

УДК 621.372.542

В. В. Мясников

(Самара)

ЧЕТНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФИЛЬТРАМИ С ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ*

Вводится и анализируется семейство полиномиальных базисных функций, предназначенных для эффективной параллельно-рекурсивной реализации линейных цифровых фильтров с осесимметричными конечными импульсными характеристиками. Приводятся алгоритм синтеза базисных функций и алгоритм параллельно-рекурсивной обработки изображений на их основе, даются оценки вычислительной сложности, демонстрирующие преимущество предлагаемого алгоритма КИХ-фильтрации по сравнению с известными.

Обработка изображений в скользящем окне и полиномиальные базисы. В задачах обработки изображений популярны алгоритмы, использующие двумерные линейные фильтры с конечной импульсной характеристикой — КИХ-фильтры. Область действия фильтра, или «окно обработки», как правило, представляет собой прямоугольный фрагмент, который в процессе обработки смещается по изображению, занимая все возможные положения в плоскости дискретных аргументов. При каждом положении окна по содержащимся в нем отсчетам вычисляется значение выходного отсчета, соответствующего центру окна. Такая схема обработки «скользящим окном» применяется в задачах фильтрации изображений, обнаружения и распознавания объектов, оценки локальных характеристик и т. д. Ей соответствует известное соотношение свертки

$$y(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-M_1}^{M_1} \sum_{m_2=-M_2}^{M_2} h(m_1, m_2)x(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \quad (1)$$

где $x(n_1, n_2)$ и $y(n_1, n_2)$ — двумерные последовательности отсчетов входного и выходного изображений соответственно, заданные на плоскости целочисленных аргументов; $h(m_1, m_2)$ — импульсная характеристика фильтра, определенная на прямоугольной области $[-M_1, M_1] \times [-M_2, M_2]$.

В работах [1, 2] показано, что объем вычислений по формуле (1) можно снизить, если импульсную характеристику представить в виде звеньев, свертки с которыми реализуются с малыми вычислительными затратами. В [3, 4] предложено использовать в качестве звеньев полиномиальные базисные функции вида

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \beta_{kl} p_k(m_1) p_l(m_2),$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 93-012-486).

где

$$p_k(m) = \sum_{i=0}^k a_{ki} m^i \quad (2)$$

— любой «одномерный» полином k -го порядка с коэффициентами $\{a_{ki}\}_{i=0}^k$ ($a_{kk} \neq 0$); $\{\beta_{ki}\}_{k,i=0}^{K,L}$ — коэффициенты разложения импульсной характеристики по двумерному факторизуемому полиномиальному базису, задаваемому соотношением (2). При таком представлении свертка (1) преобразуется к виду

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^L \beta_{ki} \mu_{ki}(n_1, n_2). \quad (3)$$

Здесь

$$\mu_{ki}(n_1, n_2) = \sum_{m_2=-M_2}^{M_2} p_i(m_2) \left[\sum_{m_1=-M_1}^{M_1} p_k(m_1) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \right] \quad (4)$$

— «обобщенные моменты» изображения, вычисленные в окне обработки с использованием системы базисных функций (2). Вычисление обобщенных моментов можно производить путем последовательной обработки изображения по каждой из координат, что позволяет свести задачу оптимизации алгоритма к одномерному случаю. В рамках представления (2)—(4) в упомянутых работах введено семейство базисов, обеспечивающее вычисление свертки (1) с минимальным количеством арифметических операций при произвольном виде импульсной характеристики.

Существует, однако, достаточно широкий круг задач, когда необходимо проводить вычисление двумерной свертки (1) с импульсными характеристиками специального вида. Так, в задачах фильтрации изображений и цифрового моделирования видеоинформационного тракта импульсные характеристики часто оказываются четными функциями. В связи с этим представляется целесообразным построить семейство полиномиальных базисных функций, адаптированных специально для описания осесимметричных импульсных характеристик, а также разработать алгоритмы параллельно-рекурсивной фильтрации изображений с использованием подобных базисов.

Будем проводить рассуждения в терминах одномерных сигналов, а затем обобщим результаты на двумерный случай.

