РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1997

УДК 518 : 512.25

Ю. Е. Воскобойников, Н. П. Кисленко

(Новосибирск)

АДАПТИВНЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Предлагается критерий адаптации рекуррентных алгоритмов. На основе этого критерия строится регуляризирующий алгоритм решения вырожденной системы алгебраических уравнений. В процессе работы данного алгоритма происходит адаптация параметров алгоритма к неизвестной априорной информации об искомом решении и дисперсиях погрешности исходных данных. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, иллюстрирующие существенные преимущества предлагаемого алгоритма.

Восстановление сигналов и изображений по их искаженным аппаратной функцией измеренным значениям является весьма распространенной задачей обработки экспериментальных данных. Формально это решение одномерного или двумерного интегрального уравнения 1-го рода, и, как известно [1], такая задача относится к классу некорректно поставленных [1, 2]. После проведения конечномерной аппроксимации исходных интегральных уравнений задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$K\varphi = f, \tag{1}$$

где K — матрица размером $N \times M$; f — вектор размерности N, составленный из измеренных значений; φ — вектор размерности M, проекции которого принимаются в качестве значений восстанавливаемого сигнала в узлах введенной сетки.

Вследствие некорректности исходной задачи система (1) плохо обусловлена (число обусловленности может достигать 10^6—10^8), а возможно, и вырождена. Поэтому для нахождения устойчивого решения системы (1) применяют методы регуляризации [1—3]. Суть этих методов состоит в решении системы с лучшей обусловленностью, которая при определенных условиях аппроксимирует систему (1). Используемые при этом прямые и итерационные алгоритмы имеют существенный практический недостаток: при поступлении нового измерения (добавлении строки матрицы K) необходимо заново выбирать параметр регуляризации, формировать и решать систему уравнений. Это не позволяет обрабатывать данные в реальном масштабе времени и требует значительных вычислительных ресурсов. В работе [4] предложен рекуррентный алгоритм построения регуляризованного по Тихонову решения, который, к сожалению, требует априорного задания величины параметра регуляризации, что для большинства практических задач не реализуемо.

Поэтому в данной работе предложен рекуррентный алгоритм построения регуляризованного решения общего вида (как детерминированного, так и статистического). В процессе работы этого алгоритма происходит адаптация параметров алгоритма к неизвестной априорной информации и меняющимся условиям эксперимента. Введены характеристики, позволяющие контролировать точность и устойчивость рекуррентного алгоритма.

Рекуррентный алгоритм построения регуляризованного решения. Пред-

$$F_\alpha[\varphi] = \|\tilde{f} - K\varphi\|^2_{W_f} + \alpha\|\varphi - m_\varphi\|^2_{W_\varphi}, \qquad (2)$$

где запись $\|\varphi\|^2_{W_\varphi}$ означает квадратичную форму $\varphi^T W_\varphi \varphi$; W_f, W_φ — неотрицательно-определенные матрицы размерностью $N \times N$, $M \times M$ соответственно; m_φ — вектор; α — параметр.

Можно показать, что вектор φ_α является решением системы алгебраических уравнений

$$(\alpha W_\varphi + K^T W_f K)\varphi_\alpha = K^T W_f \tilde{f} + \alpha W_\varphi m_\varphi, \qquad (3)$$

и это решение единственно при $\alpha > 0$, если нуль-пространства матриц W_φ и $W_f^{1/2}K$ не имеют общих векторов [3].

