

УДК 621.391.266

Я. А. Фурман

(Йошкар-Ола)

ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫЕ СИМВОЛЫ ДЛЯ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ

Решается задача формирования алфавита визуальных символов с высокой эффективностью взаимного разрешения и распознавания. Символы представляют собой композиционные контуры, составленные из полного семейства элементарных контуров, образующих ортогональный базис в k -мерном пространстве. Показано, что композиционные контуры обладают дельтовидной автокорреляционной функцией и равномерным энергетическим спектром.

Введение. Визуально различимые символы, используемые для передачи сообщений — буквы, иероглифы, цифры и другие знаки, формировались в течение длительного времени с эвристических позиций. Освоение проводного и радиоканалов в результате технологий последних десятилетий на основе таких научных подходов, как теория статистических решений и другие, позволило создать оптимальные с позиций заданных критериев качества устройства передачи и обработки информации. При этом базовые сигналы описывались той или иной системой ортогональных функций. Чаще всего применялись гармонические функции, визуальное представление которых имело мало общего с изображениями символов, используемых для обмена информацией.

Практически важными критериями качества букв, цифр и других символов являются критерии совместного наилучшего разрешения символов и наилучшего распознавания каждого символа из заданного алфавита. Отметим, что требования к сигналам, оптимальным с точки зрения разрешения и распознавания, противоречивы. Как следует из положений теории сигналов [1, 2], автокорреляционная функция (АКФ) сигнала, оптимального с позиции наилучшего разрешения, должна иметь вид дельта-функции. Амплитудный (модульный) или энергетический спектр сигнала будет равномерным вдоль оси частот (рис. 1). Как известно, к операции образования взаимно-корреляционной функции (ВКФ) между зашумленным сигналом и эталонами всех сигналов из данного алфавита сводится процедура обработки сигналов на фоне широкополосных шумов. Если АКФ каждого из сигналов будет носить дельтовидный характер, то сигналы на выходе устройства обработки разделимы наилучшим образом.

При распознавании в условиях воздействия шумов сигналы, относящиеся к одному из k классов, должны обладать максимальной несхожестью с сигналами всех других классов [3]. ВКФ таких сигналов везде слабо отличается от нуля, АКФ имеет хорошо выраженную равномерность, а их спектры не содержат составляющих на одной и той же частоте. Когда число классов k равно количеству возможных частот в спектре сигналов, каждый сигнал характеризуется только одной гармоникой, не совпадающей

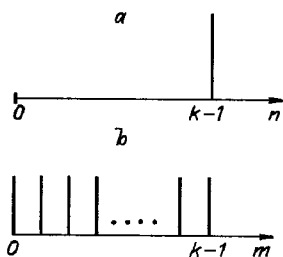


Рис. 1. Смещенная АКФ (а) и энергетический спектр сигнала (б), эффективные для задачи разрешения

Рис. 2. Модуль АКФ и энергетические спектры сигналов, эффективных для задачи распознавания

по частоте с ненулевыми составляющими спектра других сигналов из алфавита (рис. 2). Таким образом, для эффективного разрешения сигнал должен иметь дельтовидную АКФ и равномерный спектр, а для эффективного распознавания — дельтовидный спектр и равномерную АКФ.

Еще одним свойством «хорошего» сигнала при передаче по каналу связи является равенство единице пик-фактора, т. е. когда энергия сигнала равномерно распределена в пределах интервала его существования [4]. Применительно к визуально наблюдаемым символам это означает, что в изображении символа все составляющие должны быть одинаковыми по длине.

В статье предлагается один из возможных подходов к формированию алфавита символов, рассматриваемых как сигналы и обладающих подобными противоречивыми свойствами [5].

1. Контурная модель визуально наблюдаемого символа. Символы будем рассматривать как полигональные контуры, т. е. как ориентированные многоугольники с числом составляющих их элементарных векторов (ЭВ), равным k , и заданным положением начального ЭВ [6, 7].