Семейство рекурсивных полиномиальных функций четных степеней. Как отмечается в [1], расчет свертки вида

$$\mu_k(n) = \sum_{m=-M}^M p_k(m) x(n - m) \quad (5)$$

производится эффективно в случае, если фильтр с конечной импульсной характеристикой $p_k(m)$ описывается разностным уравнением, т. е. реализуется рекурсивно. Таким образом, наша задача заключается в поиске полиномиальных функций (2), позволяющих работать в рамках простых рекурсивных схем. При этом границы поиска подобного полиномиального набора ограничены возможностью использования $(K + 1)$ степеней свободы [2, 3], каждая из которых соответствует одному из коэффициентов в представлении (2) полинома старшего порядка.

Легко показать возможность выполнения одного из двух приведенных ниже равенств для пары специально подобранных полиномиальных функций [3]:

$$p_k(m) = p_k(m - 1) + p_{k-1}(m), \quad p_k(m) = p_k(m - 1) + p_{k-1}(m - 1) \quad (k > 0).$$

Тогда выполняется и следующее разностное уравнение для некоторого полиномиального базиса:

$$p_k(m) = 2p_k(m-1) - p_k(m-2) + p_{k-2}(m-1) \quad (k \geq 2). \quad (6)$$

Набор базисных функций, отвечающих соотношению (6), может быть использован в процедуре параллельно-рекурсивного расчета свертки (5).

Теперь определим общие ограничения, налагаемые на вид базиса и возникающие при выполнении соотношения (6). Подставив выражение (2) в последнее разностное уравнение, получим ($k \leq K$)

$$\begin{cases} a_{(k-2)(2j)} = 2 \sum_{i=j+1}^{\lfloor k/2 \rfloor} a_{k(2i)} C_{(2i)}^{(2j)}, & 0 \leq j \leq \lfloor k/2 \rfloor - 1, \\ a_{(k-2)(2j+1)} = 2 \sum_{i=j+1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} a_{k(2i+1)} C_{(2i+1)}^{(2j+1)}, & 0 \leq j \leq \lfloor (k-1)/2 \rfloor - 1, \end{cases} \quad (7)$$

где [...] — целая часть числа; C_i^j — биномиальные коэффициенты. Легко показать, что семейству рекурсивных полиномиальных функций, заданных выражением (6), присуще следующее свойство. Если известно, что одна из базисных функций данного семейства является симметричной относительно нуля функцией, то и все базисные функции меньших степеней также являются симметричными. Используем это свойство в дальнейшем, а набор полиномиальных функций, удовлетворяющих разностному уравнению (6) и соответственно соотношению (7) с четными индексами k , назовем семейством полиномиальных функций четных степеней для рекурсивной обработки.

Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления одномерных обобщенных моментов четных степеней. Пусть для последовательности возрастающих значений целочисленного аргумента n требуется вычислить обобщенные моменты четных степеней до K -го включительно. Подставляя в выражение для свертки (5) рекуррентное соотношение (6), получим ($2 \leq k \leq K$; k, K — четные)

$$\begin{cases} \mu_0(m) = \mu_0(m-1) + p_0(M)\{x(m+M) - x(m-M-1)\}, \\ \mu_k(m) = 2\mu_k(m-1) + \mu_{k-2}(m-1) - \mu_k(m-2) + \\ + p_k(-M)x(m+M) - p_k(M+1)x(m-M-1) - \\ - p_k(-M-1)x(m+M-1) + p_k(M)x(m-M-2). \end{cases} \quad (8)$$

Будем оценивать сложность вычислительной процедуры числом операций сложения (U_a) и умножения (U_m), требуемых для расчета всех обобщенных моментов (5) на одном шаге. Тогда вычислительная сложность предложенной процедуры составляет (здесь и везде далее умножение на «2» не учитывается как тривиальное):

$$U_a(K) = 3K + 2, \quad U_m(K) = 2K + 1.$$

Используем факт сохранения симметрии в семействе полиномиальных функций четных степеней для упрощения параллельно-рекурсивного алгоритма расчета обобщенных моментов. Пусть самая старшая полиномиальная базисная функция является четной, тогда и весь базисный набор представляет собой совокупность заданных на симметричном интервале функций, для которых выполняется равенство (k — четное)

$$p_k(m) = p_k(-m), \quad m \in [-M, M], \quad k = \overline{0, K}.$$

Очевидно, что в подобной ситуации схема (8) может быть преобразована к виду (k — четное)

$$\begin{cases} \mu_0(m) = \mu_0(m-1) + p_0(M)\{x(m+M) - x(m-M-1)\}, \\ \gamma_1 = x(m-M-2) + x(m+M), \quad \gamma_2 = x(m-M-1) + x(m+M-1), \\ \mu_k(m) = 2\mu_k(m-1) + \mu_{k-2}(m-1) - \mu_k(m-2) - \\ - p_k(M+1)\gamma_2 + p_k(M)\gamma_1, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Вычислительные затраты подобного алгоритма на одном шаге составляют:

$$U_a(K) = 2K + 4, \quad U_m(K) = K + 1, \quad K > 0.$$

Заметим, что на обеспечение симметрии здесь были использованы ($K/2$) степеней свободы и одна степень свободы на обеспечение равенства $a_{00} = 1$. Оставшиеся ($K/2$) степеней свободы должны быть использованы для обнуления значений части полиномиальных функций на границе интервала, не выходя при этом за рамки четности базиса. Необходимого эффекта можно добиться следующим образом. Перепишем разностное уравнение (6) в виде

$$p_{k-2}(m-1) = p_k(m) - 2p_k(m-1) + p_k(m-2).$$

Очевидно, что если все значения полинома в правой части нулевые, то левая часть выражения также равна нулю. Таким образом, если корни полинома расположить на действительной оси последовательно в отсчетах целочисленного аргумента, то при переходе к полиному с меньшей степенью подобная «область нулей» сужается, теряя два нуля по краям области. Следовательно, если «область нулей» включает в себя интервал $[M, M+1]$, то для ($K/4$) старших полиномов коэффициенты $p_k(M)$ и $p_k(M+1)$ будут нулевыми, а схема рекурсии — простейшей. Для ($K/4$) младших полиномов схема рекурсии не изменится, так как не будут равны нулю значения соответствующих коэффициентов. В случае если количество полиномиальных базисных функций нечетно, возможно появление дополнительного рекурсивного звена для полинома степени $k = 2[K/4] + 2$ с нулевым значением одного из коэффициентов $p_k(M)$ или $p_k(M+1)$. Учитывая симметричность всех базисных функций, это явление может быть проиллюстрировано одной из двух схем, представленных на рис. 1.

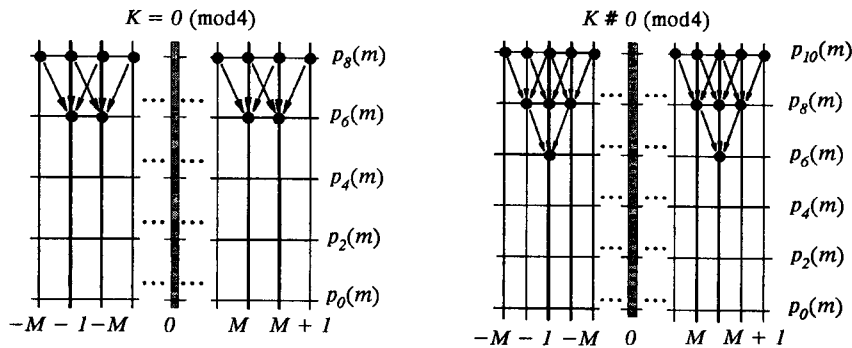


Рис. 1. Изменение «области нулей» в четном полиномиальном базисе

Таким образом, задача сводится к построению базиса по полиному наивысшего порядка, где последний имеет вид:

$$p_k(m) = \lambda_k \prod_{i=0}^{[K/2]-1} (m^2 - (M + 1 + [(K - 2)/4] - i)^2).$$

Величина $\lambda_k = 1/k!$ — нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение равенства $a_{00} = 1$. Представление младших полиномиальных базисных функций можно получить по формуле (7). Схема параллельно-рекурсивного расчета обобщенных моментов на основе полученного базиса имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0(m) = \mu_0(m - 1) + x(m + M) - x(m - M - 1), \\ \gamma_1 = x(m + M) - x(m - M - 2), \quad \gamma_2 = x(m + M - 1) - x(m - M - 1), \\ \mu_k(m) = 2\mu_k(m - 1) - \mu_k(m - 2) + \mu_{k-2}(m - 1) + \xi_k, \\ \text{где } \xi_k = \begin{cases} p_k(M)\gamma_1 - p_k(M + 1)\gamma_2, & \text{если } 2 \leq k \leq 2[K/4], \\ p_k(M)\gamma_1, & \text{если } K \neq 0(\text{mod}4), \quad k = 2[K/4] + 2, \\ 0, & \text{если } 2 + 2[(K + 2)/4] \leq k \leq K, \end{cases} \end{array} \right.$$

а сложность обработки определяется выражением

$$U_a(K) = 1,5K + 4, \quad U_m(K) = K/2 \quad (K > 2).$$

Приведенная оценка приблизительно в 1,33—2 раза ниже соответствующих затрат на общий алгоритм, предложенный в [4].

