СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вознесенский В. В., Кашинов В. В., Оганджанянц С. И.** Вариационный метод оптимизации обработки результатов эксперимента по разрывным критериям // Автометрия. 1995. № 3.
2. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ: Пер. с англ. /Под ред. В. И. Благодатских. М.: Наука, 1988.
3. **Кашинов В. В.** Необходимые условия оптимальности в некоторых задачах управления и фильтрации // Кибернетика. 1972. № 6.

Поступило в редакцию 25 ноября 1995 г.

УДК 517.97.519.7 ОТВЕТ НА ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В. В. Вознесенский, В. В. Кашинов, С. И. Оганджанянц

(Тюмень)

РАЗРЫВНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Авторы благодарны за внимательное отношение и критические замечания, высказанные в письме в редакцию [1] по поводу нашей статьи [2]. Полностью со всеми замечаниями согласиться нельзя, рассмотрим их.

1. Запись интегрального оператора в виде оператора Урысона с ядром $K[\chi, t, h(t)]$ является наиболее общей, частным случаем записи ядра Урысона может быть, например, ядро оператора типа Фредгольма $K[\chi, t, h(t)] = K(\chi, t)h(t)$. Этот случай используется в следствии 1 статьи [2]. Здесь же, в следствии 2, приведен пример импульсного ядра $K(\chi, t) = \delta(\chi - t)$, когда оператор типа Фредгольма, т. е. частный случай оператора Урысона, действует на δ-функцию. Следует отметить, что $\delta(t) \notin L_2$, однако свертка δ-функции с собой существует и является тоже δ-функцией, имеют смысл и выражения типа $\delta(\varphi(\chi))$ [3]. Таким образом, оператор Урысона может (хотя бы в частных случаях) иметь смысл и с импульсным ядром Дирака, и когда он действует на δ-функцию. Заметим, что оператор Урысона еще требует дальнейших исследований.

2. Теорема сформулирована в общем виде для любых пространств L_p и справедлива для любого из конкретных пространств L_p. Равенство (5) и обобщенное уравнение Эйлера — Пуассона (6) в статье [2] выведены при условии применимости теоремы Фубини и основной леммы вариационного исчисления в формулировке Л. Янга [4] к вариации (4) функционала (2).

Все ограничения на интегрант, ядро и оптимизируемую функцию вытекают из условия применимости теоремы Фубини для конкретного пространства. В частности, одним из таких условий может быть суммируемость произведений $F'_{\Phi_i}(dK_i[\chi, t, h(t)]/dt)\delta h(t)$. Каждый исследователь может конкретизировать условия применимости теоремы Фубини для пространства, в котором работает. Мы согласны, что наша формулировка теоремы непривычная, но в приведенном виде она справедлива для всех L_p, $p \geq 1$.

3. Действительно, попыток использовать негладкий анализ Кларка [5] или других необходимых условий экстремума [1] нами не предпринималось. Дело в том, что для теории сигналов, большинства физических, экономических и других задач характерна зависимость функционала качества от интегральных операторов, описывающих фильтрацию, детектирование или другие преобразования входного процесса. Это гораздо более общий случай, чем зависимость функционала от операторов дифференцирования, который позволяет ставить и решать задачи принципиально нового класса. При этом значение отклика

фильтра (функций $\Phi_i(\chi_0)$) в данный момент χ_0 нельзя связать со значением входного процесса в какой-либо момент времени t_0 — в каждой точке значение $\Phi(\chi_0)$ определяется в общем случае всей функцией $h(t)$. Поэтому заранее было ясно, что использовать свойство липшицевости, существенное в теории Кларка [1], будет затруднительно. Кроме того, хорошо известных понятий вариационного исчисления, теории обобщенных функций и теоремы Фубини для решения сформулированной проблемы оказалось достаточно, и попытки использовать негладкую оптимизацию Кларка (а это наиболее общие результаты среди перечисленных в письме в редакцию [1]) излишни и, к сожалению, бесперспективны.

Следует отметить, что во введении к выпущенной в 1995 году монографии [6], целиком посвященной негладким и разрывным экстремальным задачам, также объясняется, почему негладкий анализ Кларка для оптимизации в разрывных задачах использовать нельзя. Авторами монографии [6] математически строго и физически прозрачно вводятся понятия аппроксимационного градиента, аппроксимационного экстремума и получено аппроксимационное уравнение Эйлера простейшей вариационной задачи. Это уравнение может использоваться, например, для решения приведенной нами в качестве примера задачи Дидоны с канавой — вариационной задачи с разрывным интегрантом и негладкой или разрывной экстремалью (наличие перечисленных свойств делает методы Кларка и других авторов [1] неприменимыми).

