РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1997

УДК 519.725

А. И. Литвин

(Томск)

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УОЛША, ФУРЬЕ И ХАРТЛИ

Предлагается алгоритм быстрого вычисления спектральных коэффициентов Уолша, Фурье и Хартли, использующий матрицу перехода из базиса функций Уолша в базис функций Фурье.

Используя алгоритм быстрого преобразования Уолша — Пэли, можно выполнить переход от базиса функций Уолша к базису функций Фурье и обратно [1, 2]. Для того чтобы получить из матрицы Уолша — Адамара $H_h(N)$ матрицу Уолша — Пэли $H_p(N)$, необходимо произвести двоичную инверсию строк или столбцов матрицы Уолша — Адамара. Использованис алгоритма быстрого преобразования Уолша — Пэли исключает операцию перестановок исходных данных путем закона двоичной инверсии.

Преобразованис Фурье вектора x можно записать в виде $\mathrm{x} = (1/N)F\mathrm{x}$, а преобразование Уолша — Адамара того же вектора x — как $\mathrm{x}_H = (1/N)H_h\mathrm{x}$. Отсюда $\mathrm{x}_F = FH_h^{-1}\mathrm{x}_H = (1/N)FH_h\mathrm{x}_H$, где F — матрица Фурье; H_h и H_h^{-1} — матрицы прямого и обратного преобразований Уолша — Адамара соответственно. Таким образом, $(1/N)FH_h$ — матрица перехода от базиса функций Уолша в базис функций Фурье. Заметим, что входная последовательность должна быть упорядочена по Пэли, так как в этом случае величины выходной последовательности будут располагаться в «естественном» порядке. Матрица F факторизуется следующим образом (без нормирующего множителя):

$$F = \prod_{j=1}^{n} D^j(n).$$

Здесь

$$D^j(n) = \mathrm{diag}\left[A_0(j), A_1(j), \ldots, A_{2^{(n-j)}-1}(j),\ j = \overline{1, n}\right];$$

$$A_m(1) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & W^{\langle m\rangle} \\ 1 & -W^{\langle m\rangle} \end{bmatrix},\ m = \overline{0, 2^{(n-j)} - 1}\right\},$$

где $\langle m\rangle$ — символ двоичной инверсии [1—3];

$$A_m(j) = \left\{[A_m(1) \otimes E_{2^{(j-1)}}],\ m = \overline{0, 2^{(n-j)} - 1}\right\}.$$

Факторизуем матрицу Уолша – Адамара в виде

$$H_h(N) = \prod_{j=1}^{n} B^j(n).$$

Здесь

$$B^{j}(n) = \operatorname{diag}\left[C_0(j), C_1(j), \ldots, C_{2^{(n-j)}-1}(j),\ j = \overline{1, n}\right];$$

$$C_m(1) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ m = \overline{0, 2^{(n-j)} - 1}\right\};$$

$$C_m(j) = \left\{[C_m(1) \otimes E_{2^{(j-1)}}],\ m = \overline{0, 2^{(n-j)} - 1}\right\}.$$

П р и м е р. $N = 8$, $n = 3$:

$$F(8) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$H_h(8) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Проанализируем структуру матриц итераций преобразований Фурье и Уолша — Адамара $D^j(n)$ и $B^j(n)$. Исследуя структуру этих матриц, можно убедиться, что для любого n при $j > i$ произведение матриц $D^j(n) \otimes B^i(n)$ перестановочно, т. е. $D^j(n)B^i(n) = B^i(n)D^j(n)$. Это следует из способа получения матриц итераций преобразований Фурье и Уолша — Адамара. Эти матрицы являются блочно-диагональными и отличаются друг от друга только лишь множителями. Блоки матриц итераций при $j > i$ можно рассматривать как блоки, состоящие из подблоков вида $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} w^{(m)} & 0 \\ 0 & w^{(m)} \end{bmatrix}$ или единичных матриц $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Произведения таковых матриц являются перестановочными. Переставляя местами матрицы итераций преобразований Фурье и Уолша — Адамара, получим следующий результат.

Теорема. $FH^{-1} = (1/N)FH = (1/N)\left[(D^1(n)B^1(n)) \ldots (D^n(n)B^{(n)}(n))\right]$.

П р и м е р. $N = 8$, $n = 3$ (без нормирующего множителя):

$$FH^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+W^2 & 1-W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-W^2 & 1+W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+W & 1-W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-W & 1+W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+W^3 & 1-W^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-W^3 & 1+W^3 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+W^2 & 0 & 1-W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+W^2 & 0 & 1-W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-W^2 & 0 & 1+W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-W^2 & 0 & 1+W^2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

С помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) можно реализовать алгоритм преобразования Хартли (ПХ) путем вычитания мнимой части из действительной коэффициентов Фурье. Это позволяет одновременно получать коэффициенты преобразований Уолша, Фурье и Хартли. В работе [4] описан алгоритм быстрого преобразования Хартли. ПХ $H(\nu)$ действительной функции $f(\tau)$, $\tau = \overline{0, N-1}$, определяется как сумма косинусного и синусного преобразований [4]:

$$f(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right), \quad \nu = \overline{0, N-1},$$

где $\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi\nu\tau}{N}\right)$.

В работе [5] приводится подпрограмма, позволяющая одновременно вычислять спектральные коэффициенты преобразований Уолша, Фурье и Хартли без существенных затрат времени и требуемой оперативной памяти ЭВМ в сравнении с известными алгоритмами БПФ и ПХ.

Заметим, что в работах [1—3] и других рассматривался алгоритм перехода из одного базиса в другой, но без математического обоснования. Доказательство проводилось эмпирическим путем: вычислялись спектральные коэффициенты Фурье и сравнивались с эталонными для $n = 2, 3, \ldots, 12$ и т. д. В

[1] выходные данные получались в «неестественном порядке», что требовало дополнительных вычислительных затрат (до 10—12 %).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пойда В. Н.** Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. Минск: Наука и техника, 1978.
2. **Солдатов В. Н., Литвин А. И.** Алгоритм БПФ с использованием функций Уолша // Электротехнические устройства и системы на основе микропроцессоров и ЭВМ. Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1985.
3. **Солдатов В. Н., Литвин А. И.** Быстрые преобразования в системах экспериментальной информации. Томск, 1984. (Препр. /ТНЦ СО АН СССР. Ин-т химии нефти; № 17).
4. **Брейсуэлл Р. Н.** Быстрое преобразование Хартли // ТИИЭР. 1984. **72,** № 8. С. 19.
5. **Литвин А. И., Быков В. И., Кожуховский А. Д., Колесник Ю. В.** Ортогональные дискретные преобразования Уолша, Фурье и Хартли. Программа перехода от преобразований Уолша к преобразованиям Фурье и Хартли. Свидетельство М93050 // НИВЦ МГУ. Отраслевой фонд алгоритмов и программ Минвуза РФ. Отдел численного анализа. М.: МГУ, 1993.

Поступила в редакцию 26 июля 1996 г.