РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1997

УДК 535.41

З. Иманкулов, Н. С. Убайдуллаева, А. Н. Якубов

(Ташкент, Узбекистан)

ИЗМЕРЕНИЕ РАЗНОСТИ ФАЗ ДВУХ КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрена проблема измерения операторов разности фаз двух когерентных полей. Показано, что для определения среднего значения оператора, соответствующего в классическом пределе косинусу разности фаз двух колебаний, в квантовой области ($\langle n\rangle \ll 1$) можно с хорошей степенью точности ограничиться корреляционными измерениями первого и второго порядков.

Нахождение амплитудно-фазовых характеристик электромагнитного излучения в квантовом пределе сопряжено с рядом трудностей, связанных как с самой природой процесса регистрации полей, так и со спецификой оптического детектирования, ограничивающего наблюдаемые величины лишь операторами определенной структуры. Квазиклассическое приближение, при котором фазовые переменные связываются с аргументами парциальных комплексных амплитуд, оказывается неудовлетворительным при низких интенсивностях регистрируемых сигналов, когда когерентные состояния нельзя считать ортогональными даже приближенно. Данная ситуация возникает в интерферометрических измерениях сигналов сверхнизких интенсивностей [1, 2] и при корреляционной регистрации таких изображений [3—5]. В этой связи при анализе фазовой проблемы в квантовой оптике было предложено несколько методов, один из которых основан на введении самосопряженных эрмитовых операторов C и S [6], соответствующих косинусу и синусу фазового угла φ полевого осциллятора:

$$C = \frac{1}{2}(E^- + E^+), \qquad S = \frac{1}{2i}(E^- - E^+), \tag{1}$$

а также операторов C_{12} и S_{12}, соответствующих косинусу и синусу разности фаз колебаний двух независимых осцилляторов:

$$\begin{gathered} C_{12} = C_1C_2 + S_1S_2 = \frac{1}{2}(E_1^-E_2^+ + E_1^+E_2^-), \\ S_{12} = S_1C_2 - S_2C_1 = \frac{1}{2i}(E_1^-E_2^+ - E_1^+E_2^-), \end{gathered} \tag{2}$$

где $E^- = (N+1)^{-1/2}a^-$ и $E^+ = (N+1)^{-1/2}a^+$ — операторы сдвига в гильбертовом пространстве H_0 чисел заполнения; a^+ и a^- — операторы рождения и уничтожения; $N = a^+a^-$ — оператор числа фотонов. В ряде работ [7—9] с помощью этих операторов рассматривалась методика вычислений фазовых характеристик оптических полей, найдены их основные статистические свойства.

В пределах неограниченного гильбертова пространства невозможно построить эрмитовый оператор фазы, соответствующий гармоническому осциллятору. Поэтому авторы [10] предложили другую модель одномодового электромагнитного поля, которая включает произвольное ограниченное пространство Ψ, размеры которого могут увеличиваться лишь после вычисления физического результата. Такое представление [11, 12] физически идентично обычному гармоническому осциллятору, однако оно допускает существование эрмитового оператора фазы (и его унитарного преобразования), который имеет следующий вид:

$$\Phi = \theta + \frac{s\pi}{s+1} + \frac{2\pi}{s+1} + \sum_{n=n'} \frac{\exp[i(n'-n)\theta]\,|n'\rangle\langle n|}{\exp[i(n'-n)2\pi/(s+1)] - 1}, \tag{3}$$

где θ — фаза осциллятора, соответствующая выбранным пространственно-временным координатам; $\langle n|$ — состояние с $(s+1)$ числом фотонов, которое охватывает $(s+1)$-мерное пространство Ψ.

