РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1997

УДК 519.72 : 681.51

В. В. Савченко

(Нижний Новгород)

ТЕСТИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПО ВЫБОРКЕ

В терминах проверки статистических гипотез поставлена задача тестирования набора конкурирующих оценок спектральной плотности мощности по конечной выборке наблюдений. На основе теоретико-информационного подхода получено решение в аналитическом виде и рассмотрены его различные модификации в ориентации на новый класс методов спектрального оценивания случайных процессов и полей с улучшенным частотным разрешением. Даны оценки эффективности синтезированного алгоритма по вероятностям ошибочных решений.

Спектральное оценивание как составная часть оптимальной обработки сигналов в частотной области обосновывается в работе [1], где в этом качестве строго обусловлен известный метод периодограмм. Между тем во многих случаях предпочтение отдается новым нелинейным методам спектрального оценивания случайных процессов и полей с улучшенным частотным разрешением [2]. Это справедливо, например, в задачах виброакустической диагностики динамических систем при обработке и хранении больших объемов информации [3]. Благодаря применению нелинейных методов, здесь достигается многократное сжатие данных без потерь в разрешающей способности. Исследования в указанном направлении непрерывно расширяются и наиболее интенсивно в последние годы в связи с бурным распространением быстродействующей вычислительной техники [4]. В условиях порожденного этим процессом многообразия методов и идей особую актуальность приобретает проблема выбора наилучшего метода для каждой конкретно поставленной задачи. Довольно общий подход к ее решению, в котором во главу угла по аналогии с [1] поставлены информационные аспекты спектрального оценивания, представлен в настоящей статье.

Постановка задачи. Пусть $X(t)$ — случайный процесс, заданный последовательностью своих отсчетов $x_m(i) = x_m(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, взятых с периодом дискретизации $\tau = t_i - t_{i-1} = \text{const}$ в серии из M независимых наблюдений $\mathbf{x}_m = \text{col}\{x_m(i)\}$, $m = \overline{1, M}$, где $\text{col}\{\cdot\}$ обозначает вектор-столбец размером $n = 1, 2, \ldots$. И пусть имеется конечный набор различных оценок спектральной плотности мощности $G_r(f)$, $r = \overline{1, R}$, определенных в ограниченной полосе частот $[-F; F]$, где $F = 1/(2\tau)$. Требуется по имеющимся выборочным данным $X = \{\mathbf{x}_m\}$ принять решение в пользу наилучшей спектральной оценки $G_\nu(f)$, $\nu \leq R$. Задача состоит, таким образом, в проверке или тестировании R альтернативных гипотез в отношении спектральных свойств наблюдаемого процесса $X(t)$. Сформулируем ее в терминах классической теории проверки статистических гипотез.

Для каждой рассматриваемой спектральной оценки $G_r(f)$ определим модель центрированного случайного процесса с n-мерным гауссовым распределением $\mathbf{P}_r = N(\mathbf{K}_r)$, заданным соответствующей корреляционной матрицей $\mathbf{K}_r = \mathbf{F}_n G_r(f)$, которая везде в дальнейшем предполагается неособенной. Здесь $\mathbf{F}_n$ — n^2-оператор обратного фурье-преобразования. Задача выбора наилучшей спектральной оценки $G_\nu(f)$ из числа конкурирующих оценок $G_1(f), \ldots, G_R(f)$

сводится в таком случае к проверке R простых гипотез о неизвестном законе распределения:

$$H_r: \mathbf{P} = \mathbf{P}_r, \quad r = \overline{1, R}. \tag{1}$$

Это стандартная задача различения по выборке набора гауссовых сигналов [5]. Следуя общесистемному критерию максимума правдоподобия, решение $H_\nu(X)$ в пользу одной из гипотез $H_1, ..., H_R, \nu \le R$, будем принимать по выборке X из условия максимума соответствующей функции правдоподобия:

$$H_\nu(X): p_\nu(X) = \max p_r(X). \tag{2}$$

При учете независимости наблюдений $\{\mathbf{x}_m\}$ в совокупности для центрированного процесса $X(t)$ имеем следующий набор функций правдоподобия:

$$p_r(X) = (2\pi)^{-Mn/2} |\mathbf{K}_r|^{-M/2} \exp\left(-0{,}5 \sum_{m=1}^{M} \mathbf{x}_m^T \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{x}_m\right), \quad r = \overline{1, R}. \tag{3}$$

Здесь $|\mathbf{K}_r|$ обозначает определитель корреляционной матрицы; $\mathbf{K}_r^{-1}$ — обратная $(n \times n)$-матрица. Путем несложных преобразований из выражения (3) получим соответствующий набор решающих статистик вида

$$g_r(X) = \ln|\mathbf{K}_r| + M^{-1} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{x}_m^T \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{x}_m + n\ln(2\pi) =$$

$$= \ln|\mathbf{K}_r| + \mathrm{tr}(\mathbf{K}_X \mathbf{K}_r^{-1}) + \mathrm{const} \sim \ln p_r^{-1}(X), \tag{4}$$

где $\mathbf{K}_X = M^{-1} \sum_m \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T$ — оценка корреляционной матрицы по выборке конечного объема M; $\mathrm{tr}(\cdot)$ — след матрицы.