Задавая матрицы W_f, W_φ из имеющейся априорной информации, можно получить следующие решения:

1) регуляризованное по Тихонову, если $m_\varphi = 0$, $W_f = I$, W_φ — неотрицательно-определенная матрица;

2) байесовское, если $\alpha = 1$, $W_f = V_\eta^{-1}$, $W_\varphi = V_\varphi^{-1}$, где m_φ, V_φ — математическое ожидание и корреляционная матрица априорного распределения искомого решения;

3) статистически регуляризованное при неполной априорной информации, если $W_f = V_\eta^{-1}$, W_φ — неотрицательно-определенная матрица, соответствующая задаваемому порядку регуляризации. Матрицу W_φ можно определить в виде

$$W_\varphi = D_\varphi^{-1} = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{d_1^2}, \frac{1}{d_2^2}, \ldots, \frac{1}{d_M^2}\right\}, \qquad (4)$$

где величины d_i^2 характеризуют степень отклонения проекции решения φ_i от проекции «пробного» решения m_φ, т. е. являются детерминированным аналогом дисперсии априорного распределения. В частном случае можно положить $m_\varphi = 0$.

Последнее решение является компромиссом между решениями 1, 2, так как позволяет учитывать статистику шума η и неполноту априорной информации об искомом решении введением параметра регуляризации α. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать систему

$$(\alpha W_\varphi + K^T V_\eta^{-1} K)\varphi_\alpha = K^T V_\eta^{-1} \tilde{f} + \alpha W_\varphi m_\varphi. \qquad (5)$$

Построим рекуррентный алгоритм решения этой системы. Предположим, что параметр α задан, и запишем следующую систему рекуррентных уравнений:

$$P_\alpha^{(n+1)} = P_\alpha^{(n)} - \frac{P_\alpha^{(n)} k_{n+1}^T k_{n+1} P_\alpha^{(n)}}{\sigma_{n+1}^2 + k_{n+1} P_\alpha^{(n)} k_{n+1}^T}, \qquad (6)$$

$$\varphi_\alpha^{(n+1)} = \varphi_\alpha^{(n)} + \frac{P_\alpha^{(n+1)}}{\sigma_{n+1}^2} k_{n+1}^T (\tilde{f}_{n+1} - k_{n+1}\varphi_\alpha^{(n)}), \qquad (7)$$

где

$$P_\alpha^{(0)} = (\alpha W_\varphi)^{-1}; \qquad \varphi_\alpha^{(0)} = m_\varphi; \tag{8}$$

k_n — n-я строка матрицы K.

Если вектор φ имеет априорное распределение с математическим ожиданием m_φ и корреляционной матрицей V_φ, то при $P_\alpha^{(0)} = V_\varphi$, $\alpha = 1$ алгоритм (6)—(8) является дискретным фильтром Калмана, используемым для оценивания параметров и состояния динамических систем [5, 7].

Имеет место следующее

Утверждение 1. Решение системы рекуррентных уравнений (6)—(8) задается формулами

$$(\alpha W_\varphi + K_n^T V_{n\eta}^{-1} K_n)\varphi_\alpha^{(n)} = K_n^T V_{n\eta}^{-1} \tilde{f}_n + \alpha W_\varphi m_\varphi, \tag{9}$$

$$P_\alpha^{(n)} = (\alpha W_\varphi + K_n^T V_{n\eta}^{-1} K_n)^{-1}, \tag{10}$$

где K_n, V_{n_η} — матрицы, составленные из первых n строк матриц K, V_η системы (5); $\tilde{f}_n$ — вектор, сформированный из первых n проекций вектора измерений $\tilde{f}$.

Доказательство утверждения приводится в приложении.

Следствие. Вектор $\varphi_\alpha^{(N)}$, определяемый алгоритмом (6)—(8) при $n = N$, является решением системы уравнений (5).

Таким образом, алгоритм (6)—(8) при поступлении нового измерения (увеличении количества строк матриц K, V_η на 1) строит регуляризованное решение без обращения матриц или решения системы уравнений. Это обусловливает его высокую вычислительную эффективность и возможность обработки данных по мере их поступления, т. е. в реальном масштабе времени.

К сожалению, данный алгоритм (как и другие регуляризирующие алгоритмы) весьма чувствителен к заданию или выбору величины параметра регуляризации α. В литературе [1, 3, 5] предложены различные способы выбора α, основанные на анализе некоторых функционалов от вектора невязки $e_\alpha = \tilde{f} - K\varphi_\alpha$. Однако для алгоритма (6)—(8) эти способы неприемлемы из-за его рекуррентности. Более того, при неточном задании уровня шума можно получить существенно заниженные или завышенные значения параметра.

