

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.391

В. М. Ефимов, А. Н. Касперович

(Новосибирск)

К ТЕОРИИ ШУМОВ  
 В КАСКАДНЫХ ДЕЛЬТА—СИГМА-МОДУЛЯТОРАХ\*

Показано, что эквивалентная схема  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$  может быть представлена в виде идеального квантователя, на входе которого сигнал последовательно проходит  $r$  сумматоров, и вычисляется  $r$ -я конечная разность выходного сигнала идеального квантователя. На основании этой эквивалентной схемы и классического тригонометрического разложения ошибки квантования исследованы двумерные статистические характеристики выходного сигнала  $\Delta\Sigma$  и оценено влияние начальных условий (содержимых сумматоров) на эти характеристики.

Характеристики шумов в дельта—сигма-модуляторах ( $\Delta\Sigma$ ) исследуются во многих работах [1]. Излагаемый ниже материал, на наш взгляд, существенно расширяет теоретические представления о характеристиках шумов в каскадных  $\Delta\Sigma$ , в частности, позволяет оценить влияние начальных условий (содержимых сумматоров) на эти характеристики. При получении результатов авторы опирались на использованное ими ранее понятие идеального квантователя [2, 3] и тригонометрическое разложение ошибки этого квантователя [4].

1. Эквивалентная схема каскадного дельта—сигма-модулятора. В [2] показано, что классическая схема однокаскадного  $\Delta\Sigma$  (рис. 1, а) посредством преобразований (рис. 1, б) сводится к эквивалентной (рис. 1, в), где идеальный



Рис. 1

\* Работа выполнена при содействии Российского фонда фундаментальных исследований (№ 95-01-00098).

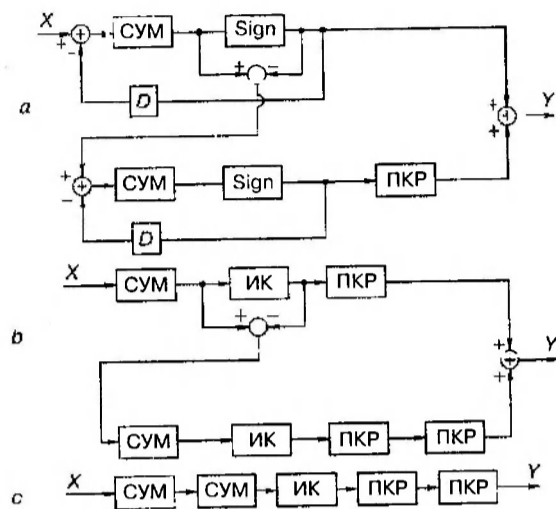


Рис. 2

квантователь (ИК) с шагом квантования по уровню  $q$  вычисляет целую часть от входного сигнала, деленного на  $q$ :

$$y(s) = [z(s)/q], \quad (1.1)$$

а следующее за ним устройство вычисляет первую конечную разность (ПКР) выходного сигнала идеального квантователя на интервале дискретизации  $\Delta$ :

$$y^*(s) = y(s) - y(s-1). \quad (1.2)$$

В этой схеме квантователь можно считать идеальным, если величина  $z(s)$  на входе компаратора с характеристикой  $y = 1[z - u]$  (1 при  $z > u$ , 0 при  $z < u$ ) не превышает удвоенного диапазона, т. е.  $z(s) < 2u$ .

Один из классических вариантов схемы двухкаскадного  $\Delta\Sigma$  изображен на рис. 2, а. Эту схему можно свести к схеме, показанной на рис. 2, б. Переход от схемы рис. 2, а к схеме рис. 2, б осуществляется с использованием эквивалентной схемы однокаскадного  $\Delta\Sigma$ . Теперь от схемы рис. 2, б можно перейти к эквивалентной схеме, изображенной на рис. 2, с. При этом переходе учитываются два обстоятельства: первое — сумматор на входе второго каскада можно разделить, используя принцип линейной суперпозиции, на два сумматора; второе — идеальный квантователь второго каскада пропускает без изменений один из сигналов, поступающий на его вход и являющийся целочисленным:

$$[[z_1/u] + z_2/u] = [z_1/u] + [z_2/u]. \quad (1.3)$$

Если учесть изложенное выше, то второй каскад можно разделить на два параллельных канала. Один из них полностью компенсирует первый каскад, так как сумматор на его входе компенсирует одну конечную разность на его выходе.