Для обозначения контуров примем прописные, а составляющих их ЭВ — соответствующие строчные буквы греческого алфавита. Контур будем задавать в комплексной плоскости, т. е.

$$\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1} = \{\gamma_1(n) + i\gamma_2(n)\}_{0, k-1} = \{|\gamma(n)| \exp\{i\varphi(n)\}\}_{0, k-1},$$

где $\gamma_1(n)$ и $\gamma_2(n)$ — реальная и мнимая части; $|\gamma(n)|$ и $\varphi(n)$ — модуль и аргумент n -го ЭВ; k — размерность контура. Например, символ на рис. 3 задается как $\Gamma = \{-i; 3; 4i; -3; 2i; 3\}$.

Выбор для представления контуров комплексного линейного пространства C^k оправдан тем, что в нем скалярное произведение, определяющее степень схожести двух векторов, из-за наличия мнимой части более информативно, чем скалярное произведение в действительном линейном пространстве E^{2k} [8]. Например, скалярное произведение для двух одинаковых контуров, один из которых повернут на $\pi/2$ по отношению к другому, в E^{2k} равно нулю. Это свидетельствует о полном отсутствии схожести между двумя подобными изображениями. В то же время в пространстве C^k модуль скалярного произведения достигает максимального значения и имеется возможность принять обоснованное решение об идентичности форм, задаваемых контурами. Данный подход к представлению контуров и связанные с ним возможности их обработки рассмотрены в [9, 10].

Введем в C^k ортогональный базис из контуров Γ_m , $m = 0, 1, \dots, k-1$ [11, 12]:

$$\Gamma_m = \{\gamma_m(n)\}_{0, k-1} = \left\{ \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\} \right\}_{0, k-1}. \quad (1)$$

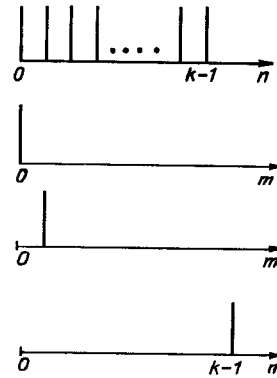
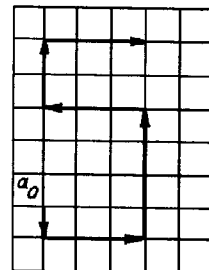


Рис. 3. Полигональное представление символа



Контуры Γ_m , $m = 0, 1, \dots, k-1$, назовем элементарными (ЭК) порядка m . Отметим, что все ЭВ контуров Γ_m по модулю одинаковы. Перечислим необходимые в дальнейшем свойства ЭК.

1. Ортогональность и коммутативность:

$$(\Gamma_m, \Gamma_l) = (\Gamma_l, \Gamma_m) = \begin{cases} k = \|\Gamma\|^2 & \text{при } m = l, \\ 0 & \text{для остальных } m \text{ и } l. \end{cases}$$

2. Периодичность:

$$\Gamma_m = \Gamma_{m+\alpha k}, \quad \alpha — \text{целое число.}$$

3. Замкнутость. Все ЭК за исключением Γ_0 замкнуты, т. е.

$$\sum_{n=0}^{k-1} \gamma_m(n) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, k-1,$$

причем для ЭК Γ_0

$$\sum_{n=0}^{k-1} \gamma_0(n) = k.$$

4. Симметричность:

$$\Gamma_m = \Gamma_{k-m}^*.$$

5. Эргодичность:

$$\gamma_m(n) = \gamma_n(m). \quad (2)$$

Из свойств симметричности и эргодичности вытекают следующие равенства для ЭВ контуров Γ_m :

$$\gamma_m^*(n) = \gamma_n^*(m) = \gamma_{k-m}(n) = \gamma_n(k-m) = \gamma_{k-n}(m) = \gamma_m(k-m). \quad (3)$$

6. АКФ $H = \{\eta_m(s)\}_{0, k-1}$, где $\eta(s) = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma_m(n) \gamma_m^*(n+s)$, элементарного контура Γ_m также задает элементарный контур, т. е. $H_m = k\Gamma_{k-m} = k\Gamma_m^*$.