Выражение (4) совместно с (2) определяет оптимальное решение поставленной задачи (1) в терминах корреляционных характеристик анализируемого процесса. Основываясь на существующей жесткой взаимосвязи корреляционных и спектральных характеристик случайных процессов, преобразуем полученный результат (4) в частотную область. Для этого воспользуемся рядом общих положений информационной теории идентификации.

Синтез оптимального алгоритма. Отталкиваясь от выборочной оценки корреляционной матрицы в выражении (4), рассмотрим гауссову модель случайных наблюдений с распределением $\mathbf{P}_X = N(\mathbf{K}_X)$, где матрица $\mathbf{K}_X$ предполагается неособенной.

Утверждение 1. Оптимальное по критерию максимума правдоподобия решение задачи различения R гауссовых сигналов в формулировке (1)—(3) отвечает принципу наименьшего информационного отклонения закона $\mathbf{P}_X$ от искомого распределения $\mathbf{P}_\nu$ в метрике Кульбака — Лейблера $I[\mathbf{P}_X \mid \mathbf{P}_\nu]$.

Доказательство прямо следует из сопоставления известного в теории информации результата [6]

$$I[\mathbf{P}_X \mid \mathbf{P}_r] = \int_{\mathbf{R}^n} \ln\left[d\mathbf{P}_X / d\mathbf{P}_r(\mathbf{x})\right] \mathbf{P}_X\{d\mathbf{x}\} =$$

$$= 0{,}5\left[\mathrm{tr}(\mathbf{K}_X \mathbf{K}_r^{-1}) + \ln|\mathbf{K}_r \mathbf{K}_X^{-1}| - n\right] \tag{5}$$

с выражением для r-й решающей статистики (4).

Доказанное утверждение можно рассматривать как обобщение на случай многоальтернативной проверки статистических гипотез аналогичного вывода работы [1]. Указанная аналогия распространяется и на схему последующих вычислений.

С использованием известного результата [7] в отношении удельной величины информационного отклонения в обозначениях из выражения (5) будем иметь

$$n^{-1}I\left[\mathbf{P}_X \mid \mathbf{P}_r\right]\Big|_{n\to\infty} = 0{,}5\left[\operatorname{tr}(\tau^2\mathbf{K}_X\mathbf{F}_nG_r^{-1}(f)) + \ln|\mathbf{K}_r|\right]\Big|_{n\to\infty} + \text{const} =$$

$$= (4F)^{-1}\int_{-F}^{F}\left[\ln G_r(f) + M^{-1}\sum_{m=1}^{M}\lim_{n\to\infty}(2Fn)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left|\sum_{i=1}^{n}x_m(i)\exp(-j2\pi if\tau)\right|^2 G_r^{-1}(f)\right]df + \text{const}.$$

Предпринятый здесь предельный переход при $n\to\infty$ предполагает наличие полной априорной информации о корреляционных свойствах всех R различаемых сигналов как очевидное требование необходимой обусловленности решаемой задачи в терминах их спектральных характеристик. На основании последнего соотношения и формулы (4) получаем асимптотически оптимальный алгоритм принятия решений по выборкам $\{\mathbf{x}_m\}$ конечного объема $n<\infty$:

$$H_\nu(X)\colon (2F)^{-1}\int_{-F}^{F}\left[S_X(f)G_r^{-1}(f) + \ln G_r(f)\right]df\Big|_{r=\nu} = \min_r. \tag{6}$$

Здесь

$$S_X(f) = M^{-1}\sum_{m=1}^{M}(2Fn)^{-1}\left|\sum_{i=1}^{n}x_m(i)\exp(-j2\pi if\tau)\right|^2 \tag{7}$$

— периодограмма Бартлетта с усреднением по M независимым векторным наблюдениям [4].

Таким образом, для тестирования набора из R различных спектральных оценок предлагается следующая совокупность операций над имеющимися наблюдениями: 1) формирование по выборке периодограммной оценки спектральной плотности мощности в роли тестового сигнала; 2) вычисление для каждой рассматриваемой спектральной оценки соответствующей решающей статистики интегрального вида (6); 3) определение наименьшей решающей статистики и принятие соответствующего решения в пользу наиболее правдоподобной из конкурирующих оценок.

