РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1996

УДК 621.391 : 681.301

В. К. Водопьянов, А. К. Смыслова

(Белгород)

СРЕДСТВА РЕКУРСИВНОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Изложены теоретические основы построения рекурсивных преобразователей (РП), предназначенных для обработки моделей изображений на основе универсального подхода. Особое внимание уделено разработке алгебры РП, предложены сигнатура операций, системы аксиом и вспомогательных тождеств. Решена задача анализа РП исходя из их предварительного описания с использованием регулярных, право-, леволинейных и контекстно-свободных грамматик.

Современные системы обработки изображений, основанные на эффективном кодировании, реставрации, распознавании образов, разнообразны по своей природе и структуре и нуждаются в создании типового подхода к их реализации с использованием однородных правил. С учетом того, что многие модели изображений описываются в алгебраической форме, в настоящей работе предлагается математический аппарат, с помощью которого осуществляется машинная обработка изображений в автоматическом режиме. С этой целью предлагается понятие рекурсивного преобразователя (РП), на входе которого используются вышеуказанные модели, а на выходе — программа реализации.

Пусть $G_0 = \langle N, \Sigma, T, H \rangle$ — формальная грамматика, порождающая произвольный язык $L(G_0)$, где N — нетерминальный алфавит, Σ — терминальный алфавит, T — аксиома, H — схема вывода. С помощью данной грамматики можно описать модели изображений с последующей их реализацией в РП.

Определение. РП называется композиция управляющей структуры (УС) и операционной структуры (ОС), которая описывается следующим образом:

$$A = \left\{A_1, B_1, X, Y, Z, \sigma, G_0, F^*(A_1), a_1, S\right\},$$

где $A_1 = \left\{a_1 \mid i = \overline{1, g}\right\}$ — множество состояний УС; $B_1 = \left\{b_1, b_2, b_3, \ldots\right\}$ — множество состояний ОС; $X = \left\{x_m \mid m = \overline{1, M}\right\}$ — множество входных сигналов УС (выходных сигналов ОС); $Y = \left\{y_f \mid f = \overline{1, F}\right\}$ — множество выходных сигналов УС (входных сигналов ОС); Z — информационная база РП; σ — функция отображения множеств, зависящая от A_1, Σ; $F^*(A_1)$ — подмножество заключительных состояний УС; $a_1 \in A_1$ — начальное состояние УС; S — множество синхронных терминалов, для которых необходимо учитывать их баланс, например, левой и правой круглых скобок и т. д.

Таким образом, РП функционирует в соответствии с некоторой грамматикой G_0, которая может быть автоматной, контекстно-свободной. Тем самым могут быть заданы интерпретационные модели РП: конечные автоматы, дискретные и конечные преобразователи, магазинные автоматы и преобразователи, которые представляют соответственно регулярные и контекстно-свободные языки, применяемые для описания и порождения моделей изображений.

Одним из способов эффективной обработки этих моделей является использование рекурсивных методов, обеспечивающих на основе РП их компиляцию в необходимую программу.

В настоящее время для обработки формальных языков широко применяются формальные грамматики, представленные в нормальной форме Бэкуса или синтаксическими диаграммами. Компиляция языков осуществляется, как правило, программными компиляторами (ПК) при использовании традиционных ЭВМ. В машинах со структурной интерпретацией языков для обработки изображений можно применить электронные компиляторы (ЭК), быстродействие которых на 2-3 порядка выше по сравнению с ПК. Основной метод, обеспечивающий при этом реализацию формальных языков, — построение РП, представляющих интересующие нас языки и обрабатывающих их на основе микропрограммных методов. Одним из важных недостатков обработки изображений на основе ПК является то, что каждый раз при решении соответствующих задач на ЭВМ приходится разрабатывать специальную программу вычислений. В связи с этим целесообразно применять механизм сжатия информации в целях экономии памяти ЭВМ.