Если продолжить эту рекурсию, то эквивалентная схема  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$  может быть представлена схемой, изображенной на рис. 3. На наш взгляд, последняя схема позволяет существенно упростить анализ характеристик шумов многокаскадных  $\Delta\Sigma$ . Аналогичная изображенной на рис. 3 схема с интеграторами вместо сумматоров рассмотрена авторами в [3].

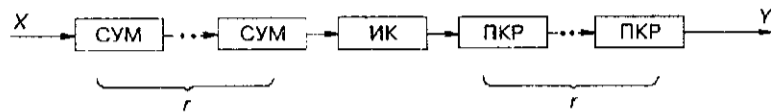


Рис. 3

Из эквивалентной схемы, изображенной на рис. 3, вытекают основные соотношения, описывающие работу  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma\text{М}$ :

$$y(s) = x(s) + n(s), \quad (1.4)$$

где

$$n(s) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \xi(s - k) \quad (1.5)$$

— шум на входе децимирующего фильтра (выходе  $\Delta\Sigma\text{М}$ );  $\xi(s)$  — шум квантования идеального квантователя.

Сигнал  $x(s)$  поступает на вход децимирующего фильтра без линейных искажений, так как число сумматоров на входе идеального квантователя совпадает с порядком конечной разности сигнала на его выходе.

Автокорреляционная функция сигнала на выходе фильтра, вычисляющего  $r$ -ю конечную разность выходного сигнала квантователя, при подаче на его вход белого шума с единичной дисперсией определяется вытекающим из (1.5) соотношением

$$R_r(\tau) = \binom{2r}{r + \tau} (-1)^\tau, \quad |\tau| \leq r. \quad (1.6)$$

Поэтому автокорреляционная функция шума на выходе  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma\text{М}$  равна свертке этой функции и корреляционной функции шума квантования

$$R_m(\tau) = \sum_{\theta=-r}^r R_r(\theta + \tau) \binom{2r}{r + \theta} (-1)^\theta. \quad (1.7)$$

В связи с изложенным для определения характеристик шума  $n(s)$  на выходе  $\Delta\Sigma\text{М}$  необходимо нахождение корреляционной функции шума квантования.

**2. Основные расчетные соотношения.** Используя соотношение для ошибки квантования из [4]:

$$\xi(z) = \frac{q}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k} \exp i 2\pi k z / q, \quad (2.1)$$

можно записать выражение для корреляционной функции шума квантования

$$R_{r\xi}(\tau) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \frac{u^2}{4\pi^2} \sum_{k \neq 0} \sum_{m \neq 0} \frac{(-1)^{k+m}}{km} \exp i 2\pi (kz_0(s + \tau) + mz_0(s)), \quad (2.2)$$

где  $u$  — диапазон входных значений сигнала ( $0 \leq x \leq u$ ), а величина  $z_0(s)$  на  $s$ -м такте на входе идеального квантователя

$$z_0(s) = \varphi_0(s) + \sum_{i=1}^r \varepsilon_0 P_{r-i}(s). \quad (2.3)$$

В этом соотношении величины  $\varepsilon_{01} = \varepsilon_1/u, \dots, \varepsilon_{0r} = \varepsilon_r/u$  — нормированные начальные условия (содержимые сумматоров), а полином

$$P_r(s) = \frac{1}{r!} \prod_{k=0}^{r-1} (s+k). \quad (2.4)$$

При произвольном сигнале на входе  $\Delta\Sigma\text{М}$  первое слагаемое в (2.3)

$$\varphi_{0r}(s) = \sum_{i_1=1}^{i_2} \dots \sum_{i_r=1}^s x_0(i_1), \quad (2.5)$$

где  $x_0(i_1) = x(i_1)/u$ .

Если входной сигнал постоянен:

$$x_0(i_1) = x_0, \quad (2.6)$$

то очевидно, что

$$\varphi_{0r}(s) = x_0 P_r(s). \quad (2.7)$$

Отметим, что если входной сигнал и начальные условия являются рациональными числами:

$$x_0 = K/N, \quad \varepsilon_{0i} = K_i/N_i \quad (i = 1, \dots, r), \quad (2.8)$$

то соотношение (2.2) для корреляционной функции становится периодичным с некоторым периодом  $M$  и суммирование по индексу  $s$  в ней нужно вести на длине этого периода ( $S = M$ ).

