РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1996

УДК 519.642

С. Н. Касьянова, О. Е. Трофимов

(Новосибирск)

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА ТРЕХМЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ ДЛЯ ТРАЕКТОРИИ ИСТОЧНИКА, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОКРУЖНОСТЕЙ

Формулы обращения трехмерной томографической реконструкции, основанные на использовании преобразования Фурье лучевых данных в смысле обобщенных функций, представлены в виде, позволяющем упростить переход к дискретному варианту и составление программ. Приводятся результаты компьютерного моделирования.

В работах [1, 2] получены формулы обращения трехмерной томографической реконструкции. Однако построение численных алгоритмов непосредственно на основании этих формул затруднительно [3]. Дело, в частности, в том, что в них используется преобразование Фурье лучевых данных, понимаемое в смысле обобщенных функций. Классический интеграл Фурье для этих данных расходится. В [4, 5] приведены формулы обращения, использующие операции интегрирования и дифференцирования регулярных функций.

В настоящей работе приводится дальнейшее преобразование формул обращения, позволяющее упростить переход к дискретному варианту и составление программ. Приводятся результаты компьютерного моделирования.

Искомую функцию будем обозначать: $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$. Пусть источник движется по кривой $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \gamma_3(\lambda))$, параметр λ пробегает некоторый интервал Λ действительной прямой.

Для интеграла от функции $f(x)$ вдоль луча, проходящего через точку $\gamma(\lambda)$ в направлении вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, будем использовать обозначение

$$g^+(\lambda, \xi) = \int_0^\infty f(\gamma(\lambda) + t\xi)dt.$$

Для функции $g^+(\lambda, \xi)$ справедливо равенство

$$g^+(\lambda, \xi) = \frac{1}{|\xi|} g^+\left(\lambda, \frac{\xi}{|\xi|}\right) = \frac{1}{|\xi|} \int_0^\infty f\left(\gamma(\lambda) + t\frac{\xi}{|\xi|}\right)dt, \tag{1}$$

т. е. при фиксированном λ функция $g^+(\lambda, \xi)$ полностью определяется своими значениями на единичной сфере $|\xi| = 1$.

Функция $f(x)$, имеющая финитный носитель, может быть восстановлена по функции $g^+(\lambda, \xi)$ [2]:

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \frac{1}{2i\pi(\gamma'(\lambda), \beta)} \frac{\partial G^+(\lambda, \beta)}{\partial \lambda} d\theta d\varphi. \tag{2}$$

Функция $G^+(\lambda, \beta)$ есть преобразование Фурье от функции $g^+(\lambda, \xi)$ по переменной ξ, $\beta = \beta(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cdot \cos\varphi,\ \cos\theta \cdot \sin\varphi,\ \sin\theta)$, здесь θ — угол между вектором и плоскостью $z = 0$; φ — угол между проекцией вектора на плоскость $z = 0$ и осью $0X$; $\lambda = \lambda(\theta, \varphi) = \lambda(x, \beta)$ такое, что скалярное произведение (β, x) равно $(\beta, \gamma(\lambda))$ и $(\beta, \gamma'(\lambda)) \neq 0$. Предполагается, что такое значение λ существует для любого x, принадлежащего носителю функции $f(x)$, т. е. любая плоскость, пересекающая носитель функции, пересекает кривую $\gamma(\lambda)$ так, что знаменатель в (2) не обращается в нуль. Примером такой кривой является совокупность двух единичных окружностей, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях, если носитель лежит в единичном шаре. Следует отметить, что преобразование Фурье от функции $g^+(\lambda, \xi)$, понимаемое в обычном смысле:

$$G^+(\lambda, \sigma) = \int_{R^3} g^+(\lambda, \xi) e^{2i\pi(\sigma, \xi)} d\xi,$$

не существует, так как на бесконечности $g^+(\lambda, \xi)$ имеет порядок $1/|\xi|$. Это связано с переходом от исходных данных, заданных на поверхности $|\xi| = 1$, к однородной функции, заданной во всем пространстве. В [2] преобразование Фурье понимается в смысле обобщенных функций. Чтобы использовать формулы типа (2) для построения алгоритмов, желательно иметь выражения для функций G^+ и f через регулярную функцию g^+; в работах [4, 5] получены такие выражения.