7. ВКФ элементарных контуров Γ_m и Γ_l , $l \neq m$, везде равна нулю.

$$a \quad \Gamma_0 = \{1, 1, 1, 1\}; \quad \Gamma_1 = \{1; i; -1; -i\}; \quad \Gamma_2 = \{1; -1; 1; -1\}; \quad \Gamma_3 = \{1; -i; -1; i\}$$

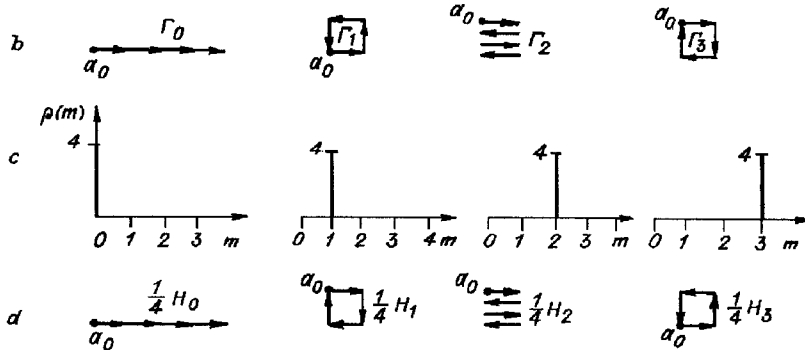


Рис. 4. Полное семейство элементарных контуров для $k = 4$:

a — коды контуров; b — виды контуров; c — спектры контуров; d — АКФ контуров

В качестве примера на рис. 4, б показано семейство ЭК для $k = 4$.

Прямое и обратное дискретные преобразования Фурье (ДПФ) произвольного контура Γ соответственно имеют вид

$$\rho(m) = (\Gamma, \Gamma_m) = \sum_{n=0}^{k-1} \gamma(n) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k} mn\right\}, \quad m = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$\gamma(n) = \frac{1}{k} (P, \Gamma_m^*) = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \rho(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\}, \quad n = 0, 1, \dots, k-1,$$

где $P = \{\rho(m)\}_{0, k-1}$ — спектр контура Γ .

Спектр $\rho_\mu^{(d)}(m)$, $m = 0, 1, \dots, k-1$, контура, полученного растяжением исходного контура Γ в $|\mu|$ раз, поворотом на угол $\Delta\varphi$ и сдвигом его начальной точки a_0 на d элементарных векторов, выражается через спектр $P = \{\rho(m)\}_{0, k-1}$ контура Γ следующим образом [12]:

$$\rho_\mu^{(d)}(m) = |\mu| \exp\left\{i \left[\frac{2\pi}{k} md + \Delta\varphi \right]\right\} \rho(m), \quad m = 0, 1, \dots, k-1. \quad (4)$$

Спектр ЭК порядка m состоит из нулевых компонент, кроме m -й компоненты, равной k , т. е. (рис. 4, с)

$$\rho_m(s) = \begin{cases} k & \text{при } s = m, \\ 0 & \text{при } s \neq m. \end{cases}$$

С каждым элементарным контуром Γ_m можно ассоциировать периодический процесс с некоторой круговой частотой. Конец текущего элементарного вектора контура перемещается по окружности, совершая m оборотов. Из-за стробоскопического эффекта количество визуально отмечаемых оборотов f при изменении порядка контура от нуля до $m = k/2$ увеличивается прямо пропорционально m , а при дальнейшем росте линейно уменьшается до $f = 1$ (рис. 5).