Предлагаемые в настоящей работе методы проектирования РП отличаются высокой универсальностью, свободны от многих недостатков ПК и базируются на погружении автоматных и контекстно-свободных грамматик в специальную алгебраическую структуру — алгебру рекурсивных преобразователей (АРП). Это позволяет намного упростить процесс синтеза РП на основе как программной, так и аппаратной реализации. Предлагаемый подход является новым в технологии обработки изображений и согласуется с современными тенденциями развития ЭВМ в соответствии с микропрограммной реализацией их функций.

На основании изложенного основная задача в данной работе — построение АРП для создания РП, предназначенных для рекурсивной обработки изображений с позиций одного и того же подхода.

Рассмотрим представимость выражений в РП, исходя из АРП. Пусть P, Q, R, R_k, x, z_1, z_2, x_k $(k = \overline{1, M})$ — произвольные выражения, представимые в РП, e — пустая цепочка, Δ — пустое выражение. Сигнатуру АРП составляют следующие операции:

$$P \vee Q,\ P \cdot Q,\ {}_x\{P\},\ \{P\}_x,\ {}_x\{P\}^+,\ \{P\}_x^+,\ {}_{z1}\{P({}^x_k\underline{z_2Q}x_kR_k)\},\ {}_{z1}\{P({}^x_k\underline{z_2Q}x_kR_k)\}^+, \qquad (1)$$

где x, x_k, z_1, z_2 — входные сигналы УС РП; $P \vee Q$ — дизъюнкция выражений, $P \cdot Q$ — их произведение; ${}_x\{P\}$, $\{P\}_x$ — левая и правая регулярные x-итерации; ${}_x\{P\}^+$, $\{P\}_x^+$ — левая и правая позитивные регулярные x-итерации; ${}_{z1}\{P({}^x_k\underline{z_2Q}x_kR_k)\}$ — рекурсивная z_1-итерация; ${}_{z1}\{P({}^x_k\underline{z_2Q}x_kR_k)\}^+$ — рекурсивная позитивная z_1-итерация; ${}^x_k\underline{z_2Q}x_kR_k = \underline{z_2Q}x_1R_1 \cdot \underline{z_2Q}x_2R_2 \cdot \ldots \cdot \underline{z_2Q}x_MR_M$; $\underline{\underline{z_2Q}}$ — опорные терминалы, которые не итерируются как автономные; $k = \overline{1, M}$ — индекс x_kR_k. При $k = 1$ получаем

$${}_{z1}\{P\underline{z_2Q}x_1R_1\} = z_2Q \vee z_1Pz_2Qx_1R_1 \vee (z_1P)^2z_2Q(x_1R_1)^2 \vee \ldots,$$

$${}_{z1}\{P\underline{z_2Q}x_1R_1\}^+ = z_1Pz_2Qx_1R_1 \vee (z_1P)^2z_2Q(x_1R_1)^2 \vee \ldots,$$

$${}_x\{P\} = e \vee xP \vee (xP)^2 \vee \ldots,$$

$$\{P\}_x = e \vee Px \vee (Px)^2 \vee \ldots,$$

$${}_x\{P\}^+ = xP \vee (xP)^2 \vee (xP)^3 \vee \ldots,$$

$$\{P\}_x^+ = Px \vee (Px)^2 \vee (Px)^3 \vee \ldots .$$

Аналогичным образом осуществляется развертка рекурсивной z_1-итерации при $k > 1$.

О п р е д е л е н и е. Выражения, образованные на основе суперпозиции операций (1), называются рекурсивными. По индукции определяем:

1) терминалы $x, x_1, x_2, \ldots, x_M, y_1, y_2, \ldots, y_F, z_1, z_2, e, \Delta$ — рекурсивные выражения;

2) если $P, Q, R, R_k, x, z_1, z_2, x_k$ $(k = \overline{1, M})$ — рекурсивные выражения, то ими являются $P \vee Q$, $P \cdot Q$, ${}_{x}\{P\}$, $\{P\}_{x}$, ${}_{x}\{P\}^{+}$, $\{P\}_{x}^{+}$, ${}_{z1}\{P({}^{x}_{k}\underline{z_2Q}x_kR_k)\}$, ${}_{z1}\{P({}^{x}_{k}\underline{z_2Q}x_kR_k)\}^{+}$;

3) к рекурсивным выражениям относятся те и только те выражения, которые перечислены в пп. 1, 2.

