$. Спектр $S(j\Omega_k, j\omega_n)$ вычисляется с помощью стандартной процедуры с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье вначале по координате z, а затем по координате t на частотах

$$\begin{aligned} &\omega_n = 2\pi n/N, \qquad n = 0, 1, \ldots, N/2 - 1, \\ &\Omega_k = 2\pi k/K, \qquad k = -K/2, -K/2 + 1, \ldots, 0, \ldots, K/2 - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Шаг дискретизации по координатам z и t принимаем равным единице.

Статистические характеристики выборочного спектра $I(\Omega_k, \omega_n)$ изучены достаточно полно [2, 3]. Для гауссовых однородных полей с нулевым математическим ожиданием среднее значение и дисперсия спектра $I(\Omega_k, \omega_n)$ при $K, N \to \infty$ соответственно равны:

$$\langle I(\Omega_k, \omega_n)\rangle = G(\Omega_k, \omega_n),$$

$$DI(\Omega_k, \omega_n) = G^2(\Omega_k, \omega_n),$$

* Работа выполнена при содействии ГК РФ ВО (№ 80-96).

где $G(\Omega, \omega)$ — двумерный спектр мощности сигнала $\xi(t, z)$.

Распределение спектральных составляющих выборочного двумерного спектра аппроксимируется экспоненциальным распределением

$$W\{I(\Omega_k, \omega_n)\} = \frac{\exp[-I(\Omega_k, \omega_n)/G(\Omega_k, \omega_n)]}{G(\Omega_k, \omega_n)}.$$

Распределение составляющих спектра на нулевой частоте $I(0, 0)$ будет равно распределению квадрата нормальной случайной величины и не используется для принятия решения при распознавании.

Некоррелированность спектральных составляющих, вычисленных на частотах (1), позволяет представить многомерное распределение спектра $I(\Omega_k, \omega_n)$ как произведение их одномерных плотностей.

Байесовское решающее правило распознавания пространственно-временных сигналов, когда проверяемые гипотезы формулируются в виде

$$H\colon I(\Omega, \omega) = G_1(\Omega, \omega), \qquad L\colon I(\Omega, \omega) = G_2(\Omega, \omega),$$

исходя из статистических характеристик выборочного двумерного спектра, представимо следующим образом:

$$\varphi_1\{I(\Omega, \omega)\} = \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} \sum_{n=1}^{N/2} I(\Omega_k, \omega_n) d_{kn} \gtrless \ln c - \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} \sum_{n=1}^{N/2} \ln \frac{G_2(\Omega_k, \omega_n)}{G_1(\Omega_k, \omega_n)}, \tag{2}$$

где c — константа, определяемая уровнем значимости;

$$d_{kn} = \frac{[G_1(\Omega_k, \omega_n) - G_2(\Omega_k, \omega_n)]}{G_1(\Omega_k, \omega_n) G_2(\Omega_k, \omega_n)}.$$

Для принятия решения о классе сигнала необходимо произвести взвешенное суммирование спектральных составляющих и полученную сумму сравнить с порогом.

В практических задачах интенсивность сигнала q (параметр масштаба) часто не несет информации о распознаваемых сигналах и одинакова для всех компонент сигнала $\xi(z, t)$. Проверяемые гипотезы в этом случае формулируются следующим образом:

$$H\colon qI(\Omega, \omega) = G_1(\Omega, \omega), \qquad L\colon qI(\Omega, \omega) = G_2(\Omega, \omega).$$

Наиболее простое решающее правило для данного случая получается при использовании наиболее мощного инвариантного критерия проверки статистических гипотез [4]

$$\int_0^\infty W_H(qx_1, \ldots, qx_n) q^{n-1} dq \gtrless c \int_0^\infty W_L(qx_1, \ldots, qx_n) q^{n-1} dq, \tag{3}$$

где q — неизвестный параметр масштаба; $W_H(z)$, $W_L(z)$ — распределения выборочного двумерного спектра мощности при гипотезах H и L.

Подставляя в (3) соответствующие распределения и производя интегрирование, после преобразований наиболее мощное инвариантное решающее правило можно представить следующим образом:

$$\varphi_2\{I(\Omega, \omega)\} = \sum_{k=-K/2}^{K/2-1} \sum_{n=1}^{N/2} I(\Omega_k, \omega_n) g_{kn} \gtrless 0, \tag{4}$$

где

$$g_{kn} = 1/G_1(\Omega_k, \omega_n) - c_1/G_2(\Omega_k, \omega_n);$$

$$c_1 = \left[c \prod_{k=-K/2}^{K/2-1} \prod_{n=1}^{N/2} \frac{G_1(\Omega_k, \omega_n)}{G_2(\Omega_k, \omega_n)} \right]^{\frac{1}{(K-1)(N/2-1)+1}}.$$

Полученный алгоритм по структуре совпадает с решающим правилом (2). Отличие состоит в величинах весовых коэффициентов и значении порога.