Формула (2) может быть записана в следующем виде:

$$f(x) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \frac{1}{\langle \gamma'(\lambda), \beta \rangle} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int_{S(\beta)} L(\beta, D) g^+(\lambda, \xi) \Omega(\xi) \right] d\theta d\varphi. \qquad (3)$$

Здесь $S(\beta)$ — окружность, являющаяся пересечением единичной сферы и плоскости $P(\beta)$. Плоскость $P(\beta)$ проходит через начало координат и ортогональна вектору β. Символ $\Omega(\xi)$ означает интегрирование по окружности, оператор $L(\beta, D)$ — дифференцирование функции $g^+(\lambda, \xi)$ в направлении вектора β:

$$L(\beta, D) g^+(\lambda, \xi) = \beta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} g^+(\lambda, \xi) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} g^+(\lambda, \xi) + \beta_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} g^+(\lambda, \xi),$$

при этом λ, зависящее от β и x, остается фиксированным. Как и выше, $\beta = \beta(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cdot \cos\varphi,\ \cos\theta \cdot \sin\varphi,\ \sin\theta)$; $\lambda = \lambda(\theta, \varphi) = \lambda(x, \beta)$ такое, что скалярное произведение $\langle \beta, x \rangle$ равно $\langle \beta, \gamma(\lambda) \rangle$ и $\langle \beta, \gamma'(\lambda) \rangle \neq 0$.

В формуле (3) используются регулярные функции, и она пригодна для построения численных алгоритмов. Однако для упрощения составления программ эту формулу можно еще преобразовать. В частности, интегрирование по окружности $S(\beta(\theta, \varphi))$ удобно заменить интегрированием по интервалу $[0, 2\pi]$. Для этого введем систему координат со следующими ортами:

$$e_1 = (\sin\theta \cdot \cos\varphi,\ \sin\theta \cdot \sin\varphi,\ -\cos\theta) \quad (\text{ось } X_1);$$

$$e_2 = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0) \quad (\text{ось } Y_1);$$

$$e_3 = (\cos\theta \cdot \cos\varphi,\ \cos\theta \cdot \sin\varphi,\ \sin\theta) \quad (\text{ось } Z_1).$$

В новой системе координат ось Z_1 совпадает с направлением вектора β, а оси X_1 и Y_1 лежат в плоскости $P(\beta)$, ортогональной вектору β, причем ось Y_1 совпадает с пересечением плоскостей $P(\beta)$ и $z = 0$. В системе координат

(X_1, Y_1, Z_1) уравнение окружности $S(\beta)$ имеет вид $(\cos\omega, \sin\omega, 0)$. Переходя от системы координат (X_1, Y_1, Z_1) к исходной (X, Y, Z), получаем

$$\int\limits_{S(\beta)} L(\beta, D)g^+(\lambda, \xi)\Omega(\xi) = \int\limits_0^{2\pi} L(\beta, D)g^+(\lambda, \xi_1(\beta, \omega), \xi_2(\beta, \omega), \xi_3(\beta, \omega))d\omega,$$

где

напомним, что β есть функция величин θ и φ.

Оператор $L(\beta, D)$ можно переписать в виде

$$L(\beta, D)g^+(\lambda, \xi_1(\beta, \omega), \xi_2(\beta, \omega), \xi_3(\beta, \omega)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} g^+(\lambda, \xi_1(\beta, \omega) + t\beta_1, \xi_2(\beta, \omega) + t\beta_2, \xi_3(\beta, \omega) + t\beta_3)\Big|_{t=0}. \tag{5}$$

Учитывая изложенное, получаем

$$\int\limits_{S(\beta)} L(\beta, D)g^+(\lambda, \xi)\Omega(\xi) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} g^+(\lambda, \xi_1(\beta, \omega) + t\beta_1, \xi_2(\beta, \omega) + t\beta_2, \xi_3(\beta, \omega) + t\beta_3)\Big|_{t=0} d\omega,$$

где

$$\begin{gathered} \xi_1(\beta, \omega) = \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \cos\omega - \sin\varphi \cdot \sin\omega; \\ \xi_2(\beta, \omega) = \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\omega + \cos\varphi \cdot \sin\omega; \\ \xi_3(\beta, \omega) = -\cos\theta \cdot \cos\omega; \\ \beta = \beta(\theta, \varphi) = (\beta_1(\theta, \varphi),\ \beta_2(\theta, \varphi),\ \beta_3(\theta, \varphi)); \\ \beta_1(\theta, \varphi) = \cos\theta \cdot \cos\varphi; \\ \beta_2(\theta, \varphi) = \cos\theta \cdot \sin\varphi; \\ \beta_3(\theta, \varphi) = \sin\theta. \end{gathered} \tag{6}$$

