РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1996

УДК 621.394

А. И. Литвин

(Томск)

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ВИДА ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрены способы реставрации оригинала изображения с линейной импульсной функцией, и обосновывается применение в них ортогональных дискретных преобразований. Приведены примеры восстановления искаженных изображений со среднеквадратичной оценкой погрешностей.

Постановка задачи. Пусть двумерный сигнал на выходе определяется выражением

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \tag{1}$$

где (x, y) — аргументы сигнала; $f(x, y)$ — исходный сигнал (оригинал); $h(x, y, \xi, \eta)$ — импульсная функция, являющаяся в случае линейности системы функцией рассеяния точки (ФРТ). Пусть двумерный сигнал $f(x, y)$ отличается от нуля лишь в прямоугольной области и представляется сеткой отсчетов с помощью дискретизации его по координатам с шагом T:

$$g(m, n) = \begin{cases} g(mt, nt), & (m, n) \in [0, M-1] \times [0, N-1], \\ 0, & (m, n) \notin [0, M-1] \times [0, N-1], \end{cases} \tag{2}$$

где M и N — размеры информативной части массива входных отсчетов. Будем считать, что шаг дискретизации T достаточно мал, чтобы пренебрегать эффектами наложения спектров при дискретизации. Таким образом, спектр входного сигнала должен быть ограничен. В силу теоремы Котельникова дискретизация сигнала с шагом T не должна сопровождаться потерей информации. Тогда выражение (1) может быть заменено дискретным [1—6]:

$$g_{k,l} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{m,n} h_{k,m;l,n}, \tag{3}$$

где $g_{k,l} = g(kT, lT)$, $h_{p,q} = h(pT, qT)$.

Требуется определить отсчеты входного сигнала в прямоугольной области $(k, l) \in [k_1, k_2] \times [l_1, l_2]$, где k_1, k_2, l_1, l_2 — границы прямоугольной области. Смысл реставрации оригинала состоит в возможности воспроизвести инверсию искажений, внесенных в оригинал $f(\xi, \eta)$ системой изображения. На этот счет имеются четыре предположения, которые касаются импульсной характеристики $h(x, y, \xi, \eta)$.

В работе [6] подробно проводится оценка этих предположений. Перечислим их в порядке возрастания сложности:

а) разделимая пространственно-инвариантная функция рассеяния точки (РПИФРТ) $h(x, y, \xi, \eta) = a(x - \xi)b(y - \eta)$;

б) разделимая пространственно-зависимая функция рассеяния точки (РПЗФРТ) $h(x, y, \xi, \eta) = a(x, \xi)b(y, \eta)$;

в) неразделимая пространственно-инвариантная функция рассеяния точки (НПИФРТ) $h(x, y, \xi, \eta) = h(x - \xi, y - \eta)$;

г) неразделимая пространственно-зависимая функция рассеяния точки (НПЗФРТ) $h(x, \xi, y, \eta) = h(x, y, \xi, \eta)$.