Указанной последовательности операций предшествует этап формирования базы исходных данных по результатам выборочного оценивания R различными способами неизвестной спектральной плотности мощности. При этом на каждом этапе вычислений используется либо одна и та же выборка, либо две разные выборки из рассматриваемого вероятностного пространства.

Предложенный алгоритм допускает ряд интересных модификаций. Так, для широкого класса спектральных оценок $G_r(f)$ с высокой разрешающей способностью [2], основанных на идее порождающего процесса типа гауссова шума с независимыми отсчетами $\{\eta_r(i)\}$ и дисперсией $\sigma_r^2=\text{const}$ в ограниченной полосе частот $[-F;\,F]$, будем иметь систему равенств

$$G_r(f) = (2F)^{-1}\sigma_r^2K_r^2(f),\qquad r=\overline{1,R}, \tag{8}$$

где $K_r(f)$ — модуль комплексного коэффициента передачи формирующего фильтра для r-го процесса. На множестве физически реализуемых линейных фильтров из выражений (6) и (8) получаем алгоритм

$$H_\nu(X)\colon \sigma_r^{-2}\int_{-F}^{F}S_X(f)K_r^{-2}(f)df + \ln\sigma_r^2\Big|_{r=\nu} = \min_r, \tag{9}$$

осуществляемый по схеме R-канальной параллельной фильтрации наблюдений с последующим выбором ν-го канала по критерию минимума выборочной дисперсии его отклика

$$\sigma_r^2(y) = \int_{-F}^{F} S_X(f) K_r^{-2}(f) df = M^{-1} \sum_{m=1}^{M} y_r^2(m), \qquad (10)$$

отнесенной к соответствующей дисперсии порождающего процесса σ_r^2 и смещенной на пропорциональную ей величину $\ln\sigma_r^2$. При этом в каждом r-м канале используется фильтр, инверсный формирующему фильтру для r-го процесса, т. е. соответствующий обеляющий фильтр. Набор частотных характеристик R обеляющих фильтров совместно с дисперсиями порождающих процессов для всех конкурирующих спектральных оценок и составляет в представленной модификации синтезированного алгоритма (9) содержание базы исходных данных.

В частном случае нормирования спектральных оценок по дисперсиям порождающих процессов к некоторому постоянному уровню $\sigma_r^2 = \sigma_0^2 = \text{const}\ \forall r \leq R$ приходим к наиболее простой формулировке алгоритма вида

$$H_\nu(X): \int_{-F}^{F} S_X(f) K_r^{-2}(f) df \Big|_{r=\nu} = \min_r.$$

Здесь во внимание принимаются исключительно структурные различия в спектральных оценках и решение выносится в пользу наилучшей из них по признаку минимума мощности нескомпенсированного остатка (10) на выходе соответствующего обеляющего фильтра.

Анализ эффективности. Эффективность синтезированного алгоритма может быть охарактеризована набором условных вероятностей ошибочных решений

$$\alpha_{\nu,r} = P\{H_r(X) \mid H_\nu\} = P\{g_\nu(X) > g_r(X) \mid H_\nu\}, \quad \nu \neq r = \overline{1,R}.$$

В обозначениях из выражений (9) и (10) можно записать:

$$g_\nu(X)\Big|_{H_\nu} = \sigma_\nu^{-2} \int_{-F}^{F} S_X(f) K_\nu^{-2}(f) df \Big|_{H_\nu} + \ln\sigma_\nu^2 =$$

$$= M^{-1} \sum_{m=1}^{M} \eta_\nu^2(m)/\sigma_\nu^2 + \ln\sigma_\nu^2 = \chi_\nu^2(M)/M + \ln\sigma_\nu^2,$$

$$g_r(X)\Big|_{H_\nu} = M^{-1} \sum_{m=1}^{M} y_r^2(m)/\sigma_r^2 \Big|_{H_\nu} + \ln\sigma_r^2 = \chi_r^2(M)\gamma_{\nu,r}/M + \ln\sigma_r^2,$$

где $\chi_\nu^2(M)$, $\chi_r^2(M)$ — случайные величины, распределенные по закону χ^2-Пирсона с M степенями свободы каждая;

$$\gamma_{\nu,r} = \sigma_r^{-2} \int_{-F}^{F} G_\nu(f) K_r^{-2}(f) df = (2F)^{-1} \int_{-F}^{F} G_\nu(f) G_r^{-1}(f) df$$

— коэффициент различимости ν-й и r-й спектральных оценок [1]. С использованием полученных соотношений искомая вероятность ошибки при тестировании спектральных оценок в общем случае определяется выражением

$$\alpha_{\nu,r} = P\{\chi_\nu^2(M) - \chi_r^2(M)\gamma_{\nu,r} > M\ln(\sigma_r^2\sigma_\nu^{-2})\},$$

или его упрощенной модификацией

$$\alpha_{\nu,r} = P\left\{\chi_\nu^2(M)/\chi_r^2(M) > \gamma_{\nu,r}\right\}$$

для задач с набором нормированных по дисперсиям порождающих процессов спектральных оценок. В предположении о независимости статистик χ_ν^2 и χ_r^2 для этого случая окончательно будем иметь

$$\alpha_{\nu,r} = P\left\{F_{M,M} > \gamma_{\nu,r}\right\} = 1 - \Phi_M(\gamma_{\nu,r}),$$

где $F_{M,M}$ — случайная величина, подчиненная закону F-распределения Фишера с (M, M) степенями свободы; $\Phi_M(\cdot)$ — его интегральная функция распределения, значения которой табулированы [8].