При использовании моментов для вычисления свертки сигнала с четной конечной импульсной характеристикой оценка сложности алгоритма модифицируется с учетом затрат на скалярное произведение и равна

$$U_a(K) = 2K + 4, \quad U_m(K) = K \quad (K > 2),$$

что приблизительно в 1,5—2 раза лучше подобных оценок, приведенных в [4].

Параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления двумерных обобщенных моментов четных степеней. Зададим базисный набор, состоящий из разделимых четных полиномиальных функций следующего вида:

$$p_{kl}(m_1, m_2) = p_k(m_1)p_l(m_2),$$

здесь k, l — четные индексы, совместно задающие совокупность базисных функций и ограниченные некоторой парой (K, L) . Подобное представление позволяет, как отмечалось ранее, использовать построчно-столбцовую схему обработки (4). В результате алгоритм параллельно-рекурсивного вычисления двумерных четных обобщенных моментов примет следующий вид (k — четное):

— формирование вектора одномерных моментов в процессе рекурсивной обработки по строкам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0(m_1, m_2) = \mu_0(m_1 - 1, m_2) + x(m_1 + M_1, m_2) - x(m_1 - M_1 - 1, m_2), \\ \gamma_1(m_2) = x(m_1 + M_1, m_2) - x(m_1 - M_1 - 2, m_2), \\ \gamma_2(m_2) = x(m_1 + M_1 - 1, m_2) - x(m_1 - M_1 - 1, m_2), \\ \mu_k(m_1, m_2) = 2\mu_k(m_1 - 1, m_2) - \mu_k(m_1 - 2, m_2) + \mu_{k-2}(m_1 - 1, m_2) + \xi_k(m_2), \\ \text{где } \xi_k(m_2) = \begin{cases} p_k(M_1)\gamma_1(m_2) - p_k(M_1 + 1)\gamma_2(m_2), & 2 \leq k \leq 2[K/4], \\ p_k(M_1)\gamma_1(m_2), & \text{если } K \neq 0(\text{mod}4), k = 2[K/4] + 2, \\ 0, & 2 + 2[(K + 2)/4] \leq k \leq K, \end{cases} \end{array} \right.$$

— вычисление матрицы двумерных моментов в процессе рекурсивной обработки по столбцам ($0 \leq k \leq K$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{k0}(m_1, m_2) = \mu_{k0}(m_1, m_2 - 1) + \mu_k(m_1, m_2 + M_2) - \mu_k(m_1, m_2 - M_2 - 1), \\ \psi_k^1 = \mu_k(m_1, m_2 + M_2) - \mu_k(m_1, m_2 - M_2 - 2), \\ \psi_k^2 = \mu_k(m_1, m_2 + M_2 - 1) - \mu_k(m_1, m_2 - M_2 - 1), \\ \mu_{kl}(m_1, m_2) = 2\mu_{kl}(m_1, m_2 - 1) - \mu_{kl}(m_1, m_2 - 2) + \mu_{k(l-2)}(m_1, m_2 - 1) + \xi_{kl}, \\ \text{где } \xi_{kl} = \begin{cases} p_l(M_2)\psi_k^1 - p_l(M_2 + 1)\psi_k^2, & 2 \leq l \leq 2[L/4], \\ p_l(M_2)\psi_k^1, & \text{если } L \neq 0(\text{mod}4), l = 2[L/4] + 2, \\ 0, & 2 + 2[(L + 2)/4] \leq l \leq L. \end{cases} \end{array} \right.$$

Вычислительная сложность приведенной процедуры, оцениваемая количеством арифметических операций, составляет:

$$U_a(K, L) = 0,75(K + 2) \left(L + 4 \frac{2}{3} \right) + 1,$$

$$U_m(K, L) = 0,25(K + 2)(L + 2) - 1 \quad (K, L > 2),$$

а с учетом затрат на последующее вычисление скалярного произведения (3) (для расчета свертки с двумерным осесимметричным неразделимым КИХ-фильтром)

$$U_a(K, L) = (K + 2)(L + 4),$$

$$U_m(K, L) = 0,5(K + 2)(L + 2) - 1 \quad (K, L > 2).$$

Данные оценки вычислительной сложности приблизительно в 2—4 раза лучше подобных оценок, приведенных в [4].

