

УДК 681.3.08

Т. А. Алиев, Н. Ф. Мусаева

(Баку, Азербайджан)

АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСПЕРСИИ И ПОГРЕШНОСТЕЙ,
ВЫЗЫВАЕМЫХ ПОМЕХАМИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Разработан алгоритм определения погрешностей, вносимых помехами в произведение отсчетов случайных сигналов при вычислении авто- и взаимно корреляционных функций, и показано, что их сумма с учетом знаков образует общую погрешность полученных оценок. Предложена формула, позволяющая исключить величину дисперсии помехи от общей погрешности оценок корреляционных функций, и показано, что знание дисперсий помех имеет важное значение, так как они довольно часто в определенной степени характеризуют состояние исследуемого объекта.

Введение. В настоящее время в различных областях науки и техники при решении разнообразных задач с применением вероятностно-статистических методов предполагается, что реализации $g(t)$, $\eta(t)$ полезных сигналов $x(t)$, $y(t)$ являются случайными стационарными эргодичными функциями с нормальным законом распределения и интервал T выбран достаточно большим, вследствие чего, вместо самих корреляционных функций $R_{xx}(\mu)$, $R_{yy}(\mu)$, можно пользоваться их оценками $R_{gg}(\mu)$, $R_{g\eta}(\mu)$ [1—3].

Однако реализации $g(t)$, $\eta(t)$, как правило, состоят из смеси полезных сигналов $x(t)$, $y(t)$ и помех $\varepsilon(t)$, $\varphi(t)$, в результате чего оценки $R_{gg}(\mu)$, $R_{g\eta}(\mu)$ на практике получаются с ощутимыми погрешностями $\Lambda_{xx}(\mu)$, $\Lambda_{yy}(\mu)$, что препятствует, а иногда и делает невозможным применение указанных методов.

1. **Постановка задачи.** Проведенные исследования показали, что для устранения влияния помех на результаты решения многих задач с применением вероятностно-статистических методов необходимо определение дисперсий $D(\varepsilon)$, $D(\varphi)$ помех $\varepsilon(t)$, $\varphi(t)$ и соответствующих погрешностей от этих помех [1—3]. Анализ причин их формирования в различных областях техники показывает, что они в определенной степени характеризуют состояние исследуемых объектов и одновременно с устранением влияния помех $\varepsilon(t)$, $\varphi(t)$ на оценки статистических характеристик $R_{xx}(\mu)$, $R_{yy}(\mu)$ полезных сигналов $x(t)$, $y(t)$ целесообразно определить также соответствующие оценки дисперсий $D(\varepsilon)$, $D(\varphi)$ самих помех $\varepsilon(t)$, $\varphi(t)$. При этом особо важное значение имеет определение погрешностей $\Delta\lambda(\mu)$ от помех произведений $g_\nu g_{\nu+\mu}$, $g_\nu \eta_{\nu+\mu}$ соответствующих отсчетов реализаций $g(t)$, $\eta(t)$. В данной работе рассматриваются возможные варианты решения этих задач.

2. **Алгоритм определения оценок дисперсий помехи случайных сигналов.** Известно, что для дискретизированного стационарного центрированного случайного сигнала $\overset{\circ}{g}$, с нормальным законом распределения, состоящим из сигнала $\overset{\circ}{x}$ и помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}$, с математическими ожиданиями $m_x \approx 0$, $m_\varepsilon \approx 0$, при вычислении оценок корреляционных функций используется следующая формула:

$$R_{g\overset{\circ}{g}}(\mu) = (1/n) \sum_{\nu=1}^n \overset{\circ}{g}_\nu \overset{\circ}{g}_{\nu+\mu} = (1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{x}_\nu + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu)(\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}) =$$

$$= (1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}) = R_{xx}^{\circ}(\mu) + \Lambda_{xx}^{\circ}(\mu), \quad (2.1)$$

где

$$\Lambda_{xx}^{\circ}(\mu) = (1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}),$$

$\overset{\circ}{g}_\nu, \overset{\circ}{x}_\nu, \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu$ — центрированные значения дискретизированных сигналов $g_\nu, x_\nu, \varepsilon_\nu$ ($\overset{\circ}{g}_\nu = g_\nu - m_g, \overset{\circ}{x}_\nu = x_\nu - m_x, \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu = \varepsilon_\nu - m_\varepsilon$; m_g, m_x, m_ε — математические ожидания сигналов $g(t), x(t), \varepsilon(t)$).

Учитывая, что $\overset{\circ}{\varepsilon}_\nu$ и $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}$ при $\mu \neq 0$ не коррелируют между собой:

$$(1/n) \sum_{\nu=1}^n \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} \approx 0 \quad (2.2)$$

— и средняя величина квадратов значений помехи равна оценке дисперсии $D(\varepsilon)$ помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}_\nu$:

$$(1/n) \sum_{\nu=1}^n \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu = D(\varepsilon), \quad (2.3)$$

равенство (2.1) при $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ можно соответственно записать в виде

$$R_{gg}^{\circ}(\mu = 0) = (1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{x}_\nu + \overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{x}_\nu) + D(\varepsilon), \quad (2.4)$$

$$R_{gg}^{\circ}(\mu \neq 0) = (1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu}). \quad (2.5)$$

Эти оценки при $\mu = 0, \mu = \Delta t, \mu = 2\Delta t$ и шаге дискретизации $\Delta t \leq [1/(4 \div 6)] f_c$ становятся близкими величинами, и их разность оказывается соизмеримой с шагом квантования по уровню Δx , который определяется по разрешающей способности измерительного прибора, например, для аналого-цифрового преобразователя (АЦП) она равна весу младшего разряда [1—3]. При стремлении времени наблюдения T к бесконечности и шага дискретизации Δt к нулю оценки $R_{xx}^{\circ}(\mu = 0\Delta t), R_{xx}^{\circ}(\mu = 1\Delta t), R_{xx}^{\circ}(\mu = 2\Delta t)$ оказываются настолько близкими величинами, что можно считать справедливым неравенство

$$\begin{aligned} & [R_{xx}^{\circ}(\mu = 0\Delta t) - R_{xx}^{\circ}(\mu = 1\Delta t)] - \\ & - [R_{xx}^{\circ}(\mu = 1\Delta t) - R_{xx}^{\circ}(\mu = 2\Delta t)] \ll \Delta x, \end{aligned} \quad (2.6)$$

которое представим в виде

$$R_{xx}^{\circ}(\mu = 0\Delta t) - R_{xx}^{\circ}(\mu = 1\Delta t) \approx R_{xx}^{\circ}(\mu = 1\Delta t) - R_{xx}^{\circ}(\mu = 2\Delta t). \quad (2.7)$$