Другой подход, называемый «операционным» [13], заключается в анализе результатов экспериментов по гомодинной регистрации числа фотонов на выходе интерферометра. При этом получается эмпирическое выражение для операторов разности фаз между двумя детектируемыми полями:

$$\begin{aligned} C_{\text{м}} &= (n_4 - n_3)[(n_4 - n_3)^2 + (n_6 - n_5)^2]^{-1/2}, \\ S_{\text{м}} &= (n_6 - n_5)[(n_4 - n_3)^2 + (n_6 - n_5)^2]^{-1/2}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $n_4 - n_3 = i(a_2^+ a_1^- - a_1^+ a_2^-)$ и $n_6 - n_5 = -(a_2^+ a_1^- + a_1^+ a_2^-)$ — операторы разности числа фотонов на выходах интерферометра. Динамические переменные $C_{\text{м}}$ и $S_{\text{м}}$ коммутируют лишь в том случае, если их измерения производятся одновременно. Исследования [14, 15] показали, что различные схемы измерения приводят к разным выражениям для $C_{\text{м}}$ и $S_{\text{м}}$ и возможны другие универсальные динамические переменные, соответствующие фазе электромагнитного поля.

Следует заметить, что вышеизложенные подходы в случае слабых полей приводят к значительным расхождениям вычисляемых средних значений и дисперсий фазы, хотя для состояний с большим числом фотонов они совпадают. Поэтому необходимо согласовать формальное математическое удобство введения фазовых операторов с возможностью экспериментального наблюдения. Хотя операторы C и S являются динамическими переменными (формально измеримы в квантово-механическом смысле), их действительное определение затруднено специфичностью оптических измерений, где основной величиной является нормально упорядоченная по операторам a^+ и a^- корреляционная функция $G^{(n,\,n)}(x_1, \ldots, x_{2n})$. Это обстоятельство, видимо, ограничивало предыдущие работы исследованиями, касающимися в основном теоретической части данной проблемы. Кроме того, используемые методы измерения фазы в квантовом пределе используют прямое или гомодинное детектирование числа фотонов. При этом модулированный сигнал может подвергаться дополнительному шуму в виде флуктуаций интенсивности, относительный уровень которого зависит также от состояния поляризации излучения. Это приводит к значительному разбросу в ансамбле значений измеряемой разности фаз и как следствие к разным средним значениям оператора разности фаз. В данной работе предлагается метод определения среднего значения оператора C_{12}, основанный на использовании корреляционных функций первого и второго порядков.

Задача фазовых измерений в квантовом пределе сводится [7, 14] к определению среднего значения оператора разности фаз $\langle C_{12}\rangle$. Прямой метод вычисления $\langle C_{12}\rangle$, основанный на разложении $|\Psi\rangle$ по функциям $|n, \cos\theta\rangle$, ничего не дает для построения процедуры таких измерений, поскольку не существует прибор, оценивающий непосредственно $\cos\theta$. Поэтому в [16] был предложен другой подход, в котором C_{12} представляется в нормально упорядоченной форме по операторам рождения и уничтожения:

$$C_{12} = \sum_{n,\,m=0}^{\infty} B_{nm}[(a_1^+)^{n+1} a_1^n (a_2^+)^m a_2^{m+1} + (a_1^+)^n a_1^{n+1} (a_2^+)^{m+1} a_2^m], \tag{5}$$

где

$$B_{nm} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k+l}}{[(n-l+1)(m-k+1)]^{1/2}(n-l)!(m-l)!}. \tag{6}$$

Анализ выражения (5) показывает, что непосредственное измерение $\langle C_{12} \rangle$ требует определения корреляционных функций суперпозиционного поля бесконечно высокого порядка. В обычных статистических экспериментах при линейных преобразованиях полей измерение корреляционных функций, необходимых для определения $\langle C_{12} \rangle$, к сожалению, невозможно. Использование же нелинейных преобразований, хотя в принципе и позволяет проводить подобные измерения, но в общем случае сопряжено со значительными трудностями. Если, однако, ограничиться предельным случаем малых интенсивностей ($n \ll 1$ для каждой из мод), то практически для всех осуществимых реализаций поля излучения измерение $\langle C_{12} \rangle$ может быть с достаточной точностью выполнено и методами линейной оптики. Для осуществления этого необходимо произвести унитарное преобразование полевых операторов a_1 и a_2 [17]:

$$b_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^- + a_2^-), \qquad b_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^- - a_2^-). \tag{7}$$