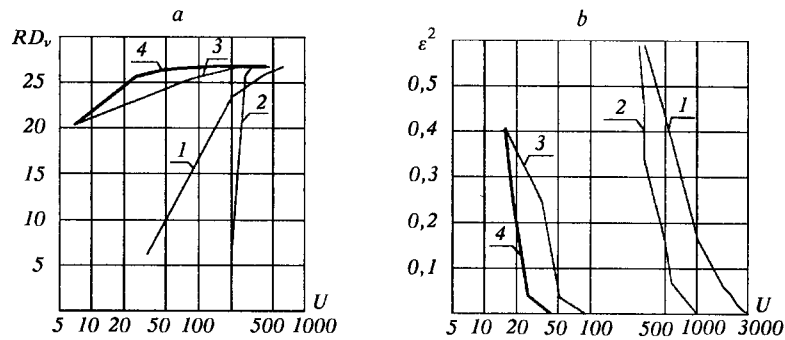


Рис. 2. Анализ эффективности применения четного полиномиального базиса: a — в задаче обнаружения объекта; b — в задаче аппроксимации импульсной характеристики

Анализ эффективности применения четного полиномиального фильтра. Анализ эффективности алгоритма на основе четного полиномиального фильтра в обработке изображений проведем на примере решения задачи обнаружения объекта и задачи аппроксимации заданной импульсной характеристики. Для полноты картины сравним работу построенного алгоритма (рис. 2, кривая 4) с известными алгоритмами: 1) прямой свертки; 2) быстрой свертки по схеме Кули — Тьюки с основанием «2» и процедурой оптимального секционирования входного сигнала [5]; 3) параллельно-рекурсивной фильтрации на основе полиномиального базиса с минимальной вычислительной сложностью [4].

В задаче обнаружения в качестве объекта примем изображение «креста» (размером 9×9 элементов) единичной яркости на нулевом фоне, подвергнутое линейному искажению путем двукратного усреднения квадратным окном 3×3 элемента и зашумлению аддитивным белым шумом с дисперсией D_v . Качество полиномиального фильтра при обнаружении объектов охарактеризуем зависимостью произведения RD_v (R — расстояние Махалонобиса между классами объекта и шума) от вычислительной сложности обработки $U = U_a + \eta U_m$, где η — коэффициент относительной сложности операции умножения (при построении зависимостей примем типичное значение $\eta = 3$). На рис. 2, a приведены соответствующие графики зависимостей (1—4). Сложность фильтров, реализованных на основе прямой и быстрой свертки, регулировалась путем изменения размеров окна обработки.

В задаче аппроксимации импульсной характеристики рассмотрим двумерную «гауссоиду», т. е. разделимую по координатам функцию вида

$$g(m_1, m_2) = \exp(-0,01(m_1^2 + m_2^2)),$$

заданную на симметричном окне $|m_1| \leq 15, |m_2| \leq 15$. Аппроксимация проводилась методом наименьших квадратов, при этом учитывалась разделимость данной импульсной характеристики. На рис. 2, b показаны зависимости погрешности аппроксимации от вычислительной сложности для фильтров, реализованных по описанным выше четырем схемам.

Таким образом, представленные результаты показывают, что в задачах обработки изображений линейными КИХ-фильтрами с четными импульсными характеристиками существует возможность значительной экономии объема вычислений, основанной на использовании декомпозиции ядра свертки на множество полиномиальных функций четных степеней, при использовании которых параллельно-рекурсивный алгоритм обработки изображений имеет наиболее простую структуру, удобную как для программной, так и для аппаратной реализации. Приведен алгоритм построения подобного набора базисных полиномиальных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ярославский Л. П. О возможности параллельной рекурсивной организации цифровых фильтров // Радиотехника. 1984. № 3.
2. Сергеев В. В. Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры в задачах обработки изображений // Радиотехника. 1990. № 8.
3. Glumov N. I., Myasnikov V. V., Sergeyev V. V. Polynomial bases for image processing in a sliding window // Pattern Recognition and Image Analysis. 1994. N 4. P. 408.
4. Glumov N. I., Myasnikov V. V., Sergeyev V. V. Application of polynomial bases for image processing using sliding window // Image Processing and Computer Graphics (DIP-94): Proc. SPIE. 1995. 2363.
5. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. М.: Сов. радио, 1973.

Поступила в редакцию 9 октября 1995 г.

Реклама продукции в нашем журнале — залог Вашего успеха!