Поэтому изложим подход к построению адаптивного регуляризирующего алгоритма, который позволит в определенной степени решить проблему выбора параметра регуляризации в рекуррентных алгоритмах.

Адаптивный рекуррентный алгоритм. В теории оценивания хорошо известно свойство оптимальных оценок, получившее название *свойства ортогональности*, а именно [6]: если оценка $\varphi^{(n)}$ доставляет минимум среднеквадратической ошибке (СКО), определяемой функционалом $\Delta^2(n) = M[\|\varphi^{(n)} - \varphi\|^2]$, где $M[\ ]$ — оператор математического ожидания, и шум η подчиняется нормальному распределению, то выполняются условия

$$\mu_{nj} = M[e^{(n)} f_j] = 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{11}$$

где $e^{(n)} = \tilde{f}_{n+1} - k_{n+1}\varphi^{(n)}$. Другими словами, эти условия есть условия оптимальности оценки $\varphi^{(n)}$: условия (11) являются необходимыми и достаточными условиями минимума СКО $\Delta^2(n)$. Введем функционал

$$J_L(n) = \frac{1}{L} \sum_{j=n-L+1}^{n} \mu_{nj}^2, \quad n \geq L, \tag{12}$$

который можно рассматривать как *обобщенный критерий оптимальности*, а именно: если оценка $\varphi^{(n)}$ оптимальна, то $J_L(n)$ достигает своего минимума.

К сожалению, наличие одной реализации случайной величины $e^{(n)}$ не позволяет вычислить μ_{nj}, поэтому вместо (12) будем рассматривать выборочную оценку

$$\hat{J}_L(n) = \frac{1}{L} \sum_{j=n-L+1}^{n} (e^{(n)} \tilde{f}_j)^2, \quad n \geq L. \tag{13}$$

Величину L можно трактовать как объем выборки, и задание ее обсуждается далее.

Как правило, оценка $\varphi^{(n)}$ зависит от некоторых «управляющих» параметров алгоритма оценивания, и значения этих параметров целесообразно выбирать из *условия минимума* (13). По сути, это является *критерием адаптации* в условиях априорной неопределенности. На примере рекуррентного алгоритма (6)—(8) покажем конструктивность этого критерия.

Заметим, что точность регуляризованных решений $\varphi_\alpha^{(n)}$, определяемых (6)—(8), зависит от величин α и дисперсий σ_n^2 шума измерений.

Введем матрицу

$$H^{(n)} = P_\alpha^{(n)} / \sigma_n^2 \tag{14}$$

и нормированную матрицу

$$H_{\text{н}}^{(n)} = H^{(n)} / \beta_n, \tag{15}$$

где

$$\beta_n = \| H^{(n)} \| = \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} h_{ij}^2 \right]^{1/2}.$$

Тогда алгоритм (6)—(8) можно переписать в виде

$$H^{(n)} = \beta_n H_{\text{н}}^{(n)} = H^{(n-1)} - \frac{H^{(n-1)} k_n^T k_n H^{(n-1)}}{1 + k_n H^{(n-1)} k_n^T}, \tag{16}$$

$$\varphi_\alpha^{(n)} = \varphi_\alpha^{(n-1)} + \beta_n H_{\text{н}}^{(n)} k_n^T \left[\tilde{f}_n - k_n \varphi_\alpha^{(n-1)} \right]. \tag{17}$$

Видно, что решение $\varphi_\alpha^{(n)}$ зависит от параметра β_n.