В физическом смысле это преобразование эквивалентно повороту координатной системы и практически может быть выполнено разделением пучка на две ортогонально поляризованные компоненты, направления поляризаций которых сдвинуты на $\pm\pi/4$ по отношению к исходным. В новых переменных b_+ и b_- выражение для C_{12} можно записать:

$$C_{12} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\,k-n} \left\{ \sum_{p=0}^{n=1} \sum_{q=0}^{k=n} \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{k=n+1} \binom{n+1}{p} \binom{k-n}{q} \binom{n}{r} \times \right.$$
$$\left. \times \binom{k-n+1}{s} (-1)^{q+s-1} (b_+^+)^{q+p} (b_-^+)^{k+1-q-p} b_+^{r+s} b_-^{k+1-r-s} + \text{ЭС} \right\}. \tag{8}$$

Производя усреднение по матрице плотности начального состояния

$$\rho = \int P(a_1, a_2) \,|\, a_1, a_2 \rangle \langle a_1, a_2 \,|\, d^2 a_1 d^2 a_2, \tag{9}$$

находим

$$\langle C_{12} \rangle = B_{00} \left[G_+^{(1,\,1)} - G_-^{(1,\,1)} \right] + B_{10} \left[G_+^{(2,\,2)} - G_-^{(2,\,2)} \right] + R, \tag{10}$$

где $G_\pm^{(1,\,1)} = \langle b_\pm^+ b_\pm \rangle$, $G_\pm^{(2,\,2)} = \langle (b_\pm^+)^2 b_\pm^2 \rangle$, а слагаемое R при $\langle n_1 \rangle \approx \langle n_2 \rangle \approx \langle n \rangle$ оценивается как $R \sim \langle n \rangle^3$. Первый член в (10) совпадает с выражением корреляционной функции первого порядка для преобразованных волн. Второй член (10) описывает корреляции интенсивностей колебаний b_+ и b_-. Следовательно, значение $\langle C_{12} \rangle$ может быть определено с помощью измерений по методам корреляционной интерферометрии.

Практическая реализация вышеизложенного была осуществлена с помощью экспериментов по схеме, изображенной на рис. 1. Излучения сигнальной и опорной мод, которые были поляризованы линейно и ортогонально друг другу, смешиваются на полупрозрачном зеркале $B1$, в результате чего образуются два эллиптически поляризованных луча, параметры эллиптичности которых определяются разностью фаз $\Delta\varphi$ между модами. Поляризаторы $P1$ и $P2$, оси которых ориентированы под углом $\pm\pi/4$ по отношению к поляризации одного из лучей, преобразуют информацию о разности фаз двух колебаний в модуляцию интенсивности. Ортогонально поляризованные компоненты излу-

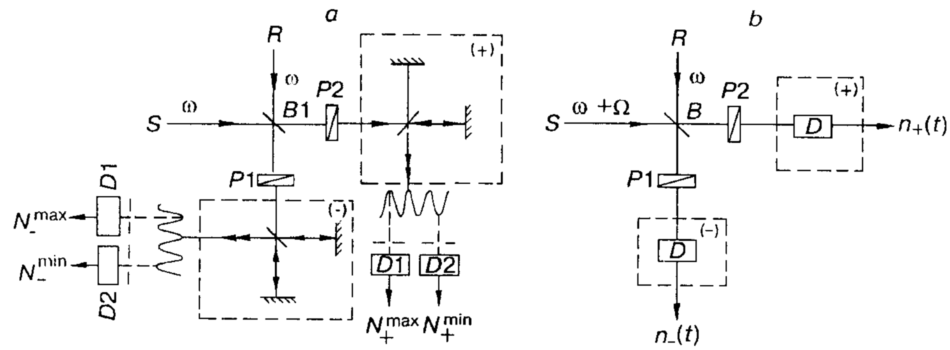

Рис. 1. Оптическая часть эксперимента по измерению корреляционных функций первого (*a*) и второго (*b*) порядков

чения, формируемые на выходах $P1$ и $P2$, поступали соответственно на каналы (+) и (−) интерферометра.