Восстановление пропущенных данных. Рассмотрим восстановление участков видеоданных, экранированных облаками, в статистике спутниковых наблюдений. Общеизвестны затруднения, связанные с анализом аэрокосмической видеоинформации, полученной в условиях наблюдения, когда облака подстилающей поверхности Земли закрыты туманом или фрагментами облаков, имеющих высокую оптическую плотность. В этом случае применение стандартных методов восстановления изображений с использованием, например, линейной модели, описывающей процесс переноса изображения через оптически плотные рассеивающие среды, который имеет вид функционала свертки искомого изображения с ФРТ, не позволяет получить сколь угодно удовлетворительные результаты. Между тем в разделах математической статистики развит аппарат восстановления пропущенных компонент и построение решающих правил статистического вывода при наблюдении векторных данных, когда в них имеются пропуски. Методы восстановления пропущенных значений основаны на использовании информации, закодированной в связях между компонентами вектора наблюдаемых данных, т. е. из контекста совместных связей. Поэтому для решения указанной задачи широко используются подходы, основанные на оценивании неизвестных параметров статистических моделей. Так, например, для целей восстановления дефектных строк растровых изображений и их экономного представления используются алгоритмы фильтрации. Восстанавливающими свойствами обладают линейные модели описания данных в базисах линейно независимых функций, в простейшем случае это может быть тригонометрический базис Фурье. Хотя с теоретической точки зрения выбор системы базисных функций не играет принципиальной роли для решения задачи восстановления пропущенных значений, однако учитывая высокую размерность видеоданных, которая определяется числом функций базисного пространства, становится понятным, что успех решения задачи целиком определяется аппроксимирующимися свойствами выбранного базиса описывать ансамбль изображений сравнительно небольшим числом базисных функций. В связи с вышеизложенным довольно подходящим базисом для этой цели является базис Карунена — Лоэва. Но его нахождение во многих случаях является затруднительным. Поэтому предлагается использовать для восполнения пробелов в экспериментальных данных базис функций Уолша.

Использование избыточности преобразований Уолша в заполнении пробелов в экспериментальной информации [9—12]. Анализ данных — важный этап всякого экспериментального или статистического исследования, в ходе которого изучаются свойства A некоторого объекта X. Объекты и их свойства могут быть различными в различных областях науки и техники. Свойства каждого объекта запишем в виде строк, а сами объекты — в виде столбцов. В результате получается таблица «объект—свойство» (ТОС) размером $M \times N$, которая используется для анализа наблюдений с целью выявления определенных закономерностей.

Очень часто встречаются ТОС с пробелами, и исследователю приходится дозаполнять пропущенные исходные данные.

Пусть имеется ТОС экспериментальных данных, у столбцов которых есть пробелы. Часто статистический анализ данных сводится к нахождению числовых характеристик временных рядов: статистического среднего, среднеквадратичного отклонения, коэффициентов вариации, асимметрии, эксцесса, а также матриц ковариации и корреляции и т. д. Очень важно определить первую из упомянутых выше характеристик временного ряда, так как она используется в вычислениях других статистических параметров ТОС. Кроме того, если в столбцах ТОС будет различное число признаков, то ряд статистических параметров, например коэффициенты корреляции, невозможно определить точно.

Предлагаются алгоритмы восстановления пропусков с применением ОДП Уолша. Для интерполяции возможно использовать полиномы Лагранжа и преобразования Фурье [1—3, 5, 13]. Но с увеличением количества узлов интерполяции степень полинома Лагранжа увеличивается, что отрицательно сказывается на точности вычислений. Преобразование Фурье занимает в памяти ЭВМ два массива: для действительной и мнимой частей коэффициентов преобразования — и уступает в быстродействии преобразованию Уолша почти в 2 раза. Среди преобразований Уолша оказалось, что преобразование Уолша — Пэли обладает наилучшими аппроксимационными свойствами.

Разобьем столбец ТОС на интервалы. Число интервалов рекомендуется выбирать по формулам

$$\begin{cases} n = 1 + 3{,}33\log_2 N & \text{при } N \le 100, \\ n = 5\log_2 N & \text{при } N > 100, \end{cases}$$

где N — длина выборки. В каждом интервале число значений признаков должно быть равным степени двойки (интервалы могут перекрываться). Выполним прямое ОДП Уолша — Пэли для каждого интервала:

$$Y = (1/h)H_p(h)X,$$

где X — известные значения признаков интервала, а h — длина интервала.

Расширим вектор-столбец Y нулевым вектор-столбцом Z такой же размерности, что и вектор-столбец Y. В зависимости от цели интерполяции значения вектор-столбца Z будем располагать между значениями вектор-столбца Y или в качестве добавки. К новому вектор-столбцу Y_0 (удвоенной длины) применим ОДП Уолша — Пэли и получим

$$X_0 = H_p^{-1}(2h)Y_0,$$

где $H_p^{-1}(2h)$ — матрица обратного преобразования Уолша — Пэли порядка $2h$. Использование алгоритма ортогональной интерполяции допускает возможность «восстановления» пропущенных значений до 50 %.