Справедливость этого равенства была подтверждена многочисленными вычислительными экспериментами, некоторые их результаты приведены в табл. 1, 2 и на рис. 1, 2 и описаны ниже. Эти эксперименты, прежде всего, показали, что для непрерывных медленно протекающих технологических процессов, у которых преобладают низкочастотные спектры ($0,01 \div 10$ Гц), при

Таблица 1

Автокорреляционные функции сигнала с шагом дискретизации $\Delta t = \pi/100$

| $\mu = i\Delta t$ | $R_{xx}^{\circ\circ}(\mu)$ | $R_{xx}(\mu)$ | $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$ | $R_{gg}(\mu)$ | $n^+(\mu)$ | $n^-(\mu)$ | $\Lambda^*(\mu)$ | $R_{xx}^{\bullet}(\mu)$ | $\gamma(\mu), \%$ | $\gamma(\mu)_{\text{ост}}, \%$ |
|-------------------|----------------------------|---------------|----------------------------|---------------|------------|------------|------------------|-------------------------|-------------------|--------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 000 | 800,000 | 800,000 | 895,585 | 895,585 | 1000 | 0 | 53,861 | 798,264 | 11,948 | -0,217 |
| 001 | 799,606 | 799,606 | 845,088 | 848,374 | 939 | 61 | 47,290 | 797,798 | 5,688 | -0,226 |
| 002 | 798,422 | 798,422 | 843,527 | 850,208 | 932 | 68 | 46,536 | 796,992 | 5,649 | -0,179 |
| 003 | 796,450 | 796,450 | 842,146 | 845,290 | 931 | 69 | 46,428 | 795,718 | 5,737 | -0,092 |
| 004 | 793,692 | 793,692 | 842,120 | 846,196 | 931 | 69 | 46,428 | 795,692 | 6,102 | 0,252 |
| 005 | 790,151 | 790,151 | 835,480 | 843,342 | 920 | 80 | 45,243 | 790,237 | 5,737 | 0,011 |
| 006 | 785,830 | 785,830 | 833,914 | 840,529 | 916 | 84 | 44,812 | 789,102 | 6,119 | 0,416 |
| 007 | 780,734 | 780,734 | 825,627 | 835,560 | 913 | 87 | 44,489 | 781,138 | 5,750 | 0,052 |
| 008 | 774,867 | 774,867 | 820,051 | 829,466 | 907 | 93 | 43,843 | 776,208 | 5,831 | 0,173 |
| 009 | 768,235 | 768,235 | 817,009 | 826,259 | 897 | 103 | 42,765 | 774,243 | 6,349 | 0,782 |
| 010 | 760,846 | 760,846 | 805,092 | 812,939 | 889 | 111 | 41,904 | 763,189 | 5,815 | 0,308 |
| 011 | 752,705 | 752,705 | 800,686 | 810,223 | 885 | 115 | 41,473 | 759,214 | 6,375 | 0,865 |
| 012 | 743,821 | 743,821 | 786,393 | 795,575 | 871 | 129 | 39,965 | 746,429 | 5,723 | 0,351 |
| 013 | 734,204 | 734,204 | 777,798 | 788,506 | 867 | 133 | 39,534 | 738,265 | 5,936 | 0,553 |
| 014 | 723,862 | 723,862 | 766,409 | 775,947 | 857 | 143 | 38,456 | 727,953 | 5,878 | 0,565 |
| 015 | 712,805 | 712,805 | 752,475 | 764,005 | 847 | 153 | 37,379 | 715,096 | 5,565 | 0,321 |
| 016 | 701,046 | 701,046 | 740,189 | 752,144 | 833 | 167 | 35,871 | 704,318 | 5,583 | 0,467 |
| 017 | 688,594 | 688,594 | 729,430 | 739,127 | 823 | 177 | 34,794 | 694,636 | 5,930 | 0,877 |
| 018 | 675,463 | 675,463 | 713,568 | 725,526 | 815 | 185 | 33,932 | 679,636 | 5,641 | 0,618 |
| 019 | 661,665 | 661,665 | 698,938 | 714,610 | 807 | 193 | 33,070 | 665,868 | 5,633 | 0,635 |
| 020 | 647,214 | 647,214 | 686,062 | 701,920 | 797 | 203 | 31,993 | 654,068 | 6,002 | 1,059 |

соотношении частоты дискретизации f_d и частоты среза f_c : $f_d \geq (4 + 6)f_c$ — неравенство (2.6) и равенство (2.7) обычно выполняются. Например, для таких технологических параметров, как температура, давление, расход нефтеперерабатывающих и нефтехимических процессов при $f_d \geq 100$ Гц, и для сигналов биологических процессов, таких как электроэнцефалограммы и электрокардиограммы при частоте дискретизации $f_d \geq (2 + 3)$ кГц, эти равенства также выполняются. Естественно, что при определении дисперсии помехи $D(\epsilon)$ более высокочастотных процессов необходимо выбирать такой шаг дискретизации по времени Δt , т. е. частоту дискретизации f_d , чтобы выполнялось равенство (2.7) [1—3].

При выполнении выражений (2.6), (2.7), учитывая, что между полезным сигналом $\hat{x}(t)$ и помехой $\hat{\epsilon}(t)$ полностью отсутствует корреляция, т. е.

$$(1/n) \sum_{\nu=1}^n \hat{x}_{\nu} \hat{\epsilon}_{\nu} \approx 0, \quad (1/n) \sum_{\nu=1}^n \hat{x}_{\nu} \hat{\epsilon}_{\nu+1} \approx 0, \quad (1/n) \sum_{\nu=1}^n \hat{x}_{\nu} \hat{\epsilon}_{\nu+2} \approx 0, \quad (2.8)$$