Утверждение 2. Значение $\hat{\beta}_n$, доставляющее минимум функционалу (13), определяется соотношением

$$\hat{\beta}_n = \beta_{\text{опт}} = b_1 / b_2 = z_{n+1} / h_n z_n, \tag{18}$$

где

$$b_2 = 2F_n h_n^2 z_n^2, \qquad b_1 = 2F_n h_n z_n z_{n+1},$$

$$F_n = \frac{1}{L} \sum_{j=n-L+1}^{n} \tilde{f}_j^2, \qquad h_n = k_{n+1} H_{\text{н}}^{(n)} k_n^T,$$

$$z_{n+1} = \tilde{f}_{n+1} - k_{n+1} \varphi_\alpha^{(n-1)}, \qquad z_n = \tilde{f}_n - k_n \varphi_\alpha^{(n-1)}.$$

Доказательство утверждения приведено в приложении.

С учетом соотношения (16) работу адаптивного рекуррентного алгоритма можно представить следующими этапами:

Этап 0. Задание «стартовой» информации ($n = 0$): $\varphi_\alpha^{(0)} = m_\varphi$; $P_\alpha^{(0)} = (\alpha W_\varphi)^{-1}$; α; L — объем выборки (обычно 4—8); n_s — номер отсчета, на котором включается адаптация ($n_s > L$).

Этап 1. Работа алгоритма (6)—(8) ($1 \le n \le n_s - 1$).

Этап 2. Включение адаптации ($n = n_s$): вычисление матрицы $P^{(n_s)}$ по формуле (6) и матрицы $H^{(n_s)}$ по формуле (14).

Этап 3. Работа адаптивного алгоритма ($n \ge n_s$): если $n > n_s$, то вычисление $H^{(n)}$ по формуле (16); нормирование матрицы $H^{(n)}$; вычисление оптимального параметра $\widehat{\beta}_n$ по формуле (18); вычисление $\varphi_\alpha^{(n)}$ по соотношению (17) и матрицы $H^{(n)} = \widehat{\beta}_n H_{\text{н}}^{(n)}$.

Этап 3 повторяется для каждого нового отсчета.

Точностные характеристики регуляризованного решения. Определим вектор ошибки решения $\varphi^{(n)}$ как

$$\varepsilon^{(n)} = \varphi^{(n)} - \varphi,$$

φ — точное решение. Этот вектор можно представить в виде

$$\varepsilon^{(n)} = \varphi^{(n)} - M\left[\varphi^{(n)}\right] + M\left[\varphi^{(n)}\right] - \varphi = \xi^{(n)} + b^{(n)},$$

где $\xi^{(n)}$ — случайная, а $b^{(n)}$ — систематическая ошибка решения $\varphi^{(n)}$. Первоначально определим вектор $b^{(n)} = M[\varphi^{(n)}] - \varphi$.

Используя уравнение (9), можно показать, что $b^{(n)}$ определяется из решения системы

$$(K_n^T V_{n\eta}^{-1} K_n + \alpha W_\varphi) b^{(n)} = -\alpha W_\varphi(\varphi - m_\varphi). \tag{19}$$

Заметим, что $b^{(n)}$ зависит от «априорного смещения» $\varphi - m_\varphi$ и при $\alpha \to 0$ вектор $b^{(n)} \to 0$. По аналогии с утверждением 1 можно доказать

Утверждение 3. Решение $b^{(n)}$ системы (19) определяется одним из следующих рекуррентных уравнений:

$$b^{(l+1)} = \left[I - g^{(l+1)} k_{n+1}\right] b^{(l)}, \tag{20}$$

$$b^{(l+1)} = P^{(l+1)} (P^{(l)})^{-1} b^{(l)}, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{21}$$

где

$$b^{(0)} = m_\varphi - \varphi, \tag{22}$$

$$g^{(l+1)} = \frac{P^{(l)} k_{l+1}^T}{\sigma_{l+1}^2 + k_{l+1} P^{(l)} k_{l+1}^T}. \tag{23}$$

Следствие.

$$b^{(n)} = \left[\prod_{l=0}^{n} P^{(l+1)} (P^{(l)})^{-1}\right] (m_\varphi - \varphi). \tag{24}$$