О п р е д е л е н и е. Конфигурацией K_r рекурсивного выражения S называется конечная цепочка в алфавите $Z = \langle X, Y\rangle$:

$$K_r = x_{r1}y_{r1}x_{r2}y_{r2} \ldots x_{rn}y_{rn},$$

которая при поступлении на вход РП в начальном состоянии переводит его в конечное состояние.

Например, конфигурациями рекурсивного выражения ${}_{z1}\{P\underline{z_2Q}x_1R_1\}$ являются $(z_1P)^3z_2Q(x_1R_1)^2$ или $(z_1P)^2z_2Q(x_1R_1)^4$ и т. д.

О п р е д е л е н и е. Множество конфигураций $K(S)$ рекурсивного выражения S, представленного в РП, называется языком, порожденным данным рекурсивным выражением.

О п р е д е л е н и е. Пусть R, S — рекурсивные выражения. Выражения R, S называются эквивалентными, если они порождают один и тот же язык, т. е. $K(R) = K(S)$.

Введенное отношение эквивалентности является рефлексивным, транзитивным и симметричным.

Для преобразования рекурсивных выражений предлагается система аксиом Σ_1, включающая следующие тождества:

T_1 $\quad Re = R$;

T_2 $\quad eR = R$;

T_3 $\quad R\Delta = \Delta$;

T_4 $\quad \Delta R = \Delta$;

T_5 $\quad e \vee \Delta = e$;

T_6 $\quad P(QR) = (PQ)R$;

T_7 $\quad P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$;

T_8 $\quad P \vee Q = Q \vee P$;

T_9 $\quad R \vee R = R$;

T_{10} $\quad P(Q \vee R) = PQ \vee PR$;

T_{11} $\quad (Q \vee R)P = QP \vee RP$;

T_{12} $\quad {}_{x}\{P\} = e \vee xP_{x}\{P\}$;

T_{13} $\quad \{P\}_{x} = e \vee Px\{P\}_{x}$;

T_{14} $\quad {}_{x}\{R\}Q = {}_{x}\{R\}^{+} \vee Q$, где $Q \notin \{\Delta, e\}$;

T_{15} $\quad \{R\}_{x}Q = \{R\}_{x}^{+} \vee Q$, где $Q \notin \{\Delta, e\}$;

T_{16} $\quad {}_{z1}\{P\underline{z_2Q}x_1R_1\} = z_2Q \vee z_1P_{z1}\{P\underline{z_2Q}x_1R_1\}x_1R_1$;

T_{17} $\quad {}_{z1}\{P\underline{z_2Q}x_1R_1\underline{z_2Q}x_2R_2\} = z_1P_{z1}\{P\underline{z_2Q}x_1R_1\underline{z_2Q}x_2R_2\} \times$
$\times\, x_1R_{1z1}\{P\underline{z_2Q}x_1R_1\underline{z_2Q}x_2R_2\}x_2R_2 \vee z_2Q_{x1}\{R_1z_2Q\}$;

T_{18} $\quad {}_{z1}\{P({}^{x}_{k}\underline{z_2Q}x_kR_k)\} = {}_{z1}\{P\}^{+} \vee {}_{z2}\{Q(x_1R_1 \vee x_2R_2 \vee \ldots \vee x_{M-1}R_{M-1}\}^{+} \vee$
$\vee\, z_2Q_{xM}\{R_M\}$.