Второй способ заполнения пробелов экспериментальных данных состоит в следующем. Разобьем весь столбец на ряд интервалов длиной степени двойки. На место пропущенных значений признаков проставим статистические средние интервалов, а затем выполним прямое ОДП Уолша — Пэли:

$$Y = (1/h)H_p^{-1}(h)X,$$

где h — длина интервала; X — измеренные и среднестатистические данные. Затем значения столбца Y изменим: на место пропущенных данных проставим нули. К измененному вектор-столбцу Y_0 применим обратное ОДП Уолша — Пэли и получим

$$X_0 = H_p(h)Y_0.$$

Третий способ восстановления пропущенных данных аналогичен предыдущему. Только вместо статистических средних проставляются величины невязки. Известно следующее свойство матриц Уолша:

$$hX_i = \sum_{i=1}^{h} Y_i,$$

где X_i — первый признак исходных данных соответствующего интервала; Y_i — коэффициенты ОДП Уолша — Пэли.

Будем считать, что имеется интервал исходных данных, полученных в результате преобразования Уолша — Пэли. Тогда невязку

$$\Delta = hX_i - \sum_{i=1}^{h} Y_i$$

распределим равномерно относительно пропущенных данных. Далее производятся те же действия, что и во втором алгоритме.

Все три алгоритма заполнения пропусков с использованием ОДП Уолша — Пэли применялись при восстановлении пропусков пиков спектров органических смесей и видеоданных. Выборки состояли из столбцов по 32—64 отсчета. Выборки разбивались на четыре интервала. Длина интервалов равнялась 8—16 отсчетам.

Способы заполнения пропусков экспериментальных данных являются простыми и эффективными. Эффективность предложенных способов достигается за счет избыточности преобразований Уолша — Пэли [1—3, 7—12]. Избыточность ОДП Уолша — Пэли дает возможность «восстанавливать» пропущенные экспериментальные данные до 40—50 %.

Алгоритмы восстановления изображений. В качестве математического аппарата процессов восстановления изображений используем алгебру матриц. Будем считать, что $M = N$. Запишем выражение (1) в матричном виде:

$$HF = G, \tag{4}$$

где H — теплицева матрица. Рассмотрим случаи «а—в». Заметим, что представление (4) не всегда возможно для случаев «б» и «в» [6].

Теплицеву матрицу H представим в виде

$$H = B\widetilde{H}B^t,$$

где $B = [E_N \mid O_N]$, E_N, O_N — единичная и нулевая матрицы порядка $N = 2^n$; $\widetilde{H}$ — циркулянтная матрица порядка $2N$, первой строкой которой является $\{h_0, h_1, ..., h_{N-1}, h_{-N+1}, h_{-N+2}, ..., h_{-2}, h_{-1}\}$; t — символ транспонирования. Найдем для больших N обратную матрицу $H^{-1} \approx (B^t)^+ \widetilde{H}^{-1} B^+$; где B^+ и $(B^t)^+$ — псевдообратные матрицы относительно матриц B и B^t [14, 15]; $\widetilde{H}^{-1} = T^{-1}\Lambda T$; T и T^{-1} — прямое и обратное преобразования Фурье; Λ — диагональная матрица. Собственные векторы матрицы $\widetilde{H}$ есть элсменты столбцов $V_{kj} = \theta^{jk}$, $j = \overline{0, 2N-1}$; $\theta = \exp(\pi i/N)$. Им соответствуют собственные значения, представимые в виде [16, 17]:

$$\lambda_k = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} h_j \theta^{-jk}, \quad k = \overline{0, 2N-1}.$$