Корреляционная функция первого порядка регистрировалась (рис. 1, *a*) как видность V интерференционной картины, формируемой на выходе интерферометра. Процесс измерений заключался в следующем. Для однозначного соответствия $G^{(1,\,1)}$ и V интенсивности излучений в обоих плечах каналов (+) и (−) устанавливались одинаковыми. Затем производилось статистическое усреднение фотоотсчетов, фиксируемых за время выборки $T = 1$ мкс фотодетекторами $D1$ и $D2$ соответственно в максимуме и минимуме интерференционной картины, и определялись величины N^{max} и N^{min}. Эти значения использовались при вычислении корреляционной функции первого порядка:

$$G_{\pm}^{(1,\,1)} = V = \frac{N_{\pm}^{max} - N_{\pm}^{min}}{N_{\pm}^{max} + N_{\pm}^{min}}\, W, \tag{11}$$

где параметр W определяется в виде

$$W = \frac{\pi\delta/\Lambda}{\sin(\pi\delta/\Lambda)}. \tag{12}$$

Здесь Λ — пространственный период интерференционной картины, определяемый геометрией эксперимента; δ — ширина щелевой апертуры, устанавливаемой перед фотодетектором. В ходе экспериментов их значения были равны $\Lambda \approx 1$ и $\delta \approx 0{,}5$ мм.

При измерении корреляционной функции второго порядка (рис. 1, *b*) частота одного из полей сдвигалась на величину $\Omega = 25$ кГц и за время выборки $T \ll 1/\Omega$ детектировалось число фотонов $n(t,\, T)$ в обоих каналах интерферометра. Корреляционная функция второго порядка из таких выборок фотоотсчетов получалась использованием временной корреляции с сигналом $S(t)$, имеющим фиксированные фазу и частоту Ω, т. е.

$$G(\tau) = \langle S(t)n(t+\tau,\, T)\rangle \sim \langle S(t)I(t+\tau)\rangle, \tag{13}$$

где

$$I(t) = I_S + I_R + 2\sqrt{I_S I_R}\cos(\Omega t + \Delta\varphi), \tag{14}$$

$\Delta\varphi$ — разность оптических фаз между ними. В качестве сигнала $S(t)$ использовалась последовательность δ-импульсов, синхронная с несмещенными

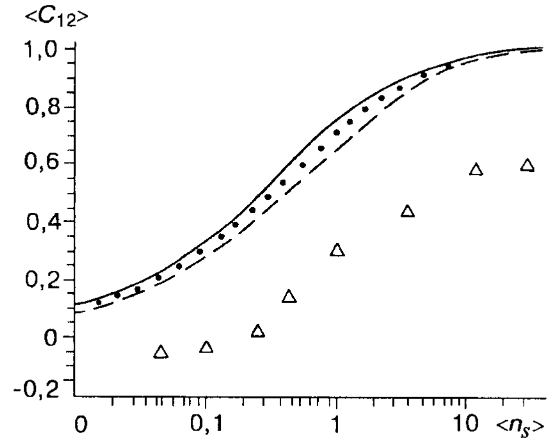

Рис. 2. Измеренные средние значения оператора разности фаз (Δ) для разных средних чисел фотонов в сигнальном поле при $\langle n_R \rangle = 3$, а также графики, соответствующие средним значениям операторов:
Сусскинда и Глоговера (сплошная кривая), Пегга и Барнетта (штриховая), Манделя и др. (пунктирная)

биениями на частоте Ω. При обработке фотоотсчетов из последовательно полученных M выборок корреляционная функция определялась в виде [18]

$$G_{\pm}^{(2,\,2)} = G_m = \sum_{k=0}^{(M/q)-1} n_{kq+m}, \tag{15}$$

где величина $q = 1/\Omega T$ определяет количество выборок на период модуляции. Выражение (15) представляет собой просто отбор из статистического процесса регистрации потока фотонов, и любое m-е значение G_m есть сумма чисел фотоотсчетов с интервалом q и сдвигом m всей последовательности выборок. Время выборки коррелятора составляло $T = 1$ мкс, соответствуя 40 отсчетам на периоде биений. Коррелятор был реализован на модулях памяти в стандарте КАМАК, запись в которые производилась синхронно с реперными импульсами сигнала $S(t)$. Накопленные наборы передавались для обработки в компьютер.