Вектор случайной ошибки $\xi^{(n)} = \varphi^{(n)} - M[\varphi^{(n)}]$ можно, используя запись (9), представить в виде

$$\xi^{(n)} = (K_n^T V_{n\eta} K_n + \alpha W_\varphi)^{-1} K_n^T V_{n\eta}^{-1} \eta_n. \tag{25}$$

Тогда с учетом того, что $M[\eta_n\eta_n^T] = V_{n\eta}$, корреляционная матрица этого вектора $\Gamma^{(n)} = M[\xi^{(n)}(\xi^{(n)})^T]$ равна

$$\Gamma^{(n)} = (K_n^T V_{n\eta} K_n + \alpha W_\varphi)^{-1} K_n^T V_{n\eta}^{-1} K_n (K_n^T V_{n\eta}^{-1} K_n + \alpha W_\varphi)^{-1}. \tag{26}$$

Используя матричные преобразования доказательства утверждения 1, получаем

Утверждение 4. Корреляционная матрица $\Gamma^{(n)}$, определяемая соотношением (26), является решением рекуррентных уравнений:

$$\begin{gathered}\Gamma^{(l+1)} = (I - g^{(l+1)}k_{l+1})\Gamma^{(l)}(I - g^{(l+1)}k_{l+1})^T + \sigma_{l+1}^2 g^{(l+1)}(g^{(l+1)})^T, \\ \Gamma^{(0)} = V_{n_\eta}, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1,\end{gathered} \tag{27}$$

где $g^{(l)}$ — вектор, определяемый выражением (23).

Определим «физический смысл» матриц $P^{(n)}$ и $H^{(n)}$. При предположении, что корреляционная матрица априорного распределения V_φ задана соотношением

$$V_\varphi = (\alpha W_\varphi)^{-1},$$

матрица $P^{(n)}$ является также корреляционной матрицей случайной ошибки $\xi^{(n)}$. Эта матрица отличается от матрицы (27) тем, что при ее вычислении учитывается не только шум, но и априорная неопределенность в задании стартовой точки. Поэтому имеет место неравенство

$$\left\{\Gamma^{(n)}\right\}_{ij} \le \left\{P^{(n)}\right\}_{ij}.$$

Очевидно, что $P^{(n)}$ можно рассматривать как верхнюю границу для $\Gamma^{(n)}$, не вычисляя последнюю из-за громоздкости выражения (27).

Матрицы $P^{(n)}$ и $H^{(n)}$ связаны соотношением

$$H^{(n)} = P^{(n)}/\sigma_n^2,$$

и поэтому элементы матрицы $H^{(n)}$ можно трактовать как «коэффициенты передачи» дисперсии шума σ_n^2 в корреляционную матрицу $P^{(n)}$, характеризующие устойчивость алгоритма к шуму.

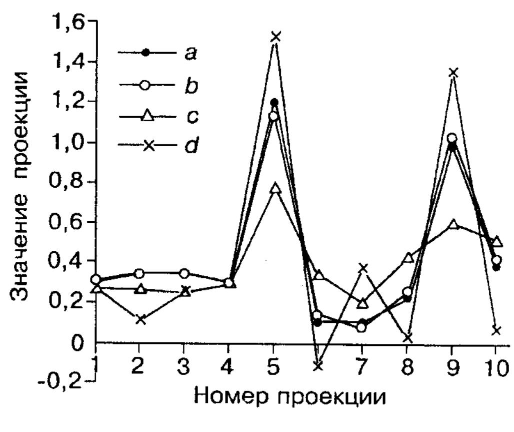

Рис. 1. Проекции точного решения и решений, построенных при различных стартовых значениях: *a* — точное решение; *b* — оптимальные стартовые значения; *c* — параметр α завышен; *d* — параметр α занижен