В последней формуле считается, что $h_N = h_0$; $h_{N+1} = h_{-N+1}$, ..., $h_{2N-1} = h_{-1}$. Тогда матрица $\widetilde{H}^{-1}$ является матрицей с элементами

$$\widetilde{h}_k^{-1} = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \lambda_j^{-1} \theta^{-jk}, \quad k = \overline{0, 2N-1}.$$

Решение выражения (1) запишем в виде $F = H^{-1}G$. Если матрица H является теплицевой и симметрической, то преобразование Фурье обеспечивает почти диагонализацию матрицы H, т. е. теплицевы симметрические матрицы могут быть аппроксимированы матрицами-циркулянтами. В этом случае наилучшие результаты — матрица H имеет большой порядок N и недостаточно коррелированные отсчеты изображения (относительно быстрое уменьшение корреляции между близко находящимися отсчетами изображения).

Используем итерационный процесс, описанный выше. Пусть $H = B - G$, где B — матрица, ортогонально подобная диагональной матрице Q. В качестве ОДП можно использовать преобразования Фурье, Уолша, Хартли, Хаара и другие. Тогда решение матричного уравнения (1) примет вид

$$F = B^{-1}G + B^{-1}CF. \tag{5}$$

Итерации будем вычислять по формуле

$$F^{(j+1)} = B^{-1}G + B^{-1}CF^{(j)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Итерационный процесс сходится, если $\| B^{-1}C \| < 1$. С помощью ОДП можно найти обратную матрицу B^{-1}: $TBT^{-1} = Q$; $TB^{-1}T^{-1} = Q$; $B^{-1} = T^{-1}Q^{-1}T$. Так как матрица Q диагональная, то нахождение матрицы B^{-1} сводится к двухкратному ОДП. Заметим, что в качестве матрицы B можно использовать циркулянтную матрицу [17]. Выражение (5) запишем в виде

$$F = B^{-1}G - (B^{-1}H - \alpha E)F,$$

где E — единичная матрица порядка N; α — параметр регуляризации. Отсюда следует, что

$$F^{(j+1)} = B^{-1}G + B^{-1}CF^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

или

$$F^{(j+1)} = B^{-1}G - (B^{-1}H - \alpha E)F^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Параметр α необходимо выбирать достаточно малым, чтобы решения F были близки к истинным, а все вычисления должны быть проведены с достаточной точностью, так как при слишком малом параметре α возникают переполнения для тех коэффициентов, где $\lambda_i = 0$ (собственные значения матрицы H). Параметр регуляризации α можно определять следующим образом [18, 19]:

$$\alpha_{ki} = \| H^t (HF^{(k)} - G) \|^2 / \| HF^{(k)} - G \|^2$$

— или согласно обобщенному принципу невязки [18, 19].

Рассмотрим пример изображений, искаженных импульсной системой $h(x, y, \xi, \eta)$, которая задавалась одномерной симметрической функцией с экспоненциальным убыванием. Импульсная функция $[h_{ij}]$, $i, j = \overline{0, N-1}$, представлялась в виде теплицевой симметрической матрицы:

$$[h_{ij}] = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_{N-1} \\ h_1 & h_0 & h_1 & \ldots & h_{N-2} \\ h_2 & h_1 & h_0 & \ldots & h_{N-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & h_{N-3} & \ldots & h_0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотренные алгоритмы восстановления изображений применялись при решении задач в случае равномерного смаза [20]. Искажение возникало за счет равномерного прямолинейного движения при параллельном смещении плоскостей объекта и изображения. Данные алгоритмы использовались и для квадратной апертуры, описываемой импульсной функцией

$$h(x, y) = \exp[-c(x^2 + y^2)],$$

где c — определенный параметр. Для оценки качества восстановленного изображения использовался среднеквадратичный критерий оценки погрешности. Расхождения между оригиналом и восстановленным изображением не превышали 5 %.

Рассмотрим следующие алгоритмы восстановления изображений [21—23].

Считая известными матрицу ФРТ H и изображение g, восстановим оригинал f.