Таблица 2

Взаимно корреляционные функции двух сигналов с шагом дискретизации $\Delta t = \pi/200$

| $\mu = i\Delta t$ | $R_{xy}^{\circ\circ}(\mu)$ | $R_{xy}(\mu)$ | $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$ | $R_{gg}(\mu)$ | $n^+(\mu)$ | $n^-(\mu)$ | $\Lambda^*(\mu)$ | $R_{xy}^{\circ\circ}(\mu)$ | $\gamma(\mu), \%$ | $\gamma(\mu)_{\text{ост}}, \%$ |
|-------------------|----------------------------|---------------|----------------------------|---------------|------------|------------|------------------|----------------------------|-------------------|--------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 0 | 402,673 | 402,673 | 455,207 | 465,952 | 818 | 382 | 51,768 | 403,439 | 13,046 | 0,190 |
| 1 | 401,555 | 401,555 | 457,145 | 467,006 | 818 | 382 | 51,988 | 405,157 | 13,844 | 0,897 |
| 2 | 400,337 | 400,337 | 457,293 | 467,216 | 820 | 380 | 52,005 | 405,289 | 14,227 | 1,237 |
| 3 | 399,021 | 399,021 | 451,975 | 465,137 | 820 | 380 | 51,400 | 400,575 | 13,271 | 0,389 |
| 4 | 397,607 | 397,607 | 452,660 | 466,157 | 824 | 376 | 51,478 | 401,182 | 13,846 | 0,899 |
| 5 | 396,094 | 396,094 | 450,546 | 464,698 | 818 | 382 | 51,237 | 399,308 | 13,747 | 0,812 |
| 6 | 394,485 | 394,485 | 452,234 | 463,852 | 820 | 380 | 51,429 | 400,804 | 14,639 | 1,602 |
| 7 | 392,779 | 392,779 | 446,830 | 460,318 | 822 | 378 | 50,815 | 396,015 | 13,761 | 0,824 |
| 8 | 390,977 | 390,977 | 446,639 | 459,057 | 818 | 382 | 50,793 | 395,846 | 14,237 | 1,245 |
| 9 | 389,081 | 389,081 | 446,859 | 460,670 | 814 | 386 | 50,818 | 396,041 | 14,850 | 1,789 |
| 10 | 387,089 | 387,089 | 443,380 | 457,538 | 814 | 386 | 50,423 | 392,957 | 14,542 | 1,516 |
| 11 | 385,004 | 385,004 | 439,536 | 453,097 | 814 | 386 | 49,985 | 389,550 | 14,164 | 1,181 |
| 12 | 382,826 | 382,826 | 439,598 | 453,331 | 810 | 390 | 49,992 | 389,606 | 14,830 | 1,771 |
| 13 | 380,556 | 380,556 | 433,300 | 445,889 | 808 | 392 | 49,276 | 384,024 | 13,860 | 0,911 |
| 14 | 378,194 | 378,194 | 431,805 | 441,203 | 812 | 388 | 49,106 | 382,699 | 14,175 | 1,191 |
| 15 | 375,742 | 375,742 | 431,633 | 440,708 | 808 | 392 | 49,087 | 382,547 | 14,875 | 1,811 |
| 16 | 373,200 | 373,200 | 427,396 | 436,118 | 808 | 392 | 48,605 | 378,791 | 14,522 | 1,498 |
| 17 | 370,569 | 370,569 | 425,811 | 431,892 | 808 | 392 | 48,425 | 377,387 | 14,907 | 1,840 |
| 18 | 367,850 | 367,850 | 420,463 | 425,318 | 810 | 390 | 47,816 | 372,646 | 14,303 | 1,304 |
| 19 | 365,043 | 365,043 | 419,078 | 421,930 | 806 | 394 | 47,659 | 371,419 | 14,802 | 1,747 |
| 20 | 362,151 | 362,151 | 416,745 | 418,117 | 798 | 402 | 47,394 | 369,351 | 15,075 | 1,988 |

и выполняются равенства (2.2), (2.3), можно написать:

$$\left. \begin{aligned} R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 0) &\approx R_{xx}^{\circ\circ}(\mu = 0) + D(\varepsilon), \\ R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 1) &\approx R_{xx}^{\circ\circ}(\mu = 1), \\ R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 2) &\approx R_{xx}^{\circ\circ}(\mu = 2). \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Следовательно, с учетом (2.7), (2.9) имеем

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) &\approx R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 0) + R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 2) - R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 1) - R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 1) = \\ &= R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 0) + R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 2) - 2R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 1), \end{aligned} \quad (2.10)$$

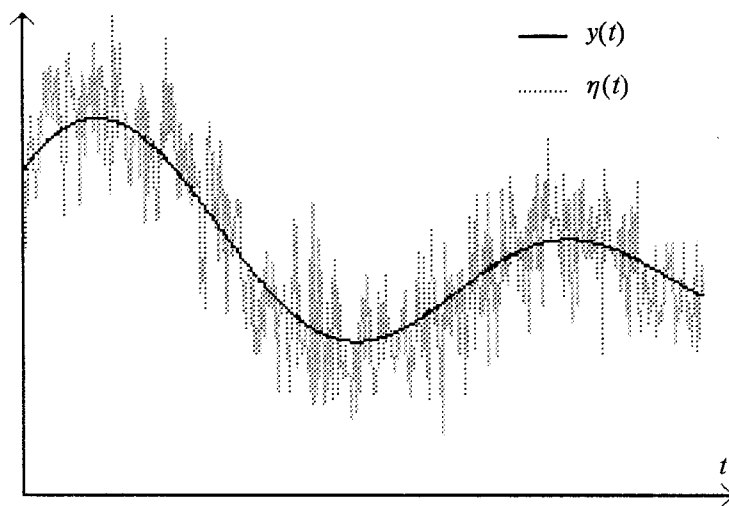
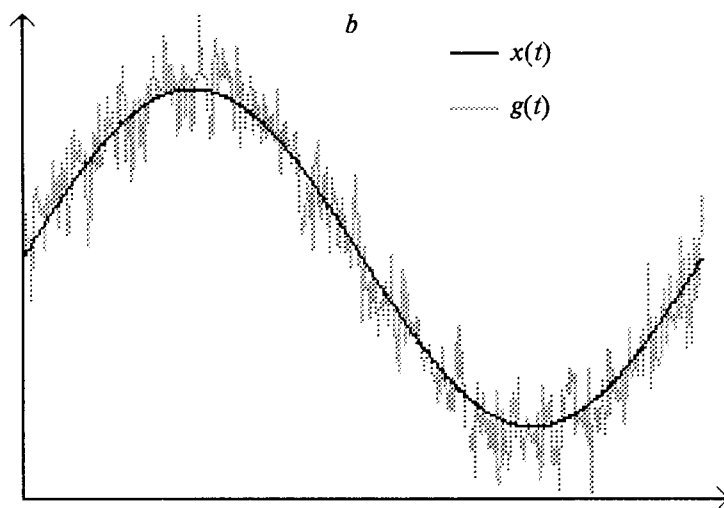
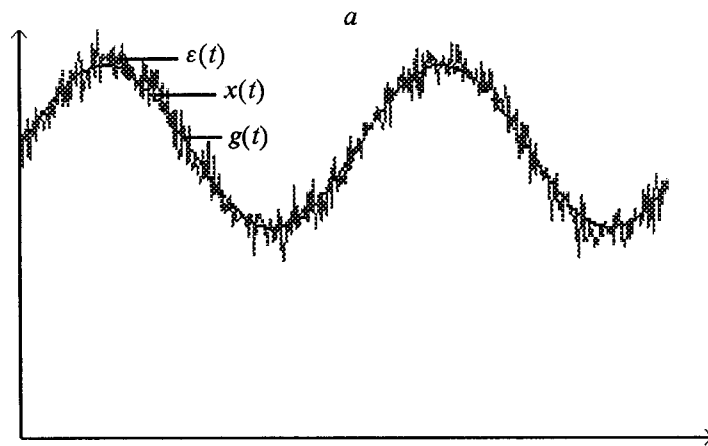