Для оценки точности каскадных  $\Delta\Sigma\text{М}$  естественно рассматривать соотношение (2.2) для корреляционной функции, усредненное по начальным условиям. В этом случае экспоненту в (2.2) следует заменить ее математическим ожиданием

$$\begin{aligned} & \langle \exp i 2\pi (k z_{0r}(s+\tau) + m z_{0r}(s)) \rangle_{\{\varepsilon_{0i}\}} = \\ & = \exp i 2\pi (k \varphi_{0r}(s+\tau) + m \varphi_{0r}(s)) \tilde{f}_{\{\varepsilon_{0i}\}}(2\pi(k P_{r-1}(s+\tau) + \\ & + m P_{r-1}(s)), \dots, 2\pi(k+m)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

В (2.9) второй множитель является значением  $r$ -мерной характеристической функции начальных условий при соответствующих значениях аргументов.

Отметим, что с учетом результатов предыдущего раздела статьи соотношение (2.2) является основополагающим для анализа корреляционной функции шума квантования многокаскадных  $\Delta\Sigma\text{М}$ .

3. Однокаскадный дельта—сигма-модулятор. Этот случай рассмотрен достаточно тщательно (например, [1, 2]). Тем не менее представляется целесообразным конкретизировать для этого случая соотношения из предыдущего раздела. Для однокаскадного  $\Delta\Sigma\text{М}$  при постоянном сигнале  $x_0$  на его входе аргумент показательной функции

$$z_{01}(s) = s x_0 + \varepsilon_{01}, \quad (3.1)$$

и соотношение (2.2) для корреляционной функции шума квантования до ее усреднения по начальным условиям может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_{1\delta}(\tau) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \frac{u^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{km} (\cos 2\pi((k-m)sx_0 + k\tau x_0 + \\ + (k-m)\varepsilon_{01}) - \cos 2\pi((k+m)sx_0 + k\tau x_0 + (k+m)\varepsilon_{01})). \end{aligned} \quad (3.2)$$

В (3.2) можно выделить слагаемое, не зависящее от индекса суммирования  $s$  и начальных условий  $\epsilon_{01}$  ( $k - m = 0$ ):

$$R_{1\zeta}^*(\tau) = \frac{u^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi k \tau x_0. \quad (3.3)$$

Именно это слагаемое является корреляционной функцией шума квантования.

Рассмотрим далее величину

$$\delta R_{1\zeta}(\tau) = R_{1\zeta}(\tau) - R_{1\zeta}^*(\tau). \quad (3.4)$$

Заменим в ней косинусы полусуммой экспонент и просуммируем по  $s$ , используя формулу для геометрической прогрессии. Тогда

$$\begin{aligned} \delta R_{1\zeta}(\tau) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \frac{u^2}{4\pi^2} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{km} \left( \frac{A_{km}((+), (-))(1 - B_{km}((+), (-), S))}{B_{km}((-), (-), 1)(1 - B_{km}((+), (-), 1))} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A_{km}((-), (-))(1 - B_{km}((-), (-), S))}{B_{km}((+), (-), 1)(1 - B_{km}((-), (-), 1))} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{km} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{A_{km}((+), (+))(1 - B_{km}((+), (+), S))}{B_{km}((-), (+), 1)(1 - B_{km}((+), (+), 1))} + \frac{A_{km}((-), (+))(1 - B_{km}((-), (+), S))}{B_{km}((+), (+), 1)(1 - B_{km}((-), (+), 1))} \right) \right\}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{km}((+), (-)) &= \exp(+i2\pi(k\tau x_0 + (k(-)m)\epsilon_{01})); \\ B_{km}((+), (-), S) &= \exp(+i2\pi(k(-)m)x_0 S). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что при неограниченном увеличении  $S$  величина  $\delta R_{1\zeta}(\tau)$  обращается в нуль, если знаменатели прогрессий  $B_{km}((+), (-), 1)$  не равны единице. Для рационального сигнала  $x_0 = K/N$  величина  $S = N$ , и в соотношении (3.5) от нуля отличаются только те члены, для которых выполняются условия:

$$\begin{aligned} (k - m) &= \pm pN, \quad p = 1, \dots; \\ (k + m) &= pN, \quad p = 1, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