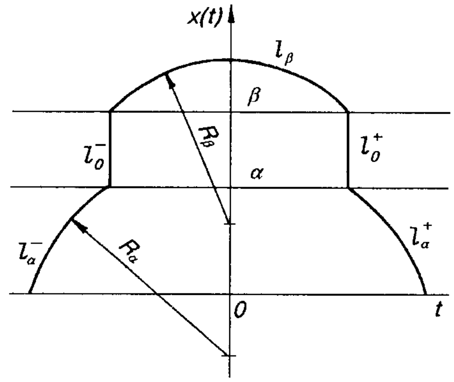
4. Что же касается «доказательства теоремы в теоретической части» и «четвертьвековой давности заметки В. В. Кашинова» [7], то, действительно, формулы теоретической части в [2, 7] по написанию одинаковые, но в [7] не делалось предположения о разрывности интегранта F, а дифференцирование интегранта понималось в обычном смысле, хотя экстремаль уже могла быть разрывной, и в частности δ-функцией. В статье [2] использован тот же, что и в [7], прием (применение теоремы Фубини для исключения произвольной функции из вариации функционала), позволяющий использовать фильтрующие свойства сингулярных производных δ-функции, и сделано предположение о разрывности интегранта F. Все производные понимаются в обобщенном смысле как свертки с сингулярными производными δ-функции Дирака. Это позволило создать предпосылки для дальнейшей разработки обобщенного вариационного исчисления. Заметим, что обобщенное уравнение Эйлера простейшей вариационной задачи [2, (9)] по написанию не отличается от классического уравнения Эйлера. Но в статье [2] доказано, что обобщенное уравнение Эйлера можно использовать, даже если интегрант разрывной, а производные понимаются в смысле обобщенных, и приведен пример решения задачи с разрывным интегрантом и негладкой или разрывной экстремалью (задача Дидоны с канавой).

Даже простейшая задача вариационного исчисления, которой вот уже три века, исследуется до сих пор (см., например, [18]). Поэтому создание обобщенного вариационного исчисления — длительная работа для многих исследователей. В статьях [2, 7—16] намечен один подход к решению этой проблемы, а в монографии [6] и в предшествующих статьях [19, 20] предложен несколько иной подход, фактически близко связанный с работами В. А. Стеклова [21] и с так называемой функцией Стеклова:

$$F(\chi) = \frac{1}{h}\int\limits_{\chi}^{\chi+h} f(\xi)d\xi, \tag{1}$$

положенной, наряду с единичной функцией включения Хевисайда и δ-функцией Дирака, в основу теории обобщенных функций. В обоих подходах, в отличие от работ других авторов [1], так или иначе используются метод регуляризации и сингулярные обобщенные функции, что и обеспечивает эффективность этих подходов достаточно простыми средствами: обоими методами уже решено значительное число прикладных задач.

5. Авторы приносят свои извинения читателям за небрежность при оформлении рисунка. Действительно, в задаче Дидоны с канавой, как следует из



текста статьи [2], концы дуг $l_\alpha^\pm$ и l_β должны соединяться прямыми. Собственно, пример задачи Дидоны с канавой приведен потому, что модифицированную задачу Дидоны с негладким интегрантом ранее использовал Кларк [5] для демонстрации применения негладкого анализа при оптимизации. Задача Дидоны с канавой хорошо иллюстрирует возможность решения оптимизационных задач с разрывным интегрантом. Один из возможных вариантов решения изображен на рисунке.

Из рисунка видно, что понятие разрывности в физическом смысле не совпадает с аналогичным математическим понятием. Веревку Дидона разорвать не может, что записывается в форме изопериметрического условия [2, (13)]. Однако в математическом смысле экстремаль — разрывная: непрерывные отрезки $l_0^\pm$ расположены вертикально. Заметим, что математическая разрывность исчезает при повороте осей координат на угол, не кратный $\pi/2$.