Для искомой функции $f(x)$ находим

$$f(x) = \frac{-1}{8\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{(\gamma'_\lambda(\lambda(x, \theta, \varphi)),\ \beta(\theta, \varphi))} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial\lambda} \left[\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} g^+(\lambda(x, \theta, \varphi), \xi(\beta(\theta, \varphi), \omega) + t\beta(\theta, \varphi))\Big|_{t=0} d\omega \right] d\theta d\varphi, \tag{7}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ определяются по формулам (6); напомним, что $(\gamma'_\lambda(\lambda(x, \theta, \varphi)), \beta(\theta, \varphi))$ — скалярное произведение векторов $\gamma'_\lambda(\lambda(x, \theta, \varphi))$ и $\beta(\theta, \varphi)$.

Так как $\lambda(x, \theta, \varphi)$ находится из условия $(\gamma(\lambda(x, \theta, \varphi)), \beta(\theta, \varphi)) = (x, \beta(\theta, \varphi))$, то для определения функции $\lambda(x, \theta, \varphi)$ необходимо задать вид кривой γ — траектории движения источника.

Рассмотрим случай, когда γ состоит из двух окружностей. Носитель искомой функции и траектория движения источника должны быть согласованы, для них выполняется условие Кириллова — Туя [1, 2]: любая плоскость, пересекающая носитель функции, должна пересекать траекторию движения источника, причем в точке пересечения знаменатель в формуле (7) отличен от нуля. Обычно в качестве примера подходящей траектории берут две единичные окружности, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях, а в качестве носителя — единичную сферу. Здесь будет рассмотрен более общий случай, соответствующий произвольному заданному углу α между двумя плоскостями, содержащими траекторию источника. В качестве носителя в такой ситуации естественно рассматривать часть единичного шара, заключенную между плоскостями $|z| = |\cos\alpha|$. Такая схема позволяет исследовать слой объекта по координате Z. В классической компьютерной томографии плотность в этом направлении считается постоянной и производится сканирование с шагом δz. Для исследования объекта высотой h необходимо $h/\delta z$ сканирований. При томографической реконструкции в конусе лучей необходимо произвести два сканирования, если выбирать угол α из условия $\cos\alpha = h/2$. Траектория, состоящая из окружности и двух ортогональных к ней направляющих, рассмотрена в [6]. Отметим также, что условия Кириллова — Туя не являются необходимыми [7, 8], траектория может состоять из одной окружности, но при этом задача становится сильно неустойчивой [8].

Итак, пусть траектория источника состоит из двух окружностей, являющихся пересечением с единичной сферой плоскостей, проходящих через начало координат и имеющих векторы нормалей (p_1, p_2, p_3) и (q_1, q_2, q_3). Координаты (t_1, t_2, t_3) точек пересечения траектории источника с плоскостью, проходящей через точку (x_1, x_2, x_3) и ортогональной вектору $(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$, являются решением соответствующих систем уравнений.

Для первой плоскости:

$$\begin{gathered} t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1; \\ t_1\mathrm{v}_1 + t_2\mathrm{v}_2 + t_3\mathrm{v}_3 = x_1\mathrm{v}_1 + x_2\mathrm{v}_2 + x_3\mathrm{v}_3; \\ t_1p_1 + t_2p_2 + t_3p_3 = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Для второй плоскости:

$$\begin{gathered} t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1; \\ t_1\mathrm{v}_1 + t_2\mathrm{v}_2 + t_3\mathrm{v}_3 = x_1\mathrm{v}_1 + x_2\mathrm{v}_2 + x_3\mathrm{v}_3; \\ t_1q_1 + t_2q_2 + t_3q_3 = 0. \end{gathered} \tag{8'}$$

В качестве первой плоскости естественно взять плоскость $z = 0$ с вектором нормали $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$, для второй плоскости возьмем вектор нормали $(q_1, q_2, q_3) = (0, -\sin\alpha, \cos\alpha)$. При $\alpha = 0$ первая и вторая плоскости совпадают, при $\alpha = \pi/2$ вторая плоскость имеет уравнение $y = 0$.

Подставляя вместо вектора v вектор $\beta(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cdot \cos\varphi, \cos\theta \cdot \sin\varphi, \sin\theta)$, получаем системы уравнений.