В этом случае отношения

$$\frac{1 - B_{km}((+), (-), S)}{SB_{km}((-), (-), 1)(1 - B_{km}((+), (-), 1))} = 1, \quad (3.8)$$

и величина

$$\begin{aligned} \delta R_{1\zeta}(\tau) &= \frac{u^2}{2\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{pk} \left( 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+pm)} \cos 2\pi(k\tau x_0 + pN\epsilon_{01}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{pN-1} \frac{1}{k(pN-k)} \cos 2\pi(k\tau x_0 + pN\epsilon_{01}) \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Используя далее [5], соотношение (3.9) можно привести к виду

$$\delta R_{1\zeta}(\tau) = \frac{u^2}{\pi^2 N^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{kN}}{k^2} \cos 2\pi k N \epsilon_{01}. \quad (3.10)$$

Так как величина  $\delta R_{1\xi}(\tau)$  не зависит от временного сдвига  $\tau$ , то ее свертка с величиной, определяемой соотношением (1.6) ( $r = 1$ ), равна нулю.

В соответствии с [5] сумма (3.3) является разложением в тригонометрический ряд функции

$$R_{1\xi}^*(\tau) = \frac{u^2}{2} (1/6 - |\xi(\tau x_0)| + \xi^2(\tau x_0)), \quad (3.11)$$

где  $\xi(\tau x_0) = \tau x_0 - [\tau x_0]$  — ошибка квантования величины  $\tau x_0$ .

Если использовать это соотношение, то корреляционная функция шума на входе децимирующего фильтра

$$R_{1n}(\tau) = \frac{u^2}{2} (-2|\xi(\tau x_0)| + |\xi((\tau + 1)x_0)| + |\xi((\tau - 1)x_0)| + 2\xi^2(\tau x_0) - \xi^2((\tau + 1)x_0) - \xi^2((\tau - 1)x_0)). \quad (3.12)$$

Отметим, что усреднение корреляционной функции (3.3) по входному сигналу  $x_0$  при его равномерном распределении в интервале  $(0, 1)$  показывает, что шум квантования оказывается белым с энергией  $u^2/12$ , а спектр шума на входе децимирующего устройства находится преобразованиями Фурье от функции, определяемой соотношением (1.6) при  $r = 1$ . Асимптотическая зависимость спектра мощности шума квантования от распределения сигнала  $x_0$  рассмотрена в [2].

4. Двухкаскадный дельта—сигма-модулятор. Этот случай частично рассмотрен в работах [1, 6]. Для двухкаскадного  $\Delta\Sigma M$  при постоянном сигнале  $x_0$  на его входе величина (2.3) на входе идеального квантователя принимает следующий вид ( $r = 2$ ):

$$z_{02}(s) = \frac{s(s-1)}{2} x_0 + s\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02}. \quad (4.1)$$

В соответствии с (4.1) корреляционная функция шума квантования (2.2)

$$R_{2\xi}(\tau) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \frac{u^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{km} \left( \cos 2\pi \left( (k-m) \frac{s(s+1)}{2} x_0 + k s \tau x_0 + k \frac{\tau(\tau+1)}{2} x_0 + (k-m)s\varepsilon_{01} + k \tau \varepsilon_{01} + (k-m)\varepsilon_{02} - \cos 2\pi \left( (k+m) \frac{s(s+1)}{2} x_0 + k s \tau x_0 + k \frac{\tau(\tau+1)}{2} x_0 + (k+m)s\varepsilon_{01} + k \tau \varepsilon_{01} + (k+m)\varepsilon_{02} \right) \right). \quad (4.2)$$

Выделим из (4.2) слагаемое, отвечающее условию  $k - m = 0$ :

$$R_{2\xi}^*(\tau) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \frac{u^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi \left( k s \tau x_0 + k \frac{\tau(\tau+1)}{2} x_0 + k \tau \varepsilon_{01} \right). \quad (4.3)$$

Это соотношение также вытекает из (4.2) после его усреднения по величине  $\varepsilon_{02}$ , непрерывно и равномерно распределенной в интервале значений  $(0, 1)$ .