Правила вывода:

1. Подстановка. Пусть P' — результат замены вхождения S на Q в выражении P. Тогда

$$\frac{S = Q,\ P = R}{P' = P,\ P' = R}. \tag{2}$$

2. Решение уравнений. Пусть L, P — соответственно левый и правый контексты выражения R. Тогда

$$\frac{LRP = L(xSR \vee Q)P}{LRP = L({}_{x}\{S\}^{+} \vee Q)P}; \tag{3}$$

$$\frac{LRP = L(RxS \vee Q)P}{LRP = LQ_{x}\{S\}P}; \tag{4}$$

$$\frac{LRP = L(SxR \vee Q)P}{LRP = L(\{S\}_{x}^{+} \vee Q)P}; \tag{5}$$

$$\frac{LRP = L(RSx \vee Q)P}{LRP = LQ\{S\}_{x}P}; \tag{6}$$

$$\frac{LRP = L(zQ({}^{x}_{k}Rx_kQ_k) \vee xS)P}{LRP = L_z\{Q({}^{x}_{k}\underline{xS}x_kQ_k)\}P}. \tag{7}$$

Теорема 1. Аксиоматическая система Σ_1 непротиворечива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Истинность аксиом T_1, T_2 следует из свойства e; T_3, T_4 — из свойства Δ; T_5 — из свойства e и Δ; T_6—T_{18} — из свойств операций АРП. Аксиома T_{18} определяет связь между рекурсивной z_1-итерацией и так называемым регулярным выражением. Действительно, представим левую часть аксиомы T_{18} в развернутом виде и произведем в ней разметку состояний с помощью вертикальных линий:

$$S = \underset{1}{|}{}_{z1}\{P\underset{1}{|}\ z_2Q\underset{2}{|}\ x_1R_1\underset{1}{|}\ z_2Q\underset{2}{|}\ x_2R_2\underset{1}{|}\ z_2Q\underset{2}{|}\ \dots\underset{1}{|}\ z_2Q\underset{2}{|}\ x_{M-1}R_{M-1}\underset{1}{|}\ z_2Q\underset{2}{|}\ x_MR_M\underset{2}{|}\}\underset{3}{|}. \tag{8}$$

Справедливость разметки следует из особенностей развертки рекурсивной z_1-итерации. Состояниями РП являются 1, 2, 3. где 1 — начальное состояние, 3 — заключительное состояние. На следующем шаге находим систему уравнений путем определения переходов между соседними состояниями:

$$\begin{gathered} S_1 = z_1PS_1 \vee z_2QS_2; \\ S_2 = x_1R_1S_1 \vee x_2R_2S_1 \vee \dots \vee x_{M-1}R_{M-1}S_1 \vee x_MR_MS_2 \vee e. \end{gathered} \tag{9}$$

Решив систему уравнений (9) по правилу (3), получим правую часть аксиомы T_{18}.

Правила вывода (2)—(7) не изменяют истинности выражений в АРП. Докажем справедливость правила (7) при $k = 1$. Предположим, что имеется истинное равенство:

$$R = zQRx_1Q_1 \vee xS. \tag{10}$$

С помощью последовательных подстановок получим истинное равенство:

$$R = (zQ)^{n+1}R(x_1Q_1)^{n+1} \vee (zQ)^n xS(x_1Q_1)^n \vee \dots \vee (zQ)xS(x_1Q_1) \vee xS. \tag{11}$$

Так как $e(xS)e = xS$, то

$$K({}_z\{Q\underline{x}\underline{S}x_1Q_1\}) \subset K(R). \tag{12}$$

С другой стороны, пусть произвольное выражение $P = (zQ)^k xS(x_1Q_1)^k \in$ $\in K(R)$. Выберем в (11) n равным числу k в P. Это означает, что $P \notin$ $\notin K((zQ)^{n+1}R(x_1Q_1)^{n+1})$, и из (11) следует, что $P \in K({}_z\{Q\underline{x}\underline{S}x_1Q_1\})$. Следовательно,

$$K(R) \subset K({}_z\{Q\underline{x}\underline{S}x_1Q_1\}). \tag{13}$$

Из (12) и (13) заключаем, что равенство $R = {}_z\{Q\underline{x}\underline{S}x_1Q_1\}$ истинно и является решением уравнения (10).