Для первой плоскости:

$$\begin{gathered} t_1^2 + t_2^2 = 1; \\ (\cos\theta \cdot \cos\varphi)t_1 + (\cos\theta \cdot \sin\varphi)t_2 = (\cos\theta \cdot \cos\varphi)x_1 + (\cos\theta \cdot \sin\varphi)x_2 + (\sin\theta)x_3. \end{gathered} \tag{9}$$

Для второй плоскости:

$$t_1^2+t_2^2+t_3^2=1;$$

$$\begin{aligned}&(\cos\theta\cdot\cos\varphi)t_1+(\cos\theta\cdot\sin\varphi)t_2+(\sin\theta)t_3=\\&=(\cos\theta\cdot\cos\varphi)x_1+(\cos\theta\cdot\sin\varphi)x_2+(\sin\theta)x_3=\langle\beta(\theta,\varphi),x\rangle;\end{aligned}\tag{10}$$

$$(-\sin\alpha)t_2+(\cos\alpha)t_3=0.$$

При создании программ для решения систем (9) и (10) необходимо учесть все особые случаи, связанные с делением на нуль. При построении численных алгоритмов необходимо также использовать приемы регуляризации при делении на малые величины.

Шаг 1. Делаем попытку найти положение источника при решении системы (9).

1. Если $\pi/2-|\theta|<\delta\theta$, то следует перейти к системе (10).

Примечание. Деление на нуль в системе (9) может происходить при $\cos\theta=0$ ($|\theta|=\pi/2$), однако при построении численных алгоритмов в реальных ситуациях к системе (10) следует переходить при выполнении условия $\pi/2-|\theta|<\delta\theta$, где $\delta\theta$ — параметр, зависящий от уровня помех. В простейшем случае его можно положить равным шагу решетки по θ при вычислении интеграла в (7).

2. Если $\pi/2-|\theta|\ge\delta\theta$ и $|\cos\varphi|>|\sin\varphi|$, то из второго уравнения (9) находим

$$t_1=(\langle\beta(\theta,\varphi),x\rangle-(\cos\theta\cdot\sin\varphi)t_2)/(\cos\theta\cdot\cos\varphi),$$

и, подставляя это выражение в первое уравнение системы (9), получаем уравнение для t_2.

3. Если $\pi/2-|\theta|\ge\delta\theta$ и $|\cos\varphi|\le|\sin\varphi|$, то из второго уравнения (9) находим

$$t_2=(\langle\beta(\theta,\varphi),x\rangle-(\cos\theta\cdot\cos\varphi)t_1)/(\cos\theta\cdot\sin\varphi),$$

и, подставляя это выражение в первое уравнение системы (9), получаем уравнение для t_1.

4. Если уравнение, полученное в п. 2 или 3, не имеет решения, переходим к системе (10).

5. Если уравнение имеет решение, то полагаем

$$\lambda=\begin{cases}\arccos(t_1), & \text{если } t_2\ge 0;\\ 2\pi-\arccos(t_1), & \text{если } t_2<0.\end{cases}$$

6. Проверка условия трансверсальности $\langle\gamma'(\lambda(x,\theta,\varphi)),\ \beta(\theta,\varphi)\rangle\ne 0$.

Если $|-\sin\lambda(\cos\theta\cdot\cos\varphi)+\cos\lambda(\cos\theta\cdot\sin\varphi)|\le\delta\mathrm{tr}$, то переходим к решению системы (10).

Если $|-\sin\lambda(\cos\theta\cdot\cos\varphi)+\cos\lambda(\cos\theta\cdot\sin\varphi)|>\delta\mathrm{tr}$, то решение найдено. Здесь $\delta\mathrm{tr}$ — параметр регуляризации для условия трансверсальности.

Шаг 1 закончен.

Шаг 2. Определение положения источника из системы (10).

При выполнении шага 2 будем считать, что $\alpha\ne 0$. Напомним, что α — угол между плоскостями, в которых лежит траектория источника.

Из третьего уравнения в (10) получаем $t_2=t_3\mathrm{ctg}\alpha$. Подставляя это выражение во второе уравнение, находим

$$(\cos\theta\cdot\cos\varphi)t_1+(\sin\theta+\cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot\mathrm{ctg}\alpha)t_3=\langle\beta(\theta,\varphi),x\rangle.$$

1. Если $\max(|\cos\theta \cdot \cos\varphi|, \ |\sin\theta + \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{ctg}\alpha|) < \delta\theta$, то прекращаем поиск решения. Это условие аналогично условию $\pi/2 - |\theta| \geq \delta\theta$ при решении системы (9). При выборе параметра регуляризации учтено, что $\cos(\pi/2 - \delta\theta) \cong \delta\theta$ при малых $\delta\theta$.