После усреднения соотношения (4.3) по индексу  $s$

$$R_{2\xi}^*(\tau) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \frac{u^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left( \frac{A((+))(1-B((+), S))}{B((-), 1)(1-B((+), 1))} + \frac{A((-))(1-B((-), S))}{B((+), 1)(1-B((-), 1))} \right), \quad (4.4)$$

где

$$A((+)) = \exp(+i2\pi \left( k \frac{\tau(\tau+1)}{2} x_0 + k\tau\epsilon_{01} \right)), \quad (4.5)$$

$$B((+), S) = \exp(+i2\pi k\tau x_0 S).$$

Для рационального сигнала  $x_0 = K/N$  величина  $S = N$ , и в соотношении с (4.4) остаются только те члены, для которых

$$k\tau = pN, \quad p = 1, \dots \quad (4.6)$$

Тогда

$$R_{2\tau}^*(0) = u^2/12; \quad (4.7)$$

$$R_{2\tau}^*(|\tau| > 0) = \frac{u^2 p^2(\tau, N)}{2\pi^2 N^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi k N \tau \epsilon_{01} / p(\tau, N),$$

где  $p(\tau, N)$  — наибольший общий делитель сдвига  $\tau$  и знаменателя  $N$ .

Иррациональный сигнал  $x_0$  является пределом последовательности подходящих рациональных дробей, у которых знаменатель  $N$  неограниченно возрастает. Поэтому, как следует из соотношения (4.7), шум квантования для иррационального входа  $x_0$  оказывается белым с энергией  $R_{2\tau}^*(0) = u^2/12$ , и, следовательно, нормированная автокорреляционная функция шума на входе децимирующего фильтра совпадает с соотношением (1.6) при  $r = 2$ .

Из (4.7) следует, что при равномерном распределении  $\epsilon_{01}$  в пределах  $(0, 1/N)$  после усреднения по этой величине шум квантования и при рациональном сигнале становится белым с дисперсией  $u^2/12$ . Если же начальные условия  $\epsilon_{01}$  распределены равномерно в пределах  $(0, 1)$ , шум становится белым при любом значении сигнала  $x_0$  и начальных условий  $\epsilon_{02}$ .

Рассмотрим далее поведение величины

$$\delta R_{2\tau}(\tau) = R_{2\tau}(\tau) - R_{2\tau}^*(\tau) \quad (4.8)$$

при фиксированных начальных условиях  $\epsilon_{01}$  и  $\epsilon_{02}$ .

Анализ соотношения (4.8) показывает, что, например, если величины  $N$  и  $N_1$  являются простыми числами, то отличными от нуля в соотношении (4.8) оказываются те слагаемые, для которых выполняются условия:

$$\begin{aligned} k - m &= \pm pN, & p &= 1, \dots; \\ k + m &= pN, & p &= 1, \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для рациональных сигналов  $x_0 = K/N$  и начальных условий  $\epsilon_{01} = K_1/N_1$  период выходной последовательности  $M$  двухкаскадного  $\Delta\Sigma\text{М}$  оказывается равным наименьшему общему знаменателю этих величин, и суммирование по индексу  $s$  нужно вести в пределах от единицы до  $s = M = S$ . Поэтому, если одна из величин  $x_0$  или  $\epsilon_{01}$  (или обе вместе) является иррациональной, то период  $M = S$  неограниченно возрастает, а величина  $\delta R_{2\tau}(\tau)$  оказывается равной нулю.

Кроме рассмотренных выше слагаемых, величина  $\delta R_{2\tau}(\tau)$  содержит не зависящий от сдвига  $\tau$  член, аналогичный постоянному смещению (3.10) для однокаскадного  $\Delta\Sigma\text{М}$ . Его свертка с (1.6) равна нулю.

Отметим, что если сигнал  $x_0$  имеет любое непрерывное распределение, то усредненный по его значениям шум квантования, как следует из изложенного выше, является белым с дисперсией  $R_{2\tau}^*(0) = u^2/12$ .

Отметим также, что в зависимости от начальных условий флуктуации корреляционной функции шума квантования и, следовательно, шума на входе

децимирующего фильтра довольно существенны, если величина  $N$  невелика. Например, дисперсия шума может отличаться в несколько раз. Эти флуктуации уменьшаются с ростом  $N$ .

