РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 2 1996

УДК 519.642

О. Е. Трофимов

(Новосибирск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ В КОМПЬЮТЕРНОМ ЗРЕНИИ КАК ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТОМОГРАФИИ

Рассматривается построение алгоритмов томографической реконструкции в случае, когда исследуемые объекты являются наборами точечных масс. Показано, что подобные алгоритмы могут быть использованы в задачах компьютерного зрения.

При построении алгоритмов томографической реконструкции часто в явном или неявном виде используются обобщенные функции [1—5]. В тех случаях, когда исследуемые объекты являются наборами точечных масс или двумерных поверхностей, искомые функции также естественно считать обобщенными. Возникает задача построения алгоритмов реконструкции, учитывающих специфику восстанавливаемых объектов.

Пусть в двумерном или трехмерном пространстве задано некоторое множество точечных масс. При обращении преобразования Радона искомую функцию естественно считать набором δ-функций. В связи с практической значимостью и возможностью получения явных формул для искомой функции этот частный случай обращения преобразования Радона заслуживает отдельного изучения. Здесь будет рассмотрен двумерный случай. Пусть

$$R(r, \varphi) = \check{f}(\cos\varphi, \sin\varphi, r) = \int\limits_{L(r,\varphi)} f(x, y)dl, \tag{1}$$

где $L(r, \varphi)$ — прямая, ортогональная лучу с углом φ и отстоящая от начала координат на расстояние r ($r \geq 0$); $L(r, \varphi)$ при $r < 0$ — прямая, симметричная относительно начала координат прямой $L(|r|, \varphi)$.

Для $f(x, y)$ справедлива формула

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi S(x\cos\varphi + y\sin\varphi, \varphi)d\varphi. \tag{2}$$

В формуле (2) $S(z, \varphi) = R(z, \varphi) * (-1/\pi z^2)$ [1, 3, 5]. Здесь $*$ — свертка, понимаемая в смысле обобщенных функций.

Если $f(x, y) = \delta(x - x_0,\ y - y_0)$, то преобразование Радона имеет вид $R(r, \varphi) = \delta(r - (x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi))$ [1], а если искомая функция является набором точечных масс, то

$$R(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{N} C(i, \varphi)\delta(r - r(i, \varphi)). \tag{3}$$

Учитывая, что действие δ-функции при свертке аналогично действию единицы при умножении, получаем

$$S(z, \varphi) = -1/\pi \sum_{i=1}^{N} C(i, \varphi)(z - z(i, \varphi))^2. \tag{4}$$

Для создания численных алгоритмов на основании формул (2) и (4) необходимо использовать регуляризацию функции $1/z^2$.

В [2] при решении задачи трехмерной томографической реконструкции используется функция

$$H_\varepsilon(z) = \begin{cases} 1/\varepsilon^2, & \text{если } |z| < \varepsilon; \\ -1/z^2, & \text{если } |z| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

В [6] показано, что $H_\varepsilon(z)$ является регуляризацией обобщенной функции $1/z^2$. Отсюда следует, что ε-приближение в случае точечных масс имеет вид:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \sum_{i=1}^{N} C(i, \varphi) H_\varepsilon(x\cos\varphi + y\sin\varphi - z(i, \varphi)) d\varphi. \tag{5}$$

Как уже отмечалось выше, в случае точечных масс преобразование Радона на направлении φ будет сосредоточено в точках $z(i, \varphi)$, а $C(i, \varphi)$ — коэффициенты интенсивности в этих точках.

В ряде случаев нам бывают известны точки $z(i, \varphi)$, но не известны коэффициенты $C(i, \varphi)$. Возникающая в таких случаях задача нелинейной томографии тесно связана с задачами машинного зрения.

Пусть в двумерном или трехмерном пространстве задано некоторое множество точек и пусть известны их проекции на различные плоскости. Необходимо определить геометрические координаты точек. Это может рассматриваться как нелинейная задача томографической реконструкции в конусе лучей в следующем смысле: считаем, что интеграл по любой прямой, пересекающей по крайней мере одну точку множества, равен единице, интегралы по прямым, не пересекающим точек множества, равны нулю. Нелинейность здесь проявляется в том, что интеграл по прямой, содержащей две и более точек множества, равен единице так же, как и по прямой, содержащей одну точку. В ситуации машинного зрения случай двух и более точек на прямой означает, что соответствующие точки перекрывают друг друга при наблюдении сцены в заданном направлении. Для простоты изложения здесь будет рассмотрен двумерный случай.

Если интеграл по прямой равен единице, то при наших предположениях это означает, что

$$(\exists x, y)(ax + by + c = 0), \tag{6}$$

где a, b, c — параметры, характеризующие прямую. В случае параллельного проектирования множеству проекционных данных соответствует множество логических высказываний:

$$(\exists x, y)(a_i x + b_i y + c_{ij} = 0), \qquad i = 1, \ldots, N, \; j = 1, \ldots, N_i, \tag{7}$$

здесь (a_i, b_i) — нормаль к i-му направлению проектирования; c_{ij} — расстояние от начала координат j-й проекции на прямой, соответствующей i-му направлению; N — число направлений проектирования; N_i — число точек в i-й проекции. Величины (a_i, b_i, c_{ij}) полагаем известными.