2. Если $|(\sin\theta) + (\cos\theta \cdot \sin\varphi)\mathrm{ctg}\alpha| \geq |\cos\theta \cdot \cos\varphi|$, то полагаем

$$t_3 = (\langle\beta(\theta, \varphi), x\rangle - (\cos\theta \cdot \cos\varphi)t_1)/(\sin\theta + \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{ctg}\alpha),$$

и, подставляя это выражение в первое уравнение (10), приходим к уравнению относительно t_1, решив которое, находим t_1, затем t_3.

3. Если $|(\sin\theta) + (\cos\theta \cdot \sin\varphi)\mathrm{ctg}\alpha| < |\cos\theta \cdot \cos\varphi|$, то полагаем

$$t_1 = (\langle\beta(\theta, \varphi), x\rangle - (\sin\theta + \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{ctg}\alpha)t_3)/(\cos\theta \cdot \cos\varphi),$$

и, подставляя это выражение в первое уравнение (10), приходим к уравнению относительно t_3, из него находим t_3, затем вычисляем t_1.

4. Если уравнение, полученное в п. 2 или 3, не имеет решения, выполнение шага заканчивается, на данном шаге решение не найдено.

5. Если решение найдено, то представляем его в параметрическом виде $t_1 = \cos\lambda$, $t_2 = \cos\alpha \cdot \sin\lambda$, $t_3 = \sin\alpha \cdot \sin\lambda$ и находим λ:

$$\lambda = \begin{cases} \arccos(t_1), & \text{если } t_2 \geq 0; \\ 2\pi - \arccos(t_1), & \text{если } t_2 < 0. \end{cases}$$

6. Проверка условия трансверсальности $\langle\gamma'(\lambda(x, \theta, \varphi)), \ \beta(\theta, \varphi)\rangle \neq 0$.

Если $(\cos\lambda(\cos\theta \cdot \cos\varphi) + \cos\alpha \cdot \sin\lambda(\cos\theta \cdot \sin\varphi) - \sin\alpha \cdot \sin\lambda(\sin\theta)) \geq$ $\geq \delta\mathrm{tr}$, то решение найдено.

Шаг 2 закончен.

Шаг 2 необходимо выполнять, если решение не найдено на шаге 1. Для повышения помехоустойчивости можно использовать алгоритмы, при которых в любом случае выполняются оба шага, а затем среди полученных решений выбирается положение источника с заданными свойствами, например, с наименьшим расстоянием от исследуемой точки объекта или с наибольшим значением модуля величины, получаемой при проверке условия трансверсальности.

Отметим, что внутри каждого шага также может быть не единственное решение. Это связано с тем, что в общем положении прямая пересекается со сферой в двух точках.

Если исследуемые точки (x, y, z) удовлетворяют условиям $x^2 + y^2 < 1$, $|z| < \cos\alpha$, то, по крайней мере, на одном из шагов будет найдено решение. Как обычно, в реальных ситуациях желательно выбирать размеры допустимого носителя так, чтобы исследуемый объект помещался в нем с запасом.

Возможен также способ решения систем (9) и (10) и определения значения λ, непосредственно использующий параметрическое представление окружностей, из которых состоит траектория источника.

Полагая в системе (9) $t_1 = \cos\lambda$, $t_2 = \sin\lambda$, приходим к уравнению относительно λ:

$$\cos\theta \cdot \cos(\varphi - \lambda) = (\cos\theta \cdot \cos\varphi)x_1 + (\cos\theta \cdot \sin\varphi)x_2 + (\sin\theta)x_3. \qquad (11)$$

Если решение уравнения (11) отсутствует, то необходимо перейти к системе (10).

Если положить $t_1 = \cos\lambda$, $t_2 = \cos\alpha \cdot \sin\lambda$, $t_3 = \sin\alpha \cdot \sin\lambda$, то в (10) выполняются равенства (1) и (3). Напомним, что α — угол между плоскостями, в которых лежит траектория источника. Таким образом, от системы (10) приходим к уравнению относительно λ:

$$(\cos\theta \cdot \cos\varphi)\cos\lambda + (\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha)\sin\lambda =$$
$$= (\cos\theta \cdot \cos\varphi)x_1 + (\cos\theta \cdot \sin\varphi)x_2 + (\sin\theta)x_3. \tag{12}$$

Пару чисел ($\cos\theta \cdot \cos\varphi$, $\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha$) представим как комплексное число ($\cos\theta \cdot \cos\varphi + i(\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha)$). Используя тригонометрическую форму комплексных чисел ($\cos\theta \cdot \cos\varphi + i(\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha)) = r(\cos\nu + i\sin\nu)$, приходим к уравнению

$$r\cos(\nu - \lambda) = (\cos\theta \cdot \cos\varphi)x_1 + (\cos\theta \cdot \sin\varphi)x_2 + (\sin\theta)x_3, \tag{13}$$

здесь $r^2 = (\cos\theta \cdot \cos\varphi)^2 + (\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha)^2$ — модуль; $\nu = \arg(\cos\theta \cdot \cos\varphi + i(\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha))$ — аргумент комплексного числа $\cos\theta \cdot \cos\varphi + i(\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\theta \cdot \sin\alpha)$.