Рис. 1

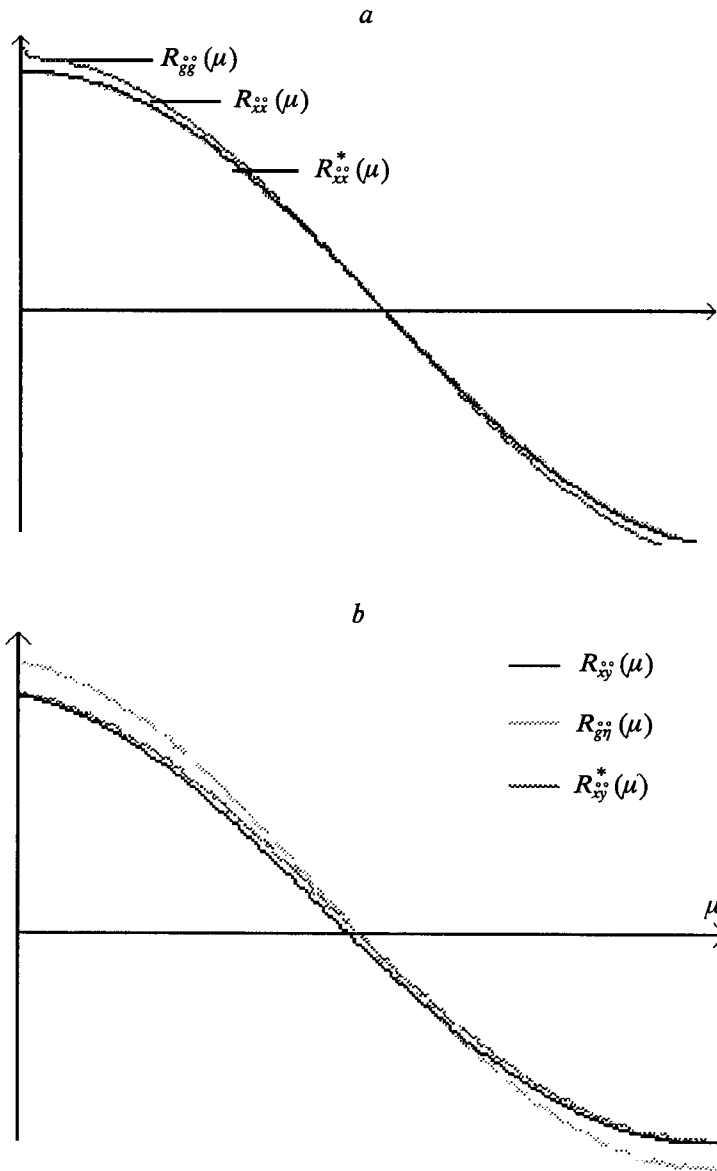


Рис. 2

согласно которому при выполнении условий (2.2), (2.3), (2.7)–(2.9) выражение для определения оценки дисперсии $D(\varepsilon)$ помехи ε_v можно представить в виде

$$D(\varepsilon) = (1/n) \sum_{v=1}^n (\overset{\circ}{g}_v \overset{\circ}{g}_v + \overset{\circ}{g}_v \overset{\circ}{g}_{v+2} - 2\overset{\circ}{g}_v \overset{\circ}{g}_{v+1}). \quad (2.11)$$

Выражения (2.9)–(2.11) показывают, что в тех случаях, когда выполняется условие (2.8), помеха $\varepsilon(t)$ оказывает влияние на результат обработки лишь только при $\mu = 0$, и погрешность оценки $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 0)$ при этом состоит из дисперсии помехи $\varepsilon(t)$.

Теперь рассмотрим более общий случай, когда условия (2.8) не выполняются. Для этого определим влияние помехи $\varepsilon(t)$ на положительные и отрица-

тельные произведения отсчетов $\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{v+\mu}$ при вычислении оценок $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu \neq 0)$ по выражению (2.5). Если для положительных произведений $\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{v+\mu}$ принять индексы суммирования $i = i_1, \dots, i_{n^+(\mu)}$, где $n^+(\mu)$ — количество положительных произведений при временном сдвиге μ , а для отрицательных произведений $\overset{\circ}{g}_v \overset{\circ}{g}_{v+\mu}$ принять индексы $j = j_1, \dots, j_{n^-(\mu)}$, где $n^-(\mu)$ — количество отрицательных произведений при временном сдвиге μ , то (2.5) представляется в виде [4, 5]

$$R_{gg}^{\circ\circ}(\mu \neq 0) = (1/n) \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(\mu)}} (\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_{i+\mu} + \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_{i+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{x}_{i+\mu}) + \\ + (1/n) \sum_{j=j_1}^{j_{n^-(\mu)}} (\overset{\circ}{x}_j \overset{\circ}{x}_{j+\mu} + \overset{\circ}{x}_j \overset{\circ}{\varepsilon}_{j+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_j \overset{\circ}{x}_{j+\mu}). \quad (2.12)$$

С учетом принятых индексов суммирования можно аналогичным образом написать выражение для оценок корреляционной функции $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$ при $\mu = 1$, $\mu = 2$.