Интересно также отметить, что функции

$$f_1(\chi) = \begin{cases} 0, & \chi \le 0; \\ \chi/h, & 0 \le \chi \le h; \\ 1, & \chi \ge h \end{cases} \tag{2}$$

и

$$f_2(\chi) = \begin{cases} 0, & \chi \le 0; \\ \text{не определена}, & 0 < \chi < h; \\ 1, & \chi \ge h \end{cases} \tag{3}$$

при $h \to 0$ имеют одинаковые односторонние пределы в точке 0, но разные графики. С физической точки зрения график $f_1(\chi)$ непрерывный, а график $f_2(\chi)$ разрывной. При этом производная функции $f_1(\chi)$ (2) является при $h \to 0$ δ-образной последовательностью [21], а производная функции $f_2(\chi)$ в окрестности $\chi = 0$ не существует.

Что же касается исследования решения при разных соотношениях L, α, β и γ, то оно сводится к технике вычислений и, скорее, было бы более интересно для учебника или задачника по обобщенному вариационному исчислению, чем для журнала «Автометрия».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Костина Л. П.** О разрывных вариационных задачах // Автометрия. 1996. № 3
2. **Вознесенский В. В., Кашинов В. В., Оганджанянц С. И.** Вариационный метод оптимизации обработки результатов эксперимента по разрывным критериям // Автометрия. 1995. № 3.
3. **Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.** Теория обобщенных функций (Секвенциальный подход). М.: Мир, 1976.
4. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.
5. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ: Пер. с англ. /Под ред. В. И. Благодатских. М.: Наука, 1988.
6. **Батухтин В. Д., Майборода Л. А.** Разрывные экстремальные задачи. Петровская Академия наук и искусств. Санкт-Петербург: Гиппократ, 1995.
7. **Кашинов В. В.** Необходимые условия оптимальности в некоторых задачах управления и фильтрации // Кибернетика. 1972. № 6.
8. **Кашинов В. В., Пахолков Г. А.** Оптимальная линейная фильтрация при многолучевом распространении // Вопросы радиоэлектроники. Сер. общетехн. 1969. Вып. 23.
9. **Кашинов В. В.** Синтез оптимального фильтра при фиксации временного положения импульса по относительному уровню // Вопросы радиоэлектроники. Сер. общетехн. 1971. Вып. 21. (Приложение).
10. **Пахолков Г. А., Кашинов В. В.** Оптимальная линейная фильтрация при переотражениях от местных предметов в системах радионавигации и посадки // Вопросы радиоэлектроники. Сер. общетехн. 1972. Вып. 14. (Приложение).
11. **Кашинов В. В., Куликов В. А., Пономаренко Б. В.** Необходимые условия оптимальности для систем, описываемых интегральными операторами // Автометрия. 1973. № 4.
12. **Голубев В. И., Кашинов В. В., Пономаренко Б. В.** Метод повышения эффективности радиосистем, описываемых интегральными операторами, при ограничениях типа неравенств // Повышение эффективности и надежности радиоэлектронных систем. 1974. Вып. 3.
13. **Кашинов В. В.** Фильтрация сигналов в радиоэлектронных системах // Основы теории радиоэлектронных систем морских объектов. Л.: Судостроение, 1974.
14. **Кашинов В. В., Никитин А. И., Пономаренко Б. В.** Необходимые и достаточные условия оптимальности в некоторых задачах управления и фильтрации с подвижными границами // Повышение эффективности и надежности радиоэлектронных систем. 1977. Вып. 7.
15. **Кашинов В. В., Милов В. А., Вознесенский В. В.** Необходимые условия оптимальности управления системами с распределенными параметрами // Огнеупоры. 1989. № 7.
16. **Пахолков Г. А., Кашинов В. В., Пономаренко Б. В.** Вариационный метод синтеза сигналов и фильтров. М.: Радио и связь, 1981.
17. **Ямпольский Э. М.** Вариационные принципы согласования сигналов с каналом связи. М.: Радио и связь, 1987.
18. **Сычев М. А.** Мера Лебега универсального сингулярного множества в простейших задачах вариационного исчисления // Сибирский математический журнал. 1994. **35**, № 6.
19. **Батухтин В. Д., Майборода Л. А.** Об одной формализации экстремальных задач // ДАН СССР. 1980. **250**, № 1.
20. **Батухтин В. Д., Майборода Л. А.** К теории экстремальных задач // Кибернетика. 1982. № 4.
21. **Владимиров В. С., Маркуш И. И.** Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки. М.: Наука, 1981.

Поступил в редакцию 20 декабря 1995 г.