Выражения для вычисления $\nu(x_1, x_2) = \arg(x_1 + ix_2)$ имеют вид:

если $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, $\nu = 0$;
если $x_1 = 0$ и $x_2 > 0$, $\nu = \pi/2$;
если $x_1 = 0$ и $x_2 < 0$, $\nu = \pi 3/2$;
если $x_1 > 0$ и $x_2 \geq 0$, $\nu = \mathrm{arctg}(x_1/x_2)$;
если $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$, $\nu = 2\pi + \mathrm{arctg}(x_2/x_1)$;
если $x_1 < 0$, $\nu = \pi + \mathrm{arctg}(x_2/x_1)$.

(Предпоследняя строчка приведена для того, чтобы получить угол ν в пределах от 0 до 2π.)

Итак, нам необходимо найти λ либо из уравнения (11), либо из уравнения (13). В уравнениях (11) и (13) особого рассмотрения требуют случаи $\cos\theta = 0$ и $r = 0$. Отметим, что если $\alpha \neq 0$, то $\cos\theta$ и r не могут быть равны нулю одновременно. При $\alpha \neq 0$ плоскости, которым принадлежит траектория источника, не совпадают. Уравнение (11) можно рассматривать как частный случай (13) при $\alpha = 0$, но для сокращения времени счета их удобно рассматривать отдельно. Оба уравнения имеют вид: $r\cos(\nu - \lambda) = d$; нас интересуют решения λ, принадлежащие интервалу $[0, 2\pi)$. Так как функция $\cos\lambda$ четная, то может быть два решения (обозначим их $\lambda_1(r, d, \nu)$ и $\lambda_2(r, d, \nu)$). Функции λ_i можно записать в явном виде следующим образом:

если $r = 0$ и $d \neq 0$, $\lambda_i(r, d, \nu)$ не определено ($i = 1, 2$);
если $|d/r| > 1$, $\lambda_i(r, d, \nu)$ не определено ($i = 1, 2$);
если $r = 0$ и $d = 0$, $\lambda_i(r, d, \nu) = 0$ ($i = 1, 2$);
если $r \neq 0$ и $|d/r| \leq 1$, полагаем $\gamma = \arccos(d/r)$;
если $\nu + \gamma \leq 2\pi$, $\lambda_1(r, d, \nu) = \nu + \gamma$;
если $\nu + \gamma > 2\pi$, $\lambda_1(r, d, \nu) = \nu + \gamma - 2\pi$;
если $\nu - \gamma \geq 0$, $\lambda_2(r, d, \nu) = \nu - \gamma$;
если $\nu - \gamma < 0$, $\lambda_2(r, d, \nu) = \nu - \gamma + 2\pi$.

Случай неопределенных λ_i соответствует отсутствию решения; отметим также, что $0 \leq \nu < 2\pi$ и $0 \leq \gamma \leq \pi$.

Для решения уравнения (11) необходимо вычислить $\lambda_i(\cos\theta, d, \varphi)$, для решения уравнения (13) — $\lambda_i(r, d, \nu)$, где

$$d = (\cos\theta \cdot \cos\varphi)x_1 + (\cos\theta \cdot \sin\varphi)x_2 + (\sin\theta)x_3;$$

$$r^2 = (\cos\theta \cdot \cos\varphi)^2 + (\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha + (\sin\theta)\sin\alpha)^2;$$

$$\nu = \arg(\cos\theta \cdot \cos\varphi + i\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\alpha + (\sin\theta)\sin\alpha).$$

Отметим, что не все решения уравнений (11) и (13) являются решениями исходных систем (9) и (10), для выбора между λ_1 и λ_2 необходимо использовать вторые уравнения в (9) и (10).