При этом, произведя в первой сумме правой части каждого из этих равенств суммирование по всем индексам, которые соответствуют индексам положительных произведений $\overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{v+\mu}$, а во второй — по всем индексам отрицательных произведений $\overset{\circ}{g}_v \overset{\circ}{g}_{v+\mu}$, принимая приближенные равенства

$$[1/n^+(0)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(0)}} (\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_i + \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{x}_i) \approx [1/n^+(1)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(1)}} (\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_{i+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{x}_{i+1}) \approx \\ \approx [1/n^+(2)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(2)}} (\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_{i+2} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{x}_{i+2}),$$

которые выполняются для реальных сигналов при достаточно больших значениях $n^+(\mu)$, а также

$$[1/n^+(0)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(0)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_i \approx (1/n) \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_i = D(\varepsilon)$$

и учитывая равенство (2.7), можно записать соотношения

$$[1/n^+(0)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(0)}} (\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_i + \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_i + \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{x}_i) - [1/n^+(1)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(1)}} (\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_{i+1} + \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_{i+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{x}_{i+1}) \approx \\ \approx [1/n^+(1)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(1)}} (\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_{i+1} + \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_{i+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{x}_{i+1}) - \\ - [1/n^+(2)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(2)}} (\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_{i+2} + \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{\varepsilon}_{i+2} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i \overset{\circ}{x}_{i+2})$$

или

$$[1/n^+(0)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(0)}} \overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_i - D(\varepsilon) - [1/n^+(1)] \sum_{i=i_1}^{i_{n^+(1)}} \overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{i+1} \approx$$

$$\approx [1/n^+(1)] \sum_{i=i_1}^{i_n^+(1)} \overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{i+1} - [1/n^+(2)] \sum_{i=i_1}^{i_n^+(2)} \overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{i+2}. \quad (2.13)$$

Из выражения (2.13) нетрудно определить дисперсию $D(\varepsilon)$ помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$ по формуле

$$D(\varepsilon) = [1/n^+(0)] \sum_{i=i_1}^{i_n^+(0)} \overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_i + [1/n^+(2)] \sum_{i=i_1}^{i_n^+(2)} \overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{i+2} - [2/n^+(1)] \sum_{i=i_1}^{i_n^+(1)} \overset{\circ}{g}_i \overset{\circ}{g}_{i+1}, \quad (2.14)$$

которая показывает, что когда имеет место наиболее сложный случай, т. е. не выполняются условия (2.8), также имеется возможность определения дисперсии помехи $D(\varepsilon)$.

В заключение следует отметить, что вычисление оценки дисперсии помехи отличается от определения оценки корреляционной функции тем, что при этом так выбирается шаг дискретизации Δt , чтобы выполнялись соотношения (2.6), (2.7). Современная измерительная аппаратура позволяет осуществить кодирование сигналов с частотой более 10 МГц, благодаря чему эти соотношения выполняются для достаточно широкого класса случайных процессов.

3. Алгоритм определения погрешностей, вызываемых помехами. Известно, что при вычислении оценок корреляционных функций с использованием традиционных алгоритмов имеют место следующие равенства [5]:

$$R_{xx}(\mu) = R_{gg}(\mu), \quad R_{xx}^{\circ\circ}(\mu) = R_{gg}^{\circ\circ}(\mu), \quad R_{gg}^{\circ\circ}(\mu) = R_{gg}(\mu),$$

где

$$R_{gg}(\mu) = (1/n) \sum_{\nu=1}^n g_{\nu} g_{\nu+\mu} - m_g^2 = (1/n) \sum_{\nu=1}^n (x_{\nu} + \varepsilon_{\nu})(x_{\nu+\mu} + \varepsilon_{\nu+\mu}) - (m_x + m_{\varepsilon})^2.$$

Однако на практике вследствие многих известных факторов эти равенства не выполняются, и в реальности имеют место соотношения

$$R_{gg}(\mu) - R_{xx}(\mu) = \Lambda_1(\mu), \quad (3.1)$$

$$R_{gg}^{\circ\circ}(\mu) - R_{xx}^{\circ\circ}(\mu) = \Lambda_2(\mu), \quad (3.2)$$

$$R_{gg}(\mu=0) - R_{xx}(\mu=0) = \Lambda_1(\mu=0) = \Lambda_2(\mu=0), \quad (3.3)$$

$$|\Lambda_1(\mu \neq 0) - \Lambda_2(\mu \neq 0)| = \lambda(\mu \neq 0), \quad (3.4)$$

$$|R_{gg}(\mu) - R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)| = \lambda(\mu). \quad (3.5)$$

Основной причиной появления этих равенств является то, что значение корреляции между полезным сигналом $\overset{\circ}{x}(t)$ и помехой $\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$ отличается от нуля, и это приводит к погрешностям, содержащимся в каждом отдельном произведении $\overset{\circ}{g}_{\nu} \overset{\circ}{g}_{\nu+\mu}$, от влияния помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}$. Величину погрешности в одном отдельном произведении $\overset{\circ}{g}_{\nu} \overset{\circ}{g}_{\nu+\mu}$ назовем микропогрешностью и обозначим через $\Delta \lambda(\mu)$.

Рассмотрим возможность определения общей погрешности оценок $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{gg}(\mu)$ путем вычисления суммы микропогрешностей положительных и отрицательных произведений. Для этого в первую очередь следует выявить влияние помехи на появление микропогрешностей в произведениях $g_{\nu} g_{\nu+\mu}$, $x_{\nu} x_{\nu+\mu}$ и $\overset{\circ}{g}_{\nu} \overset{\circ}{g}_{\nu+\mu}$, $\overset{\circ}{x}_{\nu} \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu}$, используя выражения (3.1), (3.2):

$$\Lambda_1(\mu) = (1/n) \sum_{\nu=1}^n g_{\nu} g_{\nu+\mu} - m_g^2 - \left[(1/n) \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} x_{\nu+\mu} - m_x^2 \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= (1/n) \sum_{\nu=1}^n (x_{\nu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu})(x_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}) - (m_x + m_{\varepsilon})^2 - \\
&- \left[(1/n) \sum_{\nu=1}^n x_{\nu}x_{\nu+\mu} - m_x^2 \right] = (1/n) \sum_{\nu=1}^n [(\overset{\circ}{x}_{\nu} + m_x + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu} + m_{\varepsilon}) \times \\
&\times (\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + m_x + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + m_{\varepsilon}) - (\overset{\circ}{x}_{\nu} + m_x)(\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + m_x)].
\end{aligned}$$

С учетом того, что для стационарных случайных процессов с нормальным законом распределения математические ожидания произведений $\overset{\circ}{x}_{\nu}m_{\varepsilon}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}m_{\varepsilon}$, $\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu}m_{\varepsilon}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}m_{\varepsilon}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}m_x$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}m_x$, $m_{\varepsilon}m_x$ можно принять равными нулю, величина погрешности нецентрированного сигнала представляется в виде

$$\Lambda_1(\mu) = (1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{x}_{\nu}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}). \quad (3.6)$$

Аналогично определяется погрешность центрированного сигнала:

$$\begin{aligned}
\Lambda_2(\mu) &= (1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{g}_{\nu}\overset{\circ}{g}_{\nu+\mu} - \overset{\circ}{x}_{\nu}\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu}) = (1/n) \sum_{\nu=1}^n [(\overset{\circ}{x}_{\nu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu})(\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}) - \\
&- \overset{\circ}{x}_{\nu}\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu}] = (1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{x}_{\nu}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