Пусть $H: G \to F$ — линейный ограниченный оператор; G и F — вещественные пространства Гильберта. Предположим, что уравнение $Hf = g$, $f \in F$, $g \in G$, имеет решение. Предлагается следующий итерационный процесс [24]:

$$f_{k+1} = f_k - (H^*H + \alpha_k E)^{-1} H^* r_k,$$

$$\alpha_k = \|H^* r_k\|^2 / \|r_k\|^2, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где E — единичная матрица; H^* — оператор, сопряженный с H; $r_k = Hf^{(k)} - g$ — невязка решения уравнения (1). Пусть в конечномерном пространстве G^n задана матричная система уравнений:

$$HF = G.$$

Разбивая по столбцам или строкам матрицы G и F, получим СЛАУ. Решая эти СЛАУ вышеприведенным способом, можно добиться реставрации оригинала F. В большинстве случаев нахождение обратной матрицы $(H^*H + \alpha_k E)^{-1}$ представляет определенные вычислительные трудности, избежать которых возможно с помощью ОДП Фурье, Уолша, Хартли, Хаара и других. В этом случае для ее нахождения можно использовать два способа: с разложением обратной матрицы в ряд Неймана и итерационного процесса из [25, 26].

В случаях «а» и «в» используем следующий итерационный процесс. Аппроксимируем матрицу H циркулянтной матрицей. Пусть $N = 2^n$, где n — натуральное число. Воспользуемся свойствами ДПФ. Известно, что столбцы матриц ДПФ $T = (1/N)\exp(iwkj)$, $w = 2\pi i/N$; $k, j = \overline{0, N-1}$, как и столбцы обратной матрицы T^{-1}, отличающиеся от T только перестановкой столбцов, представляют собой собственные векторы для любой циркулянтной матрицы, т. е.

$$THT^{-1} \approx \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} = \Lambda.$$

Вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$, составленный из диагональных элементов матрицы Λ, может быть представлен в виде $\lambda = T\mathrm{a}$, где а — вектор, состоящий из элементов первого столбца матрицы H. Тогда $T^{-1}THT^{-1}TF = G$; $THT^{-1}TF = TG$. Отсюда $F_0 = T^{-1}\Lambda^{-1}TG$. Затем к приближенному решению СЛАУ F_0 применим известные итерационные алгоритмы решения СЛАУ, например метод проекций, который восстанавливает оригинал изображения с достаточно хорошей точностью [27]. При этом учитывают и другую полезную информацию. В частности, ограничение $F \geq 0$ можно использовать перед каждой итерацией. Если известно, что изображение ограничено определенной областью, то приравнивают нулю все отсчеты, лежащие вне этой области. С помощью метода проекций получается хорошая оценка $F(x, y)$, если в изображении присутствует аддитивный шум, т. е. $G(x, y) = H(x, y, \xi, \eta)F(x, y) + n(x, y)$, где $n(x, y)$ — шум. Рассмотренные алгоритмы применяются для восстановления изображений в случае квадратной и эллипсоидной апертур [6]. Квадратная апертура описывалась импульсной функцией $h(x, y) = \exp[-c(x^2 + y^2)]$, где c — параметр. В случае эллипсоидной апертуры

$$h(x - \xi, y - \eta) = \left(\frac{(x - \xi)^2}{a^2} - (y - \eta)^2\right)^{1/2}.$$

Для оценки восстановленного изображения использовался среднеквадратичный критерий ошибки, который не превышал 6 %.

Итерационные алгоритмы восстановления изображения. Задача реставрации изображения на основе интегральных уравнений относится к числу обратных задач, которые, как правило, некорректны. Некорректность задачи восстановления изображений состоит в том, что аддитивный аппаратурный шум, включая шум квантования, а также пространственные ограничения изображения и ФРТ, приводит к тому, что небольшие изменения исходного сигнала порождают значительные изменения в выходном сигнале. Решение некорректной задачи может быть получено только с некоторым приближением путем привлечения методов регуляризации.