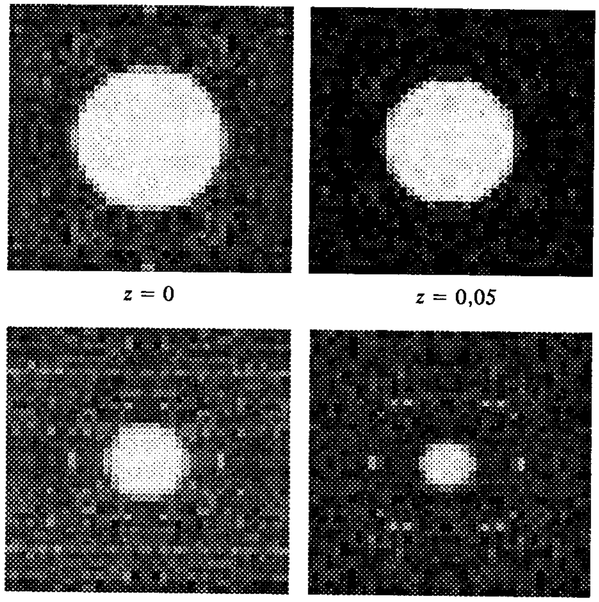
Резюмируя изложенное выше, получаем следующую схему счета для восстановления искомой функции в заданной точке $x = (x_1, x_2, x_3)$. Для вычислений по формуле (7) организуем двойной цикл по θ и φ. Фиксированные θ и φ определяют точку на единичной сфере и соответствующий ей вектор $\beta(\theta, \varphi)$. Используя один из приведенных выше алгоритмов, находим точку пересечения плоскости $P(x, \beta)$ с траекторией источника и соответствующее этой точке значение параметра λ. При найденном λ с использованием формул (6) получим в (7) производную по t, интеграл по α и производную по λ. При вычислении производных могут быть применены различные приемы регуляризации. После умножения на соответствующие коэффициенты получаем вклад в решение, соответствующий заданным θ и φ. Суммируя вклады, соответствующие различным θ и φ, находим полное решение.

В реальных ситуациях известно некоторое конечное множество исходных данных. Это приводит к некоторой модификации приведенных выше формул обращения. Как правило, окружности, по которым движется источник, делятся на N равных частей, и источник может находиться только в точках вида $\lambda_k = k(2\pi/N)$ $(k = 0, ..., N-1)$; поэтому, определив λ по формулам, приведенным выше, необходимо найти величину $(2\pi/N)[\lambda/N]$ — левую границу интервала, в который попадает λ. Здесь $[\lambda/N]$ — целая часть λ/N. При вычислении производной по λ необходимо сдвинуться в соседнюю точку решетки.

Окружности имеют общие точки (1, 0, 0) и (–1, 0, 0). Искомую точку пересечения с плоскостью нужно считать лежащей на той окружности, которая пересекается с текущей плоскостью под большим углом. Если текущий вектор $\beta(\theta, \varphi)$ ближе к оси Z, то при вычислении производной по λ нужно сдвигаться по второй наклонной окружности. Если текущий вектор $\beta(\theta, \varphi)$ ближе к вектору $(0, \sin\alpha, \cos\alpha)$ — направляющему вектору плоскости, в которой лежит наклонная окружность, то при вычислении производной по λ следует сдвигаться в плоскости $z = 0$.

На рис. 1 приведены результаты компьютерного моделирования трехмерной томографической реконструкции с использованием приведенных выше формул. Восстанавливался однородный шар радиуса 0,5 с внутренней шаровой полостью радиуса 0,1. Две окружности, составляющие траекторию источника, имели единичный радиус и лежали во взаимно ортогональных плоскостях. Шаг дискретизации при движении источника $\delta\lambda = 2\pi/1000$ — тысяча положений источника на окружности. Моделировался тот случай, когда исходными данными являются значения функции $g^+(\lambda, \xi)$, заданные на поверхности единичной сферы с равномерными шагами по углам θ и φ. Шаги дискретизации в формуле (7): $\delta\alpha = 2\pi/256$, $\delta\theta = \pi/200$, $\delta\varphi = 2\pi/200$, $\delta t = 0{,}0001$. Функция восстанавливалась в сечениях, параллельных плоскости $z = 0$, с шагом $\delta x = \delta y = 0{,}01$.