С учетом вышепринятых индексов суммирования равенство (3.7) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\Lambda_2(\mu) &= (1/n) \sum_{i=i_1}^{i_n^+(\mu)} (\overset{\circ}{x}_i\overset{\circ}{\varepsilon}_{i+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i\overset{\circ}{x}_{i+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i\overset{\circ}{\varepsilon}_{i+\mu}) - \\
&- (1/n) \sum_{j=j_1}^{j_n^-(\mu)} (\overset{\circ}{x}_j\overset{\circ}{\varepsilon}_{j+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_j\overset{\circ}{x}_{j+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_j\overset{\circ}{\varepsilon}_{j+\mu}).
\end{aligned}$$

При этом равенство (3.5) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\lambda(\mu = 1) &= |R_{gg}(\mu = 1) - R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu = 1)| = \\
&= |R_{xx}(\mu = 1) + \Lambda_1(\mu = 1) - R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu = 1) - \Lambda_2(\mu = 1)|.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $R_{xx}(\mu = 1) = R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu = 1)$, имеем

$$\begin{aligned}
\lambda(\mu = 1) &= |\Lambda_1(\mu = 1) - \Lambda_2(\mu = 1)| = \left| (1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{x}_{\nu}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}\overset{\circ}{x}_{\nu+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+1}) - \right. \\
&- \left. (1/n) \sum_{i=i_1}^{i_n^+(\mu)} (\overset{\circ}{x}_i\overset{\circ}{\varepsilon}_{i+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i\overset{\circ}{x}_{i+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i\overset{\circ}{\varepsilon}_{i+1}) + (1/n) \sum_{j=j_1}^{j_n^-(\mu)} (\overset{\circ}{x}_j\overset{\circ}{\varepsilon}_{j+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_j\overset{\circ}{x}_{j+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_j\overset{\circ}{\varepsilon}_{j+1}) \right|.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$(1/n) \sum_{\nu=1}^n (\overset{\circ}{x}_{\nu}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}\overset{\circ}{x}_{\nu+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+1}) - (1/n) \sum_{i=i_1}^{i_n^+(\mu)} (\overset{\circ}{x}_i\overset{\circ}{\varepsilon}_{i+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i\overset{\circ}{x}_{i+1} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i\overset{\circ}{\varepsilon}_{i+1}) =$$

$$= \left| (1/n) \sum_{j=j_1}^{j_n^-(\mu)} (\dot{x}_j \dot{\varepsilon}_{j+1} + \dot{\varepsilon}_j \dot{x}_{j+1} + \dot{\varepsilon}_j \dot{\varepsilon}_{j+1}) \right|,$$

получаем

$$\lambda(\mu = 1) \approx \left| (2/n) \sum_{j=j_1}^{j_n^-(\mu)} (\dot{x}_j \dot{\varepsilon}_{j+1} + \dot{\varepsilon}_j \dot{x}_{j+1} + \dot{\varepsilon}_j \dot{\varepsilon}_{j+1}) \right|. \quad (3.8)$$

В то же время, согласно равенству (3.5), по реализациям сигнала $\dot{g}(t)$, определяя оценки $R_{\dot{g}\dot{g}}(\mu = 1)$, $R_{\dot{g}\dot{g}}^{\circ\circ}(\mu = 1)$, можно вычислить величину $|R_{\dot{g}\dot{g}}(\mu = 1) - R_{\dot{g}\dot{g}}^{\circ\circ}(\mu = 1)| = \lambda(\mu = 1)$. Таким образом, при вычислении корреляционной функции $R_{\dot{g}\dot{g}}^{\circ\circ}(\mu)$ для центрированных сигналов при $\mu = 1$ из общего количества n произведений $\dot{g}_j \dot{g}_{j+1}$ по сравнению с той же оценкой для нецентрированных сигналов определенное количество $n^-(\mu = 1)$ произведений $\dot{g}_j \dot{g}_{j+1}$ с отрицательным знаком определяет величину $\lambda(\mu = 1)$, которая по существу представляет собой сумму погрешностей этих отрицательных произведений. Тогда средняя микропогрешность $\langle \Delta \lambda(\mu = 1) \rangle$ одного отрицательного произведения определяется по формуле

$$\langle \Delta \lambda(\mu = 1) \rangle = [1/n^-(\mu = 1)] \lambda(\mu = 1). \quad (3.9)$$

Зная $\langle \Delta \lambda(\mu = 1) \rangle$, можно вычислить величину погрешности $\Lambda^*(\mu)$ оценок $R_{\dot{g}\dot{g}}^{\circ\circ}(\mu)$ при различных временных сдвигах μ между \dot{g}_ν и $\dot{g}_{\nu+\mu}$ по выражению

$$\Lambda^*(\mu) \approx [n^+(\mu) - n^-(\mu)] \langle \Delta \lambda(\mu = 1) \rangle. \quad (3.10)$$

Очевидно, что, зная среднюю величину $\overline{\dot{g}_j \dot{g}_j}$ произведений $\dot{g}_\nu \dot{g}_\nu$, просуммированных по индексам $j = j_1, \dots, j_n^-(1)$ отрицательных произведений $\dot{g}_\nu \dot{g}_{\nu+1}$, и среднюю величину микропогрешности $\langle \Delta \lambda(\mu = 1) \rangle$ произведений, можно определить величину микропогрешности $\Delta \lambda_\nu(\mu)$ каждого отдельного произведения $\dot{g}_\nu \dot{g}_{\nu+\mu}$, умножив $\langle \Delta \lambda(\mu = 1) \rangle$ на соотношение $(\dot{g}_\nu \dot{g}_{\nu+\mu} / \overline{\dot{g}_j \dot{g}_j})$, т. е.

$$\Delta \lambda_\nu(\mu) = \langle \Delta \lambda(\mu = 1) \rangle (\dot{g}_\nu \dot{g}_{\nu+\mu} / \overline{\dot{g}_j \dot{g}_j}), \quad (3.11)$$

где

$$\overline{\dot{g}_j \dot{g}_j} = [1/n^-(1)] \sum_{j=j_1}^{j_n^-(1)} \dot{g}_j \dot{g}_j. \quad (3.12)$$

В этом случае по разности суммы положительных $\Delta \lambda^+(\mu)$ и отрицательных $\Delta \lambda^-(\mu)$ микропогрешностей можно более точно определить величину погрешности

$$\Lambda_{\dot{x}\dot{x}}^*(\mu) = \sum_{i=i_1}^{i_n^+(1)} \Delta \lambda_i(\mu) - \sum_{j=j_1}^{j_n^-(1)} \Delta \lambda_j(\mu). \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что если суммы положительных $\Delta \lambda^+(\mu)$ и отрицательных $\Delta \lambda^-(\mu)$ погрешностей равны, то положительные и отрицательные погрешности компенсируют друг друга. В тех же случаях, когда $\Delta \lambda^+(\mu) \neq \Delta \lambda^-(\mu)$, зная разность $[\Delta \lambda^+(\mu) - \Delta \lambda^-(\mu)]$, погрешность оценки, как будет показано ниже, можно свести к нулю.