Известны линейные алгоритмы реставрации изображений, такие как частотный инверсный фильтр, фильтр Винера и метод регуляризации А. Н. Тихонова. Отметим, что для реализации фильтра Винера необходимо априори знать спектральные плотности шума и искомого объекта, что крайне редко бывает на практике. Поэтому часто используют модификацию фильтра Винера, в которой отношение спектральных плотностей шума и объекта заменяют константой и получают фильтр Винера с параметром, подбором которого добиваются оптимального соотношения между ростом шума и сглаженностью восстановленного сигнала. Основную трудность при реализации метода Тихонова представляет выбор параметра регуляризации α. При наличии шума процесс выбора оптимального значения α автоматизации не поддается, поэтому на практике α_{opt} выбирается в процессе проведения экспериментов по минимуму нормированной среднеквадратичной ошибки решения относительно заданного эталонного изображения. В целом линейные алгоритмы характеризуются простотой и эффективностью реализации на ЭВМ, однако они не позволяют восстанавливать сильно подавленные частоты объекта. Для преодоления этого недостатка в ряде работ [22, 24, 27—29] предлагаются нелинейные итерационные алгоритмы, базирующиеся на различных физических и математических принципах.

Одним из таких нелинейных алгоритмов является итерационный алгоритм на основе нерасширяющихся операторов. Для данного типа алгоритмов существуют математически строгие правила обеспечения сходимости итерационного процесса, а сами итерации строятся по простой схеме, позволяющей привлекать ряд априорно известных свойств искомого объекта: неотрицательность, максимальную амплитуду, ограниченность пространственной протяженности и т. д. Возможно построение итераций с регуляризацией решений. С помощью итерационных алгоритмов можно улучшить степень реставрации, которая может быть достигнута ценой значительного увеличения затрат вычислительных ресурсов в 10—100 раз.

Рассмотрим модификацию известных итерационных методов восстановления изображений. Для восстановления искаженных изображений используем следующий процесс, который можно применять в качестве начального приближения к оригиналу изображений в случаях «а—в». Пусть задана матричная система уравнений: $HF = G$. Разбивая по столбцам или строкам матрицы G и F, можно получать СЛАУ. Разрешая эти уравнения, добиваемся реставрации оригинала.

Будем считать матрицу H циркулянтной. В этом случае для получения начального приближения F_0 можно использовать прием, описанный выше.

К начальному приближению решения СЛАУ F_0 можно применить итерационные алгоритмы, описанные в [5, 22, 24, 27—29]. В работах [5, 27] оригинал F находится с использованием итерационной схемы

$$F_{k+1} = \alpha G + DF_k, \quad k = 0, 1, ...,$$

где $D = (I - \alpha H)PF_k$; I — единичный оператор; α — величина, значения которой находятся в интервале $0 \leq \alpha \leq 2$ (параметр α можно использовать также и для управления скоростью итерационного процесса). Оператор P может быть оператором ограничения типа конечного множителя или положительности (или одновременно и тем и другим). Число таких операций 50—70.

В работе [28] предложен следующий итерационный алгоритм. Используем выражение

$$F^{(k+1)} = I_p T^{-1} | W_\alpha TG - W_{1-\alpha} I_p T F^{(k)} |,$$

где I_p — диагональная матрица, в которой первые p элементов равны единице, а остальные — нулю;

$$W_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ & \alpha_2 & & & & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & & \alpha_p & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix};$$

$$W_{1-\alpha} = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1 & & & & & & \\ & 1-\alpha_2 & & & & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & & 1-\alpha_p & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix};$$

$\alpha_i = \sigma_i^t$, $0{,}3 \leq t \leq 0{,}5$; σ_i — сингулярные числа матрицы H, $i = \overline{1, p}$.

Начальным приближением $F^{(1)}$ может быть приближение F_0, приведенное ранее. Ввиду того что нахождение сингулярных чисел представляет определенные вычислительные трудности, предлагается использовать вместо диагональных элементов матрицы W_α весовые величины $\alpha_i = 1/G_{ii}$, а также диагональные элементы матрицы Λ.