5. Дельта—сигма-модулятор с большим числом каскадов. Корреляционная функция шума квантования  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$ М для конкретного набора начальных условий  $\{\varepsilon_{0i}\}$ , определяется соотношением (2.2). Обобщая результаты предыдущих разделов для рассматриваемого случая, можно утверждать, по-видимому, следующее. Если измеряемая величина  $x_0$  или хотя бы одно из начальных условий  $\varepsilon_{0i}$  ( $i \leq r - 2$ ) иррациональны, то шум квантования оказывается белым с дисперсией  $R_{2k}(0) = u^2/12$ .

Из рассмотрения усреднения по сигналу  $x_0$  и начальным условиям корреляционной функции шума квантования, когда экспоненты в (2.2) заменяются их математическими ожиданиями (2.9), следует, что шум квантования  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$ М оказывается белым при любом сигнале  $x_0$ , если одно из начальных условий  $\varepsilon_{0i}$  ( $1 \leq i \leq r - 2$ ) имеет любое непрерывное распределение или начальные условия  $\varepsilon_{0i}$  распределены равномерно на интервале  $(0, 1)$ .

Если шум квантования белый, то автокорреляционная функция шума на выходе  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$ М описывается соотношением

$$R_{rn}(\tau) = (u^2/12)R_r(\tau), \quad (5.1)$$

где  $R_r(\tau)$  определяется формулой (1.6).

6. Переменный сигнал на входе каскадного дельта—сигма-модулятора. Рассмотрим сигнал  $x_0(s)$ , являющийся стационарным случайным процессом с любым непрерывным распределением.

Для однокаскадного  $\Delta\Sigma$ М корреляционная функция шума квантования

$$R_{1k}(\tau) = \frac{u^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\tilde{f}_{x_{0\Sigma}}(\tau, 2\pi k) + \tilde{f}_{x_{0\Sigma}}(\tau, -2\pi k)), \quad (6.1)$$

где  $\tilde{f}_{x_{0\Sigma}}(\tau, z)$  — характеристическая функция величины

$$x_{0\Sigma} = \sum_{m=1}^{\tau} x_0(s + m). \quad (6.2)$$

При высокой передискретизации (сильной коррелированности значений сигнала  $x_0(s)$ )

$$x_{0\Sigma} \cong \tau x_0(s), \quad (6.3)$$

и корреляционная функция

$$R_{1k}(\tau) \cong \frac{u^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\tilde{f}_{x_0}(2\pi k\tau) + \tilde{f}_{x_0}(-2\pi k\tau)), \quad (6.4)$$

где  $\tilde{f}_{x_0}(2\pi k\tau)$  — характеристическая функция  $x_0$ .

При допущении (6.3) корреляционная функция шума на выходе однокаскадного  $\Delta\Sigma$ М в асимптотике

$$R_{1n}(\tau) = \frac{u^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (2\tilde{f}_{x_0}(2\pi k\tau) + 2\tilde{f}_{x_0}(-2\pi k\tau) - \tilde{f}_{x_0}(2\pi k(\tau - 1)) - \tilde{f}_{x_0}(-2\pi k(\tau - 1)) - \tilde{f}_{x_0}(2\pi k(\tau + 1)) - \tilde{f}_{x_0}(-2\pi k(\tau + 1))). \quad (6.5)$$



Для  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$  при  $r \geq 2$  и любом непрерывном распределении сигнала  $x_0(s)$  шум квантования оказывается белым, и корреляционная функция шума на выходе  $\Delta\Sigma$  описывается соотношением (5.1).

7. Влияние аддитивного независимого случайного шума на входе дельта—сигма-модулятора. Сначала приведем основные соотношения для  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$  в рассматриваемом случае:

$$y(s) = x(s) + \zeta(s) + n(s), \quad (7.1)$$

где  $n(s)$  — шум на выходе  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$ , определяемый соотношением (1.5);  $\zeta(s)$  — шум на входе  $\Delta\Sigma$ .

Как следует из (1.1), шумом измерения величины  $x(s)$  уже нужно считать величину

$$n_{\Sigma}(s) = \zeta(s) + n(s). \quad (7.2)$$

Ее корреляционная функция

$$R_{n_{\Sigma}}(\tau) = R_{\zeta}(\tau) + R_n(\tau), \quad (7.3)$$

так как величины  $\zeta(s)$  и  $n(s)$  оказываются некоррелированными при непрерывном распределении  $\zeta(s)$ .