Имея систему высказываний типа (7), нужно найти множество точек, удовлетворяющих этим условиям, в частности, проверить, является ли такое множество единственным. Если решение единственно, то необходимо найти координаты точек; если решение не единственно, то необходимо отделить те точки, координаты которых можно найти на данном этапе, от тех точек, которые еще нельзя определить единственным образом, и указать направления проектирования, которые позволят снять неопределенность.

При рассмотрении системы типа (7) возникает вопрос о количестве направлений, необходимых и достаточных для ее однозначного разрешения. При одном направлении выделяются лишь прямые, на которых могут лежать искомые точки. При двух направлениях выделяется множество точек, но в общем случае решение не единственно. Например, проекции четырех точек, лежащих на всех вершинах квадрата, и проекции двух точек, лежащих на вершинах, соответствующих диагонали того же квадрата, совпадают при проектированиях в направлении сторон квадрата.

Примечание. Направления проектирования, соответствующие коллинеарным векторам, отождествляются.

Для однозначного определения любого конечного множества точек по системе (7) достаточно трех проекций.

Действительно, после двух проекций формируется сетка, в узлах которой могут быть искомые точки. Рассматривая все возможные прямые, соединяющие узлы сетки, получаем все направления проекций, при которых две точки решетки попадают на одну прямую. Поскольку точек конечное число, то количество таких прямых и соответствующих им направлений проекций также конечно. Имея две проекции, всегда можно выбрать такое направление для третьей, при котором разным узлам решетки, образовавшейся после двух проекций, соответствуют разные прямые. При проектировании в этом направлении значение интегралов, равное единице, будет на тех и только тех прямых, которые проходят через узлы решетки, являющиеся точками искомого множества.

Таким образом, процедура восстановления может быть следующей: нужно взять любые две проекции, затем по ним вычислить направление третьей, после получения соответствующей проекции можно однозначно определить искомое множество.

При большом количестве искомых точек могут оказаться очень высокими требования к точности определения направления третьей проекции. В таких ситуациях целесообразно рассмотреть алгоритмы, когда по заданным проекциям находятся два множества: 1) множество точек, которые заведомо являются искомыми, 2) множество точек, которые могут быть, а могут и не быть искомыми.

Когда второе множество становится пустым, анализ сцены прекращается. После первых двух проекций во второе множество заносятся все узлы образовавшейся решетки. На последующих шагах узел, не лежащий на одной прямой с другими, вычеркивается из второго множества, если соответствующий интеграл равен нулю, или переносится в первое, если интеграл равен единице.

Для доказательства конечности числа шагов для конечного множества объектов можно использовать тот же прием, что и выше.

В трехмерном пространстве для однозначного определения координат конечного множества точечных объектов достаточно двух проекций. После проекции на первую плоскость имеется множество прямых, на которых лежат объекты. На втором шаге нужно выбрать направление проекций, ортогональное нормали к первой плоскости и такое, чтобы проекции различных прямых не пересекались. Такой выбор возможен в силу конечности множества объектов. Отметим, что алгоритмы, близкие к приведенным выше, часто используются при работе со стереопарами.

При малом количестве проекций могут оказаться слишком высокими требования к точности установления направления проекций. Тогда для ослабления этих требований можно использовать алгоритмы исчерпывания, такие же, как в двумерном пространстве.

Построенные таким образом алгоритмы основаны на переборе вариантов и требуют больших затрат времени при их реализации. Автору не известно, существуют ли алгоритмы значительно меньшей сложности, решающие задачу распределения точечных масс по их проекциям в случае неизвестных коэффициентов $C(i, \varphi)$.

Для нахождения приближенного решения можно полагать эти коэффициенты равными единице и использовать обращение преобразования Радона. Если исследуемое множество является разреженным, то большая часть прямых будет проходить только через одну точку и соответствующие коэффициенты будут определены правильно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Обобщенные функции. М.: Физматгиз, 1962. Т. 5.
2. **Bruce D. Smith.** Cone-beam tomography: recent advances and a tutorial review // Opt. Eng. 1990. **29**, N 5.
3. **Трофимов О. Е.** К задаче восстановления функции по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Методы решения условно корректных задач. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1991.
4. **Trofimov O. E.** Cone beam reconstruction and Fourier transform of distributions // Computer Analysis of Images and Patterns: 5th Int. Conf. CAIP'93: Proc. (Lecture Notes in Computer Science, 719). Budapest: Springer-Verlag, 1993.
5. **Trofimov O. E.** Algorithms of tomography and distributions // 6th Int. Symp. on Computing Tomography: Abstracts. Novosibirsk, 1993.
6. **Trofimov O. E.** Correlation of two methods of cone-beam reconstruction // J. Syst. Anal. Model. Simulat. (SAMS). 1995. **18**. P. 169.

Поступила в редакцию 30 ноября 1995 г.