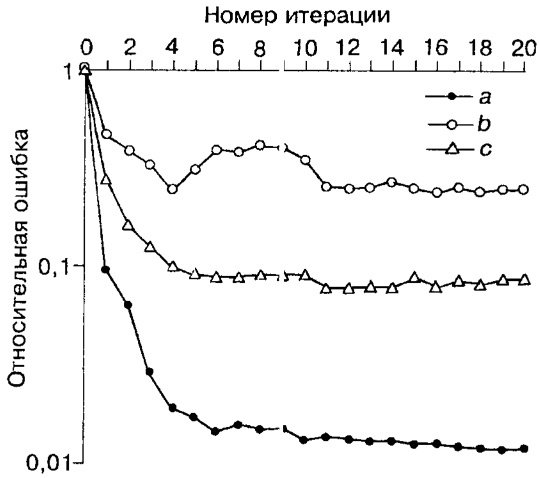

Рис. 2. Траектории относительных ошибок решений, построенных при различных стартовых значениях:
a — оптимальные стартовые значения; *b* — параметр α занижен; *c* — параметр α завышен

Таким образом, полученные рекуррентные соотношения (6), (16), (21), (27) позволяют вычислять характеристики систематической и случайной ошибок решения $\varphi^{(n)}$. Заметим, что стартовая точка $b^{(0)}$ (см. (22)) включает искомый вектор φ. Поэтому на практике вместо вектора φ можно использовать некоторое его приближение.

Результаты вычислительного эксперимента. Для проверки работоспособности предложенного адаптивного рекуррентного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент. Остановимся на некоторых его результатах.

В качестве матрицы K была взята матрица размером 20×10 с числом обусловленности $\sim 10^6$, проекции искомого вектора φ представлены на рис. 1. Вектор f правой части (1), соответствующий решению φ, искажался нормально распределенным шумом с относительным уровнем $\delta = 0{,}01$; 0,2. По исходным данным $\{K, \widetilde{f}, V_\eta\}$ строились различные решения $\varphi^{(n)}$. На рисунке приведены

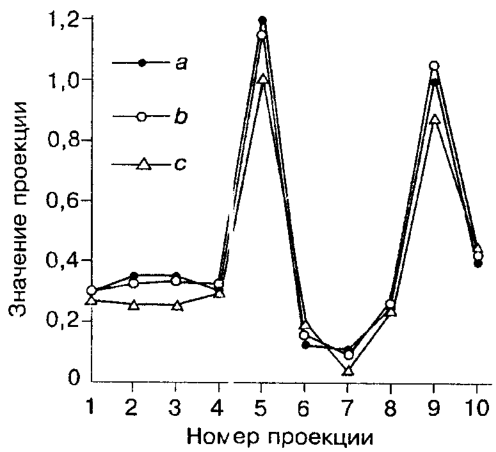

Рис. 3. Проекции точного решения и решений, построенных адаптивным рекуррентным алгоритмом:
a — точное решение; *b* — низкий уровень шума; *c* — высокий уровень шума

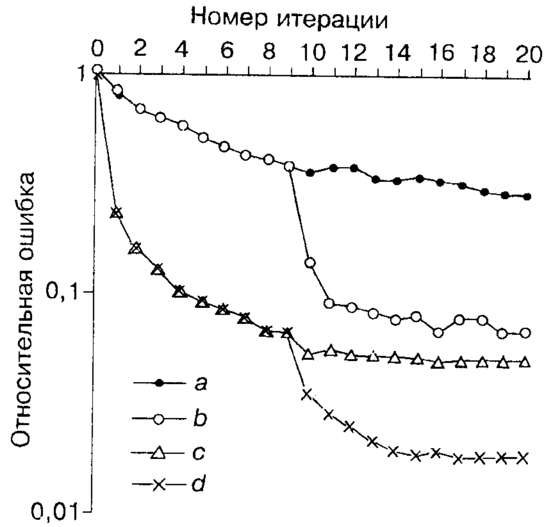

Рис. 4. Траектории относительных ошибок решений, построенных различными алгоритмами: *a* — алгоритм (6)—(8), высокий уровень шума; *b* — адаптивный алгоритм, высокий уровень шума; *c* — алгоритм (6)—(8), низкий уровень шума; *d* — адаптивный алгоритм, низкий уровень шума

векторы $\varphi^{(n)}$, $n = 20$, соответствующие: а) «оптимальным» стартовым значениям

$$\{m_\varphi\}_i = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\varphi_j, \quad i = 1, ..., M;$$

$$P^{(0)} = (\varphi - m_\varphi)(\varphi - m_\varphi)^T;$$

б) заниженному параметру α; в) завышенному параметру α.