При определении величины микропогрешностей для оценок взаимно корреляционных функций $R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu)$ алгоритм (3.11) приобретает вид

$$\Delta \lambda_v(\mu) = \langle \Delta \lambda(\mu = 0) \rangle (\overset{\circ}{g}_v \overset{\circ}{\eta}_{v+\mu} / \overline{\overset{\circ}{g}_j \overset{\circ}{\eta}_j}), \quad (3.14)$$

где

$$\overline{\overset{\circ}{g}_j \overset{\circ}{\eta}_j} = [1/n^-(0)] \sum_{j=j_1}^{j_n^-(0)} \overset{\circ}{g}_j \overset{\circ}{\eta}_j. \quad (3.15)$$

Очевидно, что при определении погрешности с использованием выражения (3.13) будут получены более точные, чем по выражению (3.10), результаты. Однако при этом требуется определение микропогрешностей $\Delta \lambda_v(\mu)$ всех произведений $\overset{\circ}{g}_v \overset{\circ}{g}_{v+\mu}$ и суммирование с учетом их знаков, что значительно усложняет процесс обработки сигналов. Поэтому в тех случаях, когда не требуется получение оценки корреляционной функции с очень высокой точностью, может оказаться целесообразным применение выражения (3.10). В тех же случаях, когда предъявляются высокие требования к точности оценок $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu)$, может быть использовано выражение (3.13).

Из выражений (2.1), (2.3), (2.4) вытекает, что погрешность $\Lambda_{xx}^{\circ\circ}(\mu)$ оценки корреляционной функции $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$ при $\mu = 0$ образуется из дисперсии $D(\varepsilon)$ помехи и суммы микропогрешностей $\Lambda_{xx}^{\circ\circ}(\mu)$, вносимых помехой $\overset{\circ}{\varepsilon}_v$ в каждое произведение $\overset{\circ}{g}_v \overset{\circ}{g}_{v+\mu}$, т. е.

$$\begin{aligned} R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 0) &= (1/n) \sum_{v=1}^n \overset{\circ}{x}_v \overset{\circ}{x}_v + (1/n) \sum_{v=1}^n (\overset{\circ}{x}_v \overset{\circ}{\varepsilon}_v + \overset{\circ}{\varepsilon}_v \overset{\circ}{x}_v) + \\ &+ (1/n) \sum_{v=1}^n \overset{\circ}{\varepsilon}_v \overset{\circ}{\varepsilon}_v = R_{xx}^{\circ\circ}(\mu = 0) + \Lambda_{xx}^{\circ\circ}(\mu) + D(\varepsilon), \end{aligned}$$

или

$$R_{xx}^{\circ\circ}(\mu = 0) = R_{gg}^{\circ\circ}(\mu = 0) - [\Lambda_{xx}^{\circ\circ}(\mu = 0) + D(\varepsilon)],$$

где

$$\Lambda_{xx}^{\circ\circ}(\mu = 0) = (1/n) \sum_{v=1}^n (\overset{\circ}{x}_v \overset{\circ}{\varepsilon}_v + \overset{\circ}{\varepsilon}_v \overset{\circ}{x}_v).$$

В то же время, согласно выражениям (2.2), (2.5), при $\mu \neq 0$ дисперсия $D(\varepsilon)$ помехи исчезает и для этих случаев коррекцию погрешности оценки $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu \neq 0)$ можно производить по формуле

$$R_{xx}^{\circ\circ}(\mu \neq 0) = R_{gg}^{\circ\circ}(\mu \neq 0) - \Lambda_{xx}^{\circ\circ}(\mu \neq 0).$$

Учитывая, что при вычислении взаимно корреляционных функций $R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu)$ имеет место равенство $(1/n) \sum_{v=1}^n \overset{\circ}{\varepsilon}_v \overset{\circ}{\varphi}_v = 0$, формула коррекции погрешностей оценок $R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu)$ имеет вид

$$R_{xy}^{\circ\circ}(\mu) = R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu) - \Lambda_{xy}^{\circ\circ}(\mu).$$

Таким образом, располагая возможностями определения дисперсий $D(\varepsilon)$, $D(\varphi)$ помех $\overset{\circ}{\varepsilon}_v$, $\overset{\circ}{\varphi}_v$ сигналов $\overset{\circ}{g}_v$, $\overset{\circ}{\eta}_v$ по формулам (2.10), (2.11), (2.14), можно

вычислить суммарные погрешности $\Lambda_{xx}^*(\mu)$, $\Lambda_{xy}^*(\mu)$ по формулам (3.10) — (3.15) и осуществить коррекцию оценок $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu)$ по выражениям

$$R_{xx}^{\circ\circ}(\mu) \approx R_{xx}^*(\mu) = \begin{cases} R_{gg}^{\circ\circ}(\mu) - [\Lambda_{xx}^*(\mu) + D(\varepsilon)] & \text{при } \mu = 0, \\ R_{gg}^{\circ\circ}(\mu) - \Lambda_{xx}^*(\mu) & \text{при } \mu \neq 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$R_{xy}^{\circ\circ}(\mu) \approx R_{xy}^*(\mu) = R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu) - \Lambda_{xy}^*(\mu). \quad (3.17)$$

Согласно формулам (3.16), (3.17), компенсация погрешности оценок корреляционных функций осуществляется вычитанием из оценок $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu)$ соответственно суммарных погрешностей $\Lambda_{xx}^*(\mu)$, $\Lambda_{xy}^*(\mu)$.

4. Результаты вычислительного эксперимента. В табл. 1 и на рис. 1, а; 2, а приведены результаты одного из вычислительных экспериментов, в котором первоначально формировался синусоидальный сигнал $x(t) = 40\sin(t) + 180$ с дискретным шагом $\Delta t = \pi/100$. Затем к дискретным значениям x , исходного сигнала $x(t)$ добавлялась помеха ε_v с нормальным законом распределения, математическим ожиданием $m_\varepsilon \approx 0$, амплитудой $A(\varepsilon) \approx 10$, дисперсией $D(\varepsilon) \approx 45$ и формировался сигнал $g_v = x_v + \varepsilon_v$. Изображения сигналов x_v , g_v и помехи ε_v представлены на рис. 1, а.