В качестве примеров проводились восстановления изображений, искаженных импульсной функцией $h(x, y)$. Система задавалась одномерной симметрической функцией с экспоненциальным убыванием. Затем одномерная импульсная функция интерполировалась на одномерной области с использованием линейной интерполяции. Данные алгоритмы использовались в задаче компенсации атмосферных искажений в случае круговой и квадратной апертур. Квадратная апертура задавалась импульсной функцией

$$h(x, y) = \exp[-c(x^2 + y^2)],$$

где c — параметр системы. В случае круговой апертуры $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ошибки восстановления изображений проверялись по формуле

$$E = \| F - \hat{F} \| 100 / \| F \|,$$

где F — оригинал изображения; $\hat{F}$ — восстановленное изображение. Ошибки, вычисленные в процентах, не превышали 5—7.

Для восстановления искаженных изображений рассмотрим использование неявного итерационного метода решения СЛАУ, который можно применять ко всем случаям «а—г».

Неявный итерационный способ решения СЛАУ. Пусть $H: G \to F$ — линейный ограниченный оператор; G и F — вещественные пространства. Предположим, что уравнение $Hf = g$, $f \in F$, имеет решение f.

Разбивая по столбцам матрицы G и F, получим СЛАУ. Разрешая эти уравнения, можно добиться реставрации оригинала F.

Для нахождения оригинала по изображению в случаях «а—г» можно применить неявный итерационный способ решения СЛАУ:

$$Au = b,$$

где A — квадратная матрица порядка N; u — искомый, b — заданный векторы.

Для решения СЛАУ $Au = b$ предлагается следующий итерационный процесс:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + (A^tA + \alpha_k E)^{-1}A^t r_k + w_k, \tag{6}$$

где $\alpha_k = \| A^t r_k \|^2 / \| r_k \|^2$, $k = 0, 1, \ldots$, $r_k = b - Au^{(k)}$ — невязка решения СЛАУ; E — единичная матрица порядка N; A^t — матрица, транспонированная к A; w_k — поправка. Заметим, что если w_k равно нулю, то итерационный процесс (6) превращается в итерационный процесс, описанный в [30]. Если положить

$$\tau_k = (A^tA + \alpha_k E)^{-1}; \qquad w_k = \sum_{i=1}^{N} a_{ik}\varphi_i,$$

где $\{\varphi_i\}$ — задаваемая система линейно независимых векторов, а неизвестные параметры τ_k и a_{ik} находить из условия минимума функционала

$$F(u_k) = (Au_k, u_k) - 2(b, u_k),$$

то итерационный процесс (6) превращается в вариационно-градиентный [31]. Этот итерационный процесс можно обобщить путем введения неявного оператора B, который находится вышеописанными способами, т. е.

$$Bu^{(k+1)} = Bu^{(k)} + (A^tA + \alpha_k E)Ar_k + w_k, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{7}$$

Скорость сходимости неявного итерационного процесса не меньше скорости итерационных процессов, описанных в [30, 31]. Отличие данного способа решения СЛАУ от алгоритмов из работ [32, 33] состоит в том, что этот алгоритм можно использовать в случаях «а—г». Для оценки восстановленного изображения использовался среднеквадратичный критерий ошибок, который не превышал 5—7 %, а также коэффициент корреляции между восстановленным изображением и оригиналом (r = 0,96—0,99).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. Кн. 1, 2.
2. **Рабинер Л. Р., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
3. **Рабинер Л. Р., Шафер Р. У.** Цифровая обработка речевых сигналов. М.: Радио и связь, 1981.
4. **Сергеев В. В., Усачев А. В.** Цифровое моделирование двумерных линейных систем // Компьютерная оптика. 1988. Вып. 3.
5. **Шафер Р. У., Мерсеро Р. М., Ричардс М. А.** Итерационные алгоритмы восстановления сигналов при наличии ограничений // ТИИЭР. 1981. **69**, № 4.
6. **Эндрюс Г.** Двумерные преобразования // Обработка изображений и цифровая фильтрация. М.: Мир, 1979.