Полученное выражение подтверждает интуитивные представления об эффективности синтезированного алгоритма в зависимости от свойств тестируемых спектральных оценок. Чем больше интегральные различия сравниваемых оценок в пределах рассматриваемого диапазона частот, тем выше достоверность их тестирования по любой конечной выборке наблюдений. Набор относительных величин $\{\gamma_{\nu,r}\}$ здесь выполняет роль рабочих характеристик алгоритма со свойством $\gamma_{\nu,r} \geq 1\ \forall\, \nu, r = \overline{1, R}$. Теоретико-информационное обобщение сделанных выводов дается в следующем утверждении.

Утверждение 2. Рабочие характеристики асимптотически оптимального алгоритма в задаче различения гауссовых сигналов, нормированных по дисперсиям порождающих их процессов к некоторому постоянному уровню, определяются удельной величиной их информационного рассогласования по Кульбаку — Лейблеру согласно выражению

$$\gamma_{\nu,r} = 2n^{-1} I[\mathbf{P}_\nu \mid \mathbf{P}_r] + 1 \geq 1.$$

Доказательство изложенного опирается на предыдущий результат (5) при дополнительном учете равенства $\sigma_\nu^2 = \sigma_r^2 = \mathrm{const}$.

Обсуждение полученных результатов. К основным результатам проведенного исследования следует отнести в первую очередь вывод и обоснование решающего правила (6), (7) в роли универсального критерия тестирования спектральных оценок по эффективности, которым охватывается широкий круг разнообразных методов, включая новые нелинейные методы с улучшенным частотным разрешением. Полученные результаты распространяются на задачи с различными априорными данными и ограничениями, среди которых можно выделить задачи многоканального и многомерного анализа.

В числе ограничений на оптимальность разработанного алгоритма необходимо особо отметить требование стационарности в широком смысле анализируемого процесса, которое прямо связано со строгим определением его спектральной плотности мощности [4]. Однако на практике указанное ограничение в значительной мере ослабляется при переходе к моделям кусочно-стационарных наблюдений на интервалах, не выходящих за пределы конечного объема выборки X [3]. Ограничения на диапазон анализируемых частот также не могут считаться чрезмерно жесткими ввиду реально ограниченной полосы пропускания систем сбора, передачи и хранения информации. И наконец, введение гауссовой модели наблюдений никак не ограничивает возможного разнообразия законов распределения $\mathbf{P}$. В действительности указанное распределение может существенно отличаться от гауссова. В таком случае используемая модель $\mathbf{P}_X$ определяет его ортопроекцию на семейство гауссовых распределений как наиболее близкое к нему приближение в теоретико-информационном смысле [2].

По-видимому, наиболее значимым с точки зрения общности результатов исследования следует признать требование положительной определенности тестируемых спектральных оценок в пределах заданной полосы частот. Последнее непосредственно вытекает из математической формулировки критерия (6). Однако для большинства новых методов спектрального оценивания, таких как методы максимальной энтропии, линейного предсказания, минимальной дисперсии и другие, указанное требование выполняется по определению. В остальных случаях его легко можно удовлетворить, исключая из анализируемой полосы частот $[-F; F]$ все те участки, где $G_r(f) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Савченко В. В.** Обнаружение и прогнозирование разладки случайного процесса на основе спектрального оценивания // Автометрия. 1996. № 2. С. 77.
2. **Савченко В. В.** Адаптивные методы нелинейного спектрального оценивания на основе принципа ММЭ: Дис. ... д-ра техн. наук. Н. Новгород: НГТУ, 1993.
3. **Пат. 2049320 РФ.** Способ вибродиагностики технического состояния механизма /В. В. Савченко. Опубл. 1995, Бюл. № 33.
4. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
5. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.
6. **Кульбак С.** Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967.
7. **Савченко В. В.** Теоретико-информационное обоснование спектральных оценок минимакса энтропии // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. **36**, № 11.
8. **Мюллер П., Нойман П., Шторм Р.** Таблицы по математической статистике. М.: Финансы и статистика, 1982.

Поступила в редакцию 4 апреля 1996 г.