На рис. 1 представлены результаты счета в зоне дефекта для нескольких сечений, отчетливо показывающие изменение размеров дефекта по оси z. Проведенные нами численные эксперименты показали, что при указанных значениях параметров качество восстановления не очень сильно зависит от места расположения дефекта. Полость с центром в точке (0; 0; 0) восстанавливается практически так же, как полость того же радиуса с центром в



$z = 0$ $z = 0{,}05$

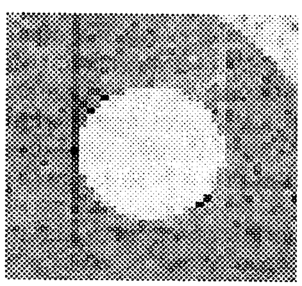
$z = 0{,}087$ $z = 0{,}096$

Рис. 1

точке (0,2; 0,2; 0) (рис. 2). Разумеется, ситуация может существенно измениться, если дефект выйдет на границу объекта. Но во многих практических ситуациях задача заключается в обнаружении дефектов, находящихся на достаточной глубине.

Напомним, что при использовании двумерного преобразования Радона каждому сечению должно соответствовать сканирование по соответствующей окружности в отличие от двух окружностей в рассматриваемом случае.

Следует отметить, что сфера является достаточно жестким объектом для предварительного тестирования алгоритмов трехмерной томографии. Дело в том, что в формулах обращения по лучевым данным насчитывается преобразование Радона в трехмерном пространстве (интегралы по плоскостям), а затем используются известные формулы обращения этого преобразования. В формуле обращения преобразования Радона в трехмерном пространстве нужна вторая производная интегралов по плоскостям. Объект должен иметь достаточно гладкие границы. У шара в граничных точках разрывна даже первая производная. Формулы обращения преобразования Радона, понимаемые в классическом смысле, здесь не применимы. В дискретном случае фактически используется аппроксимация данных, что приводит к регуляризации и сглаживанию эффекта разрывности, однако отсутствие гладкости может быть одной из причин артефактов. В проведенных численных экспериментах использовалась ступенчатая аппроксимация. При больших уровнях шумов и могут быть использованы хорошо разработанные регуляризаторы дифференцирования, являющегося здесь основным источником неустойчивости. Дифференцировать приходится дважды, но по разным переменным, что несколько упрощает ситуацию.



$z = 0$

Рис. 2

При восстановлении плотности объектов, наряду с формулами обращения, целесообразно использовать и методы обработки изображений, как это делается в двумерной томографии.

Рассмотренный алгоритм основан на преобразовании формул обращения к такому виду, в котором используются операции с регулярными функциями. Возможны и другие подходы к построению алгоритмов, в частности основанные на использовании канонических регуляризаций соответствующих обобщенных функций [9, 10]. Формулы обращения, позволяющие создавать численные алгоритмы трехмерной томографической реконструкции, содержатся также в [11, 12].

Известные к настоящему времени выводы формул обращения основаны на близких идеях. В непрерывном варианте получаемые формулы обычно эквивалентны. Однако при построении численных алгоритмов различия могут иметь существенное значение. В этой связи представляется целесообразным построение численных алгоритмов на основании различных видов формул обращения с последующим их сравнением между собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кириллов А. А.** Об одной задаче И. М. Гельфанда // ДАН СССР. 1961. **137**, № 2. С. 276.
2. **Tuy H. K.** An inversion formula for cone-beam reconstruction // SIAM J. Appl. Math. 1983. **43**, N 3. P. 546.
3. **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
4. **Денисюк А. С.** Исследование по интегральной геометрии в вещественном пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1991.
5. **Трофимов О. Е.** К задаче восстановления функции по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Методы решения условно-корректных задач. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1991.
6. **Zeng G. L., Clark R., Gullberg G. T.** Implementation of Tuy's cone beam inversion formula // International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine. Snowbird, Utah, USA, 1993. P. 65.
7. **Благовещенский А. С.** О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Математические заметки. 1986. **39**, № 6. С. 841.
8. **Finch D. V.** Cone beam reconstruction with sources on a curve // SIAM J. Appl. Math. 1985. **45**, N 4. P. 665.
9. **Smith B. D.** Cone-beam tomography: recent advances and tutorial review // Opt. Eng. 1990. **29**, N 5. P. 524.
10. **Trofimov O. E.** Correlation of two methods of cone beam reconstruction // J. Syst. Anal. Model. Simulat. 1995. **18**. P. 169.
11. **Гельфанд И. М., Гончаров А. Б.** Восстановление финитной функции, исходя из ее интегралов по прямым, пересекающим данное множество точек в пространстве // ДАН СССР. 1986. **290**, № 5. С. 1037.
12. **Rizo P., Grangeat P., Sire P. et al.** Comparison of two three-dimensional x-ray cone-beam-reconstruction algorithms with circular source trajectories // JOSA. A. 1991. **8**, N 10. P. 1639.

Поступила в редакцию 28 июня 1996 г.