7. **Ахмед Н., Рао К. Р.** Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980.
8. **Логинов В. П.** Функции Уолша и области их применения // Зарубежная радиоэлектрон. 1973. **34**, С. 73.
9. **Пойда В. Н.** Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. Минск: Наука и техника, 1978.
10. **Трахтман А. М., Трахтман В. А.** Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.
11. **Вобринюк С. И., Лизунов Н. Н.** Об эффективности быстрых преобразований Уолша и Хаара с контролем по избыточности // VIII Симпозиум по проблеме избыточности в информационных системах. Л., 1983. Ч. 6. С. 28.
12. **Глызин В. В., Лизунов Н. Н.** Использование естественной избыточности ортогонального преобразования Пэли при выполнении масштабирования изображения, представленного в виде матрицы яркости // Там же. С. 31.
13. **Опенгейм А. В., Шафер Р. У.** Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979.
14. **Алберт А.** Регрессия, инверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
15. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1967.
16. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
17. **Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е.** Вычисления с теплицевыми матрицами // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1983. Вып. 1.
18. **Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.** Регуляризующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
19. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
20. **Милюкова О. П.** Решение недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений в задачах восстановления изображений // Кодирование и обработка изображений. М.: Наука, 1983.
21. **Быков В. И., Кожуховский А. Д., Литвин А. И., Матухно А. В.** Алгоритмы восстановления изображений // Вероятностные модели и обработка случайных сигналов и полей: Тез. докл. Украинской школы-семинара. Черкассы, 1991.
22. **Коваленко И. Л., Кожуховский А. Д., Литвин А. И.** Способ восстановления искаженных изображений // Збірка наукових праць «Імовірсні моделі та обробка випадкових сигналів і полів». Тернопіль, 1993. Т. 2. Ч. 2.
23. **Литвин А. И., Кожуховский А. Д.** Итерационные методы восстановления изображений // Статистический синтез и анализ информационных систем. Москва — Черкассы, 1992.
24. **Литвин А. И., Коваленко И. Л., Симонженков С. Д.** Неявный итерационный способ решения СЛАУ и его применение. Черкассы, 1993. Деп. в ВИНИТИ 30.06.93, № 145-ХП 93.
25. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. М.: Наука, 1975.
26. **Литвин А. И., Кожуховский А. Д.** Решение систем линейных алгебраических уравнений с использованием ортогональных дискретных преобразований // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Лыбидь, 1992. Вып. 74.
27. **Василенко И. И., Татраторин А. М.** Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.
28. **Mamone R. J., Rothacker R. J.** General iterative method of restoring lineary degrated images // JOSA. 1987. **4**, N 1. P. 208.
29. **Литвин А. И., Молчунов Н. В.** Цифровое моделирование изображений // Междунар. конф. «ОИДИ-90»: Тез. докл. Новосибирск, 1990.
30. **Трушников В. Н.** Один нелинейный регуляризующий алгоритм и некоторые его применения // ЖВМиМФ. 1979. **19**, № 4.
31. **Лучка А. Ю., Нощенко Н. З., Сергиенко И. В., Тукалевская Н. И.** Параллельная организация вычислений при решении линейных уравнений методами проекционно-итерационного типа // Кибернетика. 1984. № 3.
32. **Кожуховский А. Д., Литвин А. И., Молчунов Н. В., Матухно А. В.** Алгоритмы восстановления изображений // Электрон. моделирование. 1992. **14**, № 1.
33. **Быков В. И., Кожуховский А. Д., Литвин А. И., Молчунов Н. В.** Цифровое моделирование изображений // Электрон. моделирование. 1991. **13**, № 2.

Поступила в редакцию 28 февраля 1996 г.