Аналогичным образом доказывается истинность остальных правил (3)—(6), а также (7) при $k > 1$.

Теорема доказана.

Правила (3)—(7) служат для устранения в грамматиках, представленных посредством систем уравнений, правых, левых и внутренних рекурсий. Именно с этой целью в АРП по сравнению с алгеброй регулярных событий [1] дополнительно введены две операции рекурсивной z_1-итерации (1).

Приведем ряд полезных соотношений, образующих в АРП систему вспомогательных тождеств Σ_2 и предназначенных для более ускоренного преобразования рекурсивных выражений:

${}_e\{e\}^+ = e;$	$\{S\}_x(S)_x = \{S\}_x^+;$
${}_e\{e\} = e;$	$\{S\}_x = \{S\}_x \vee e;$
${}_\Delta\{S\}^+ = \Delta;$	$\{S\}_x\{S\}_x = \{S\}_x;$
${}_\Delta\{S\} = \Delta;$	$\{Q \vee S\}_x = \{Q\}_x \vee \{S\}_x;$
$Q \vee \Delta = Q;$	$\{Q\}_{x1 \vee x2} = \{Q\}_{x1} \vee \{Q\}_{x2};$
$S_x\{PS\} = {}_e\{S_x(P)\}^+ \vee S;$	$\{Q\}_x \vee (Q)_x = \{Q\}_x;$
$S_x\{S\} = \{S\}_x^+ \vee S;$	$\{S\}_x = \{S\}_x^+ \vee e;$
${}_x(S)_x\{S\} = {}_x\{S\}^+;$	${}_x\{S\} = {}_x\{S\} \vee e;$
${}_x\{S\}_x(S) = {}_x\{S\}^+;$	${}_x\{S\}_x\{S\} = {}_x\{S\};$
${}_x\{S\}^+ = {}_x(S) \vee {}_x(S)_x\{S\}^+;$	${}_x\{S\}^+Q = {}_x\{S\}^+ \vee Q;$
${}_x\{S\} = {}_x\{S\}^+ \vee e;$	${}_x\{Q \vee S\} = {}_x\{Q\} \vee {}_x\{S\};$
$\{S\}_x^+ = (S)_x \vee (S)_x\{S\}_x^+;$	${}_{x1 \vee x2}\{Q\} = {}_{x1}\{Q\} \vee {}_{x2}\{Q\};$
$\{S\}_x^+Q = \{S\}_x^+ \vee Q;$	${}_x\{Q\} \vee {}_x(Q) = {}_x\{Q\}.$
$(S)_x\{S\}_x = \{S\}_x^+;$	

Рекурсивные выражения — это описания формальных грамматик в алгебраическом виде, представляющие собой структуры данных с операторами, которые их обрабатывают. Для нахождения рекурсивного выражения по заданной формальной грамматике применим алгебраический метод анализа РП.

Пусть задана контекстно-свободная грамматика (КС-грамматика) $G_0 =$ $= \langle N, \Sigma, T, H\rangle$, представленная в дизъюнктивной форме (ДФ) вида

$$P_i = w_{i1} \vee w_{i2} \vee \ldots \vee w_{ij} \vee \ldots \vee w_{i,g+1}, \tag{14}$$

где P_i $(i = \overline{1, g})$ — левые нетерминалы; w_{ij} $(j = \overline{1, g+1})$ — цепочки в алфавите $N \cup \Sigma$.

Построим следующий алгоритм.

Алгоритм 1. Анализ РП.

Вход. КС-грамматика $G_0 = \langle N, \Sigma, T, H\rangle$, представленная в ДФ (14).

Выход. Рекурсивное выражение.

Метод. Исключение нетерминалов на основе подстановки относительно начального нетерминала P_1.

Шаг 1. Доопределить терминалы грамматики символами операторов y_f.

