

УДК 519.68

В. Ю. Корнилов

(Санкт-Петербург)

ИНВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Рассматривается задача инвариантного к сдвигу, масштабу и повороту описания пространственно ограниченного изображения. Показано, что любому изображению взаимно однозначно соответствует инвариантное описание в виде счетного набора чисел, позволяющее полностью восстановить изображение.

В настоящее время нет инвариантного описания изображения, позволяющего однозначно восстановить это изображение. Под инвариантностью понимается независимость от сдвига, масштаба и поворота изображения. Предполагается пространственная ограниченность изображения.

По модулю спектра изображения восстановить фазу в общем случае невозможно [1]. Часто используемые многочлены Цернике так же неинвариантны к повороту изображения, как ряд Фурье к сдвигу [2]. При описании в полярной системе координат для произвольного изображения невозможно однозначно выбрать направление, которое можно было бы принять в качестве полярной оси [3].

Задача инвариантного описания изображения сводится к задаче инвариантного к сдвигу описания периодической функции. Пусть $F(\rho, \varphi)$ — нормализованное по масштабу изображение в некоторой полярной системе координат с началом в центре тяжести изображения. Пусть также все изображение располагается в круге радиусом R . Для любого φ можно разложить функцию $F(\rho, \varphi)$ в некоторый ряд по $\rho \in [0, R]$ с весовыми коэффициентами $F_s(\varphi)$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Инвариантное к сдвигу описание функций $F_s(\varphi)$ позволит получить инвариантное описание изображения.

Далее дается решение задачи инвариантного к сдвигу описания периодической функции. Будет показано, что каждой периодической функции взаимно однозначно соответствует счетный набор чисел. Пусть периодическая функция представлена рядом Фурье

$$F(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin k(\varphi + f_k), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Амплитуды гармоник A_k не зависят от выбора системы координат и могут быть использованы для инвариантного описания функции. Фазы f_k привязывают гармоники к конкретной системе координат. При изменении системы координат фазы f_k меняются.

Предлагается привязывать гармоники друг к другу, а не к системе координат.

Пусть выбраны две гармоники $k = m$ и $k = n$, $n > m$. Аргументы этих гармоник запишем в виде

$$m(\varphi + f_m + 2\pi i/m), \quad i \in C,$$

$$n(\varphi + f_n + 2\pi j/n), \quad j \in C,$$

где $C = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$. Замена переменной $\varphi = \varphi' - f_m - 2\pi i/m$ приводит к началу одной из волн первой гармоники:

$$m(\varphi'),$$

$$n(\varphi' - f_m + f_n - 2\pi i/m + 2\pi j/n).$$

Вводя обозначение $f_n - f_m = \Delta$, относительную фазу второй гармоники запишем в виде

$$\Phi_{mn}(\Delta, i, j) = \Delta - 2\pi i/m + 2\pi j/n, \quad i \in C, \quad j \in C.$$

Устраняя неоднозначность, можно выбрать минимальную по модулю относительную фазу

$$|\Phi_{mn}(\Delta)| = \min_{i,j} |\Phi_{mn}(\Delta, i, j)|.$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение. Относительная фаза $\Phi_{mn}(\Delta)$ представляет собой пилообразную периодическую функцию. Период P_{mn} является константой для каждой пары m и n . На промежутке

$$\Delta \in [-P_{mn}/2, P_{mn}/2], \quad \Phi_{mn}(\Delta) = \Delta.$$

Следствие. Взаимное расположение двух гармоник можно однозначно задать одним числом — относительной фазой.

Таблица относительных фаз Φ_{mn} и амплитуды A_k позволяют однозначно (с точностью до сдвига) восстановить периодическую функцию $F(\varphi)$. Чтобы однозначно восстановить изображение, необходимо определить взаимное расположение функций $F_s(\varphi)$. Для этого нужно по описанной методике найти относительные фазы всех гармоник семейства функций $F_s(\varphi)$. Полученная четырехмерная таблица вместе с амплитудами функций $F_s(\varphi)$ позволит однозначно восстановить изображение.

В заключение отметим, что любому пространственно ограниченному изображению взаимно однозначно соответствует инвариантное к сдвигу, масштабу и повороту описание в виде счетного набора чисел, позволяющее полностью восстановить изображение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василенко Г. И., Тараторин А. М. Восстановление изображений. М.: Радио и связь, 1986.
2. Перетягин Г. И. Построение обнаружителя, инвариантного к повороту двумерных объектов // Автометрия. 1995. № 1.
3. Путятин Е. П., Аверин С. И. Обработка изображений в робототехнике. М.: Машиностроение, 1990.

Поступила в редакцию 26 октября 1995 г.