Далее были вычислены корреляционные функции $R_{xx}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{xx}(\mu)$ соответственно центрированного \hat{x}_v и нецентрированного x_v сигналов. Результаты этих вычислений представлены в столбцах 2 и 3 табл. 1. Для сигнала g_v проводились аналогичные вычисления, и значения корреляционных функций $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{gg}(\mu)$ приводятся в 4-м и 5-м столбцах табл. 1.

Как видно из столбцов 2, 3 табл. 1, значения корреляционных функций $R_{xx}^{\circ\circ}(\mu)$ и $R_{xx}(\mu)$ совпадают на всем временном интервале T , значения же корреляционных функций $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$ и $R_{gg}(\mu)$ (столбцы 4, 5) совпадают только при $\mu = 0$. При единичном временном сдвиге $\mu = \Delta t$ в тех же столбцах имеем $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu) = 845,088$ и $R_{gg}(\mu) = 848,374$ и их разность $\lambda(\mu = 1) = 3,3$ единицы. При этом количество отрицательных произведений $g_v g_{v+1}$ (столбец 7, строка 1) оказалось равным $n^-(\mu = 1) = 61$. По выражению (3.9) определялась средняя величина микропогрешности $\langle \Delta \lambda(\mu = 1) \rangle = 3,3/61 = 5,39 \cdot 10^{-2}$. Затем по этой величине $\langle \Delta \lambda(\mu = 1) \rangle = 5,39 \cdot 10^{-2}$ и найденному количеству положительных $n^+(\mu)$ и отрицательных $n^-(\mu)$ произведений $g_v g_{v+\mu}$, представленных соответственно в столбцах 6 и 7 табл. 1, на основании выражений (3.11) — (3.13) определялась величина погрешности $\Lambda^*(\mu)$ (столбец 8) на всем временном интервале T . Одновременно учитывая, что для рассматриваемого сигнала истинное значение дисперсии $D(\varepsilon)$ равно 45 единицам, по выражению (2.14) также определялась величина дисперсии $D(\varepsilon)$, причем при шаге дискретизации $\Delta t > \pi/100$ условие (2.7) не выполнялось. Результаты вычислений дисперсии $D(\varepsilon)$ при шаге $\Delta t = \pi/5$ составляли 657,4, при $\Delta t = \pi/10$ — 211,25, при $\Delta t = \pi/20$ — 94,36. В то же время при шаге дискретизации $\Delta t < \pi/100$ условие (2.7) выполнялось достаточно строго (это очевидно из строк 0—2 столбца 2) и вычисленная величина дисперсии $D(\varepsilon)$ составила 43,46, что отличается от истинного значения на 1,54 единицы или около 3%. Дальнейшим уменьшением шага дискретизации Δt можно определить более точные оценки $D(\varepsilon)$.

После определения дисперсии была произведена коррекция оценок корреляционной функции $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$ по выражению (3.16). Графики корреляционных функций $R_{xx}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{xx}^*(\mu)$, изображенные на рис. 2, а, а также сравнение результатов вычислений $R_{xx}^{\circ\circ}(\mu)$, приведенных в столбце 9, с истинными значениями оценок $R_{xx}^*(\mu)$ в столбце 1 свидетельствуют о том, что оценки $R_{xx}^{\circ\circ}(\mu)$ и $R_{xx}^*(\mu)$ практически совпадают.

После этого были вычислены относительные погрешности $\gamma(\mu)$, $\gamma(\mu)_{\text{ost}}$ соответственно в оценках корреляционных функций $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$ и $R_{xx}^*(\mu)$ до и после применения алгоритма коррекции (3.16) по выражениям

$$\gamma(\mu) = [|R_{gg}^{\circ\circ}(\mu) - R_{xx}^*(\mu)| / R_{xx}^*(\mu)] \cdot 100 \%,$$

$$\gamma(\mu)_{\text{ost}} = [|R_{xx}^*(\mu) - R_{xx}^{\circ\circ}(\mu)| / R_{xx}^{\circ\circ}(\mu)] \cdot 100 \%.$$

Результаты вычислений $\gamma(\mu)$, $\gamma(\mu)_{\text{ost}}$, представленные в столбцах 10, 11, показывают, что после коррекции величина относительной погрешности в значениях корреляционной функции $R_{xx}^*(\mu)$ колеблется в пределах 1 %, тогда как до коррекции она составляла 11,95 % при $\mu = 0$ и более 5 % при $\mu \neq 0$.

Аналогичные вычислительные эксперименты проведены также для оценок взаимно корреляционных функций. В данном эксперименте вычислялись дискретные значения сигналов $x(t) = 57 + 40\sin(t)$ и $y(t) = 57 + 20\sin(t) + 25\sin[1,38(t + 0,25)]$. Затем к ним добавлялись помехи ε_v , φ_v и формировались сигналы \hat{g}_v , $\hat{\eta}_v$. Коррекция оценки корреляционной функции $R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu)$ производилась по формулам (3.14), (3.15), (3.17). Графики сигналов $x(t)$, $y(t)$ изображены на рис. 1, б. Графики корреляционных функций $R_{xy}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu)$, $R_{xy}^*(\mu)$ сигналов, не искаженных помехами, искаженных помехами и после коррекции, представлены на рис. 2, б. Результаты вычислений приводятся в табл. 2.

Заключение. Предложен алгоритм вычисления оценки дисперсии помехи и величин погрешностей, вносимых от помех в соответствующие произведения $\hat{g}_v \hat{g}_{v+\mu}$ отсчетов реализаций \hat{g}_v и $\hat{g}_{v+\mu}$ в каждом шаге дискретизации. Показано, что при любых значениях μ их сумма с учетом знаков позволяет компенсировать погрешности как автокорреляционных $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$, так и взаимно корреляционных $R_{g\eta}^{\circ\circ}(\mu)$ функций, за исключением оценок автокорреляционных функций $R_{gg}^{\circ\circ}(\mu)$ при $\mu = 0$, когда при коррекции необходимо учесть величину дисперсии помехи $D(\varepsilon)$, определение которой может иметь также самостоятельное значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цапенко М. П. Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование. М.: Энергоатомиздат, 1985.
2. Куликов Е. И. Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986.
3. Алиев Т. А. Экспериментальный анализ. М.: Машиностроение, 1991.
4. Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф. Статистическая идентификация с уравниванием погрешностей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 3.
5. Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф. Алгоритм уменьшения погрешностей оценки корреляционной функции сигнала с шумом // Автометрия. 1995. № 4. С. 105.

Поступила в редакцию 9 ноября 1995 г.