Шаг 2. Произвести по правилам вывода (3)—(7) свертку циклов в тех уравнениях, где это имеет место, в зависимости от структуры ДФ.

Шаг 3. Положить $d = 1$, где d — индекс уравнения.

Шаг 4. Подсчитать в ДФ ранги правых нетерминалов, под которыми понимается количество их вхождений в правые части ДФ (14).

Шаг 5. Выбрать нетерминал P_j, соответствующий минимальному рангу $r_j^{\min}$. Если в ДФ имеются одинаковые ранги, то выбор P_j из них осуществляется произвольно.

Шаг 6. Подставить уравнение P_j взамен нетерминала P_j в те уравнения ДФ, где он содержится.

Шаг 7. Если возможно, то произвести по правилам (3)—(7) свертку циклов в тех уравнениях, которые задействованы на шаге 5.

Шаг 8. Произвести на основании систем Σ_1, Σ_2 минимизацию выражений в тех уравнениях, где произошла свертка циклов.

Шаг 9. Положить $d = d + 1$. Если $d \leq g$, то перейти к шагу 4, в противном случае к шагу 10.

Шаг 10. Если возможно, то произвести минимизацию найденного рекурсивного выражения.

Шаг 11. Конец.

Из алгоритма 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Произвольная КС-грамматика может быть представлена на основе суперпозиции операций (1) посредством рекурсивного выражения. Существует алгоритм, допускающий подобное представление.

Приведенный алгоритм может быть использован также для нахождения рекурсивных выражений исходя из регулярных, право- и леволинейных грамматик. Его практическое значение состоит в том, что для произвольных моделей изображений строится формальная грамматика, которая преобразуется в рекурсивное выражение. Данное выражение с синтаксической точки зрения соответствует исходной модели и может быть использовано для совместной разработки компилятора и программы вычислений. Единая структура компилятора и программы является универсальной, в связи с чем реализация моделей изображений при данном подходе сводится только к их представлению по определенным правилам (минимальным по своей сложности) в виде надлежащих описаний, поступающих на вход РП, реализованного программно или аппаратно.

Пример 1. Представить посредством рекурсивного выражения следующую КС-грамматику:

$$E = E + E \vee E \times E \vee cEd \vee a,$$

где E — нетерминал; $c = ($, $d =)$, $+$, $\times$, a — терминалы, причем a — операнд.

В соответствии с алгоритмом 1

1) доопределяем терминалы грамматики символами операторов y_f:

$$E = E_{+}(y_1)E \vee E_{x}(y_2)E \vee {}_{c}(y_3)E_{d}(y_4) \vee {}_{a}(y_5);$$

2) преобразуем найденную грамматику к виду

$$E = E({}_{+}(y_1) \vee {}_{x}(y_2))E \vee {}_{c}(y_3)E_{d}(y_4) \vee {}_{a}(y_5);$$

3) исключаем нетерминалы E в соответствии с правилом 7 и производим минимизацию найденного выражения:

$$E = {}_c\left\{ y_3 \, \underline{{}_a(y_5)} ({}_+(y_1) \vee {}_x(y_2)) \underline{{}_a(y_5)} {}_d(y_4) \right\}.$$

Для наглядности к полученному выражению можно применить аксиому T_{18}. Из примера следует, что в результате преобразований найдена рекурсивная структура, которая описывает класс арифметических выражений с операциями $+$, $\times$, (,) и операндами. Для задания в исходных моделях изображений условных переходов, циклов и т. д. можно использовать системы алгоритмических алгебр (как обычных [2], так и интерпретированных [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Глушков В. М.** Синтез цифровых автоматов. М.: Физматгиз, 1962.
2. **Глушков В. М.** Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм // Кибернетика. 1965. № 5.
3. **Водопьянов В. К.** Реализация аналитических и логических выражений в дискретных преобразователях // Автоматика и вычислительная техника. 1982. № 4.

Поступила в редакцию 11 октября 1995 г.