Видно, что в двух последних случаях $\varphi^{(n)}$ существенно отличается от искомого решения. Это также иллюстрирует рис. 2, где изображены траектории среднеквадратической ошибки

$$\Delta^{(n)}_{\text{отн}} = \|\varphi^{(n)} - \varphi\| / \|\varphi\|.$$

По той же правой части, в предположении, что дисперсии шума неизвестны, строились решения на основе адаптивного алгоритма (15)—(18).

На рис. 3 приведено точное решение φ, а также $\varphi^{(n)}$ для двух уровней шума $\delta = 0{,}01$; 0,2, а на рис. 4 — ошибки $\Delta^{(n)}_{\text{отн}}$ для тех же уровней шума при использовании базового алгоритма (6)—(8) и адаптивного рекуррентного алгоритма (16)—(18). Адаптация включалась на шаге $n_s = 10$, объем выборки $L = 8$. Эти рисунки показывают существенное повышение точности решения и регуляризирующее свойство рекуррентного алгоритма, т. е. при уменьшении уровня шума также уменьшается ошибка решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Первоначально докажем соотношение (10). Из выражения

$$\frac{\sigma^2_{n+1}}{\sigma^2_{n+1}} = \frac{\sigma^2_{n+1} + k_{n+1}P^{(n)}_\alpha k^T_{n+1}}{\sigma^2_{n+1} + k_{n+1}P^{(n)}_\alpha k^T_{n+1}}$$

следует

$$\frac{1}{\sigma_{n+1}^2} = \frac{1}{\sigma_{n+1}^2 + k_{n+1}P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T} + \frac{k_{n+1}P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T}{\sigma_{n+1}^2(\sigma_{n+1}^2 + k_{n+1}P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T)}.$$

Умножим это равенство слева на $P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T$, а справа на k_{n+1}:

$$\frac{P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T k_{n+1}}{\sigma_{n+1}^2} = \frac{P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T k_{n+1}}{\sigma_{n+1}^2 + k_{n+1}P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T} + \frac{P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T(k_{n+1}P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T)k_{n+1}}{\sigma_{n+1}^2(\sigma_{n+1}^2 + k_{n+1}P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T)}.$$

Умножим обе части последнего соотношения на $(P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T k_{n+1}/\sigma_{n+1}^2)^{-1}$. Получаем

$$I = \left[P_\alpha^{(n)} - \frac{P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T k_{n+1}P_\alpha^{(n)}}{\sigma_{n+1}^2 + k_{n+1}P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T}\right]\left[(P_\alpha^{(n)})^{-1} + \frac{k_{n+1}^T k_{n+1}}{\sigma_{n+1}^2}\right].$$

Принимая во внимание (6), имеем

$$I = P_\alpha^{(n+1)}\left[(P_\alpha^{(n)})^{-1} + \frac{k_{n+1}^T k_{n+1}}{\sigma_{n+1}^2}\right],$$

$$(P_\alpha^{(n+1)})^{-1} = (P_\alpha^{(n)})^{-1} + \frac{k_{n+1}^T k_{n+1}}{\sigma_{n+1}^2}.$$

С учетом (8) и последнего соотношения получаем выражение

$$(P_\alpha^{(n)})^{-1} = \alpha W_\varphi + \sum_{l=1}^{n} \frac{k_l^T k_l}{\sigma_l^2}.$$

Из этого выражения и диагональности матрицы V_η непосредственно следует

$$P_\alpha^{(n)} = (\alpha W_\varphi + K_n^T V_{n\eta}^{-1} K_n)^{-1},$$

т. е. соотношение (10).