Когда спектральные плотности распознаваемых сигналов $G_1(\Omega, \omega)$ и $G_2(\Omega, \omega)$ известны точно (случай заданного классификатора), можно найти точное распределение решающих правил (2) и (4).

Так как распределение $\varphi_2\{I(\Omega, \omega)\}$ определяется взвешенной суммой экспоненциально распределенных величин, то его характеристическую функцию при гипотезах H и L можно представить как

$$\Theta(jv/H, L) = \prod_{k=-K/2}^{K/2-1} \prod_{n=1}^{N/2} 1/(1 - jv\Lambda_{kn}/H, L), \tag{5}$$

где

$$\Lambda_{kn}/H, L = g_{kn} G(\Omega_k, \omega_n)/H, L.$$

Распределение, соответствующее характеристической функции (5), можно представить в виде [5], обозначая $\varphi_2\{I(\Omega, \omega)\} = z$:

$$W(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{k=-K/2 \\ kn \neq im}}^{n_{1-}} \sum_{n=1}^{n_{2-}} \frac{\Lambda_{kn}^{(K-1)(N/2-1)-2} \exp(-z/\Lambda_{kn})}{\prod\limits_{i=-K/2}^{K/2-1} \prod\limits_{m=1}^{N/2} (\Lambda_{kn} - \Lambda_{im})}, & z \geq 0, \\ \displaystyle\sum_{\substack{k=-K/2 \\ kn \neq im}}^{n_{1+}} \sum_{n=1}^{n_{2+}} \frac{\Lambda_{kn}^{(K-1)(N/2-1)-2} \exp(-z/\Lambda_{kn})}{\prod\limits_{i=-K/2}^{K/2-1} \prod\limits_{m=1}^{N/2} (\Lambda_{kn} - \Lambda_{im})}, & z \leq 0, \end{cases} \tag{6}$$

где n_{1-}, n_{2-}, n_{1+}, n_{2+} — соответственно число положительных и отрицательных корней уравнения

$$\Theta(jv) = 0$$

при различных индексах k, n. Для нахождения условных распределений $W(z/H)$ и $W(z/L)$ в (6) подставляются величины Λ_{kn}, соответствующие гипотезе H или L.

Вероятности ошибочного решения находятся интегрированием распределения (6):

$$P_1 = \int_0^\infty W(z/H)dz, \qquad P_2 = \int_{-\infty}^0 W(z/L)dz,$$

которое не вызывает затруднений.

Для алгоритма (2) вероятности P_1, P_2 находятся также интегрированием распределения (6), только вместо нулевого порога подставляется значение, определяемое правой частью неравенства (2), а для определения Λ_{kn} вместо коэффициентов g_{kn} необходимо использовать коэффициенты d_{kn}.

В том случае, когда число отсчетов по пространственной или временной координате велико или когда уравнение

$$\Theta(jv/H, L) = 0$$

имеет корни различной кратности, использование распределения (5) затруднено. В этом случае целесообразно аппроксимировать распределение решающего правила $\varphi_2\{I(\Omega, \omega)\}$ нормальн м. Тогда вероятности ошибок можно представить в следующем виде:

$$P_1 = 1 - F\left\{\frac{\sum\limits_{k=-K/2}^{K/2-1}\sum\limits_{n=1}^{N/2} G_2(\Omega_k, \omega_n) g_{kn}}{\left[\sum\limits_{k=-K/2}^{K/2-1}\sum\limits_{n=1}^{N/2} G_2^2(\Omega_k, \omega_n) g_{kn}^2\right]^{1/2}}\right\},$$

$$P_2 = F\left\{\frac{\sum\limits_{k=-K/2}^{K/2-1}\sum\limits_{n=1}^{N/2} G_1(\Omega_k, \omega_n) g_{kn}}{\left[\sum\limits_{k=-K/2}^{K/2-1}\sum\limits_{n=1}^{N/2} G_1^2(\Omega_k, \omega_n) g_{kn}^2\right]^{1/2}}\right\},$$

где $F(z)$ — интеграл Лапласа.

Эти формулы можно использоват и для определения вероятностей ошибок решающего правила (4). Для это необходимо заменить коэффициенты g_{kn} на d_{kn} и учитывать, что порог ср внения не равен нулю. Проведенные расчеты показывают, что при $K, N > 35$—40 разница в определении вероятностей ошибок по точной и прибли енной формулам несущественна и становится заметной при вероятностях шибок меньших, чем 0,01—0,02, что редко встречается при распознавании шумовых сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. **Алексеев В. Г.** Об оценках спектральных плотностей гауссовых однородных случайных полей // Автометрия. 1989. № 1. С. 50.
3. **Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.** Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
4. **Леман Э.** Проверка статистических гипоте . М.: Наука, 1979.
5. **Фельдман Ю. И.** Плотность вероятности лучайного процесса при весовом квадратичном суммировании // Радиотехника. 1979. № .

Поступила в редакцию 4 ноября 1996 г.