Из соотношений (7.1) и (7.3) видно, что аддитивный шум  $\zeta(s)$  на входе  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$ , подвергаясь одинаковым операциям со входным сигналом, может быть подавлен децимирующим фильтром только в случае существенного различия в спектральном составе с сигналом  $x(s)$  (см., например, [3]).

Рассмотрим однокаскадный  $\Delta\Sigma$ . Используя тригонометрическое разложение ошибки квантования [4] и выделяя главный член в корреляционной функции ошибки квантования, получим следующее соотношение для корреляционной функции шума квантования:

$$R_{2\zeta}^*(\tau) = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \frac{u^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi \left( \sum_{m=1}^{\tau} x_0(s+m) + \sum_{m=1}^{\tau} \zeta_0(s+m) \right). \quad (7.4)$$

Здесь  $\zeta_0(s+m) = \zeta(s+m)/u$  ( $0 \leq x(s) + \zeta(s) \leq u$ ). Если сигнал постоянен ( $x_0(s) = x_0$ ), то после усреднения (7.4) по реализациям аддитивного шума  $\zeta_0(s)$

$$\langle R_{2\zeta}^*(\tau) \rangle_{\zeta} = \frac{u^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi k \tau x_0 \tilde{f}_{\zeta}(\tau, 2\pi k), \quad (7.5)$$

где  $\tilde{f}_{\zeta}(\tau, 2\pi k)$  — характеристическая функция величины

$$\zeta_{0\Sigma}(s) = \sum_{m=1}^{\tau} \zeta_0(s+m). \quad (7.6)$$

В соотношении (7.5) предполагается для простоты, что характеристическая функция четная.

Как следует из (7.5), аддитивный шум  $\zeta_0(s)$ , поступающий на вход  $\Delta\Sigma$  совместно с сигналом  $x(s)$ , частично отбеливает корреляционную функцию шума квантования, так как для характеристической функции всегда выполняется неравенство  $\tilde{f}_{\zeta}(\tau, 2\pi k) \leq 1$ .

Если сигнал  $x(s)$  случаен и стационарен, то при его сильной коррелированности  $\left( \sum_{m=1}^i x_0(s+m) \approx \tau x_0(s) \right)$  после усреднения по реализациям сигнала  $\langle x_0(s) \rangle = 1/2$

$$\langle R_{2k}^*(\tau) \rangle_{\zeta_0, x_0} = \frac{u^2}{\tau-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{kt}}{\tau^2} \tilde{f}_{x_0}(2\pi k\tau) \tilde{f}_{\zeta_0}(\tau, 2\pi k), \quad (7.7)$$

Показано, что эквивалентной схемой  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$  является последовательное соединениис  $r$ -кратного сумматора, идеального квантователя и вычислителя  $r$ -конечной разности. Это обстоятельство дало возможность использовать для анализа статистических характеристик шума квантования его классическое тригонометрическое разложение, позволяющее для любого числа каскадов учитывать начальные условия и рассматривать произвольный входной сигнал. Показана также эффективность такого подхода путем достаточно простого вывода новых и ранее полученных соотношений для характеристик шума  $r$ -каскадного  $\Delta\Sigma$ .

Авторы выражают благодарность канд. физ.-мат. наук Ю. В. Бондаренко за компьютерное моделирование поведения  $\Delta\Sigma$  второго порядка, позволившее проверить обоснованность некоторых положений, сделанных при анализе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oversampling Delta-Sigma Data Converters. Theory, Design and Simulation* /Ed. J. C. Candy, G. C. Temes. IEEE Press., 1992.
2. Ефимов В. М., Касперович А. Н. О статистических характеристиках шума в АЦП с дельта—сигма-модуляцией первого порядка // *Автометрия*. 1995. № 2.
3. Ефимов В. М., Касперович А. Н. Потенциальная точность некоторых измерительных схем // *Автометрия*. 1995. № 3.
4. Bennet W. F. Spectra of quantized signals // *BSTJ*. 1948. 27, N 3.
5. Прудников А. П., Бычков Ю. А., Марычев О. И. *Интегралы и ряды*. М.: Наука, 1981.
6. Wong P. W., Gray P. M. Two-stage sigma-delta modulation // *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Process.* 1990. 38, N 11.

*Поступила в редакцию 18 июня 1996 г.*