Перейдем к доказательству системы (9). Выполнив несложные преобразования соотношения (6), можно показать, что

$$\frac{P_\alpha^{(n+1)}k_{n+1}^T}{\sigma_{n+1}^2} = \frac{P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T}{\sigma_{n+1}^2 + k_{n+1}P_\alpha^{(n)}k_{n+1}^T}.$$

Тогда с учстом (6) имеем

$$(P_\alpha^{(n+1)})^{-1}\varphi_\alpha^{(n+1)} = (P_\alpha^{(n)})^{-1}\varphi_\alpha^{(n)} + \frac{k_{n+1}^T \tilde{f}_{n+1}}{\sigma_{n+1}^2}.$$

Из последнего тождества получим

$$(P_\alpha^{(n)})^{-1}\varphi_\alpha^{(n)} = \alpha W_\varphi m_\varphi + \sum_{l=1}^{n} \frac{k_l^T \tilde{f}_l}{\sigma_l^2}$$

или

$$(P_\alpha^{(n)})^{-1}\varphi_\alpha^{(n)} = \alpha W_\varphi m_\varphi + K_n^T V_{n\eta}^{-1}\tilde{f}_n.$$

Из этого выражения с учетом (10) находим систему (9).

Доказательство утверждения 2. Первоначально представим $\widehat{J}_L(n)$ в виде квадратичного функционала относительно β_n. С учетом выражений

$$e^{(n)} = \widetilde{f}_{n+1} - k_{n+1}\varphi_\alpha^{(n)},$$

$$\varphi_\alpha^{(n)} = \varphi_\alpha^{(n-1)} + \frac{P_\alpha^{(n)} k_n^T}{\sigma_n^2}\left[\widetilde{f}_n - k_n\varphi_\alpha^{(n-1)}\right],$$

$$P_\alpha^{(n)}/\sigma_n^2 = \beta_n H_{\text{н}}^{(n)}$$

получаем

$$\widehat{J}_L(n) = \frac{1}{L}\sum_{j=n-L+1}^{n}\left\{\widetilde{f}_j(z_{n+1} - h_n z_n \beta_n)\right\}^2,$$

где $z_{n+1} = \widetilde{f}_{n+1} - k_{n+1}\varphi_\alpha^{(n-1)}$; $z_n = \widetilde{f}_n - k_n\varphi_\alpha^{(n-1)}$; $h_n = k_{n+1}H_{\text{н}}^{(n)}k_n^T$. Возведя в квадрат и выполнив несложные преобразования, имеем

$$\widehat{J}_L(n) = \frac{1}{L}\sum_{j=n-L+1}^{n} f_j^2(z_{n+1}^2 - 2\beta_n h_n z_n z_{n+1} + \beta_n^2 h_n^2 z_n^2) = \frac{1}{2}\beta_n^2 b_2 - \beta_n b_1 + b_0,$$

где $b_2 = \frac{2}{L}\sum_{j=n-L+1}^{n} f_j^2 h_n^2 z_n^2$; $b_1 = \frac{2}{L}\sum_{j=n-L+1}^{n} f_j^2 h_n z_{n+1} z_n$; $b_0 = \frac{2}{L}\sum_{j=n-L+1}^{n} f_j^2 z_{n+1}^2$. Очевидно, что минимум $\widehat{J}_L(n)$ достигается в точке

$$\widehat{\beta}_n = b_1/b_2 = \frac{z_{n+1}}{h_n z_n}$$

и в этой точке $\widehat{J}_L(n) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. **Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
3. **Воскобойников Ю. Е.** Методы решения некорректных задач параметрической идентификации: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996.
4. **Жуковский Е. Л., Липцер Р. Ш.** О рекуррентном способе вычисления нормальных решений линейных алгебраических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1972. № 4. С. 843.
5. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующих алгоритмов восстановления изображений // Автометрия. 1995. № 3. С. 68.
6. **Медич Дж.** Статистические оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973.
7. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.

Поступила в редакцию 14 февраля 1997 г.