Полученные таким образом значения $G_{\pm}^{(1,\,1)}$ и $G_{\pm}^{(2,\,2)}$ использовались для вычисления среднего значения оператора $\langle C_{12} \rangle$ при помощи соотношения (10). На рис. 2 показаны средние значения оператора разности фаз, полученные при разных средних значениях фотонов ($\langle n_S \rangle$), детектируемых за время выборки T в сигнальном поле. Интенсивность опорного поля при этом соответствовала $\langle n_R \rangle = 3$. На рисунке приведены графики, соответствующие другим формализмам представления фазовых операторов. Наблюдаемое отличие измеренных значений $\langle C_{12} \rangle$ обусловлено неодинаковой интенсивностью сигнального и опорного полей, а также фазовыми сдвигами при прохождении световых пучков через светоделитель $B1$ и отражении в нем. Однако сама зависимость среднего значения оператора разности фаз от среднего числа фотонов хорошо согласуется с результатами [7, 10, 14].

Таким образом, проведенные статистические эксперименты с унитарным преобразованием двухмодового когерентного поля показали принципиальную возможность определения среднего значения оператора разности фаз по измерениям корреляционных функций первого и второго порядков. Данный метод может быть применен также к другим полям, что дает возможность экспериментальной проверки различных формализмов представления фазы квантового поля без изменения принципиальной схемы эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Godzinski Z.** Investigations of light interference at extremely low intensities // Phys. Lett. A. 1991. **153**, N 6, 7. P. 291.
2. **Okoshi T., Hirose A., Kimura K.** A simple experiment elucidating the duality of light as wave and photon // Opt. Commun. 1989. **72**, N 1, 2. P. 7.
3. **Hu Y., Marathay A. S., Idell P. S.** Object reconstruction with intensity correlations; signal-to-noise ratio calculation // Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 1990. **1351**. P. 600.
4. **Ayers G. R., Dainty J. C., Northcott M. J.** Photon limited imaging through turbulence // Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 1987. **808**. P. 19.
5. **Schulz T. J., Snyder D. Z.** Image recovery from correlations // JOSA. 1992. **9**, N 6. P. 1266.
6. **Carruthers P., Nieto M.** The variable phase-angle in quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1968. **40**, N 2. P. 411.
7. **Gerhardt H., Buchler U., Litfin G.** Phase measurement of a microscopic radiation field // Phys. Lett. 1974. **49A**, N 2. P. 119.
8. **Nieto M.** Phase-difference operator analysis of microscopic radiation-field measurements // Phys. Lett. 1977. **60A**, N 5. P. 401.
9. **Mendas I., Popovic D. B.** Number-phase uncertainty product for displased number states // Phys. Rev. A. 1994. **50**, N 2. P. 947.
10. **Pegg D. T., Barnett S. M.** Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field // Phys. Rev. 1989. **39**, N 4. P. 1665.
11. **Gerry C. C., Urbanski K. E.** Hermitian phase-difference operator analysis of microscopic radiation-field measurements // Phys. Rev. A. 1990. **42**, N 1. P. 662.
12. **Lynch R.** Fluctuation of the Barnett — Pegg phase operator in a coherent state // Phys. Rev. A. 1990. **41**, N 5. P. 2841.
13. **Noh J. W., Fougeres A., Mandel L.** Measurement of the quantum phase by photon counting // Phys. Rev. Lett. 1991. **67**, N 11. P. 1426.
14. **Noh J. W., Fougeres A., Mandel L.** Further investigation of the operationally defined quantum phase // Phys. Rev. A. 1992. **46**, N 5. P. 2840.
15. **Noh J. W., Fougeres A., Mandel L.** Operational approach to the phase of a quantum field // Phys. Rev. A. 1992. **45**, N 1. P. 424.
16. **Дерюгин И. А., Вишенский А. А., Курашов В. Н.** Некоторые свойства фазовых операторов в квантовой оптике // Изв. вузов. Физика. 1972. № 12. С. 44.
17. **Вишенский А. А., Дерюгин И. А., Курашов В. Н.** К вопросу о фазовых измерениях в квантовой оптике // Оптика и спектроскопия. 1975. **38**, вып. 4. С. 751.
18. **Walker J. S.** Phase measurement by photon correlation interferometry // Opt. Acta. 1986. **33**, N 1. P. 45.

Поступила в редакцию 28 июня 1996 г.