Произвольный контур $\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1}$ выражается следующей линейной комбинацией ЭК:

$$\Gamma = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \rho(m) \Gamma_m. \quad (5)$$

2. Композиционные контуры из полного семейства элементарных контуров. Композиционный контур определим как контур, состоящий из последовательности других контуров. Пусть $\Gamma_{0, 1, \dots, k-1}$ — такой контур, полученный в результате конкатенации полного семейства элементарных контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}$ (рис. 6):

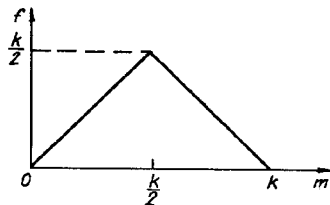


Рис. 5. Зависимость частоты периодического процесса, ассоциированного с элементарным контуром, от порядка контура

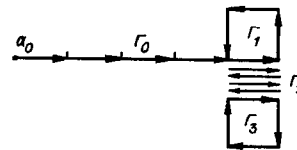


Рис. 6. Базовый композиционный контур для $k = 4$:

$$\Gamma_{0, 1, 2, 3} = \{1, 1, 1, 1, i, -i, 1, -1, 1, -1, 1, -i, -i, i\}$$

$$\Gamma_{0,1,\dots,k-1} = \{\Gamma_m\}_{0,k-1} = \{\gamma_0(0), \gamma_0(1), \dots, \gamma_0(k-1), \gamma_1(0), \gamma_1(1), \dots, \gamma_1(k-1), \gamma_2(0), \dots, \gamma_2(k-1), \gamma_3(0), \dots, \gamma_{k-1}(k-1)\}. \quad (6)$$

Размерность контура равна k^2 . Последовательность чисел в нижнем индексе отражает порядок следования ЭК, составляющих композиционный контур. Контур $\Gamma_{0,1,\dots,k-1}$ назовем базовым.

Спектр базового контура. ДПФ базового контура имеет вид

$$\rho_6(m) = \sum_{n=0}^{k^2-1} \gamma(n) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k} mn\right\}, \quad m = 0, 1, \dots, k-1. \quad (7)$$

Данное выражение представим в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \rho_6(m) &= \gamma_0(0) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} 0m\right\} + \gamma_0(1) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} 1m\right\} + \dots \\ &\dots + \gamma_0(k-1) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} (k-1)m\right\} + \gamma_1(0) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} km\right\} + \\ &+ \gamma_1(1) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} (k+1)m\right\} + \dots + \gamma_1(k-1) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} (k+k-1)m\right\} + \dots \\ &\dots + \gamma_{k-1}(0) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} [k(k-1)]m\right\} + \gamma_{k-1}(1) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} [k(k-1)]m\right\} + \dots \\ &\dots + \gamma_{k-1}(k-1) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} [k(k-1) + k-1]m\right\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся свойством эргодичности ЭК и представим экспоненциальные части слагаемых в виде произведения двух экспонент:

$$\begin{aligned} \rho_6(m) &= \gamma_0(0) e^{-i(2\pi/k)0m} + \gamma_1(0) e^{-i(2\pi/k)0m} e^{-i(2\pi/k^2)1m} + \dots \\ &\dots + \gamma_{k-1}(0) e^{-i(2\pi/k)0m} e^{-i(2\pi/k^2)(k-1)m} + \gamma_0(1) e^{-i(2\pi/k)1m} + \\ &+ \gamma_1(1) e^{-i(2\pi/k)1m} e^{-i(2\pi/k^2)1m} + \dots + \gamma_{k-1}(0) e^{-i(2\pi/k)1m} e^{-i(2\pi/k^2)(k-1)m} + \dots \\ &\dots + \gamma_0(k-1) e^{-i(2\pi/k)(k-1)m} + \gamma_1(k-1) e^{-i(2\pi/k)(k-1)m} e^{-i(2\pi/k^2)1m} + \dots \\ &\dots + \gamma_{k-1}(k-1) e^{-i(2\pi/k)(k-1)m} e^{-i(2\pi/k^2)(k-1)m}. \end{aligned}$$

Каждый s -й столбец в этом выражении, $s = 0, 1, \dots, k-1$, является произведением экспоненты $\exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} sm\right\}$ на спектр $\{\rho_s(m)\}_{0,k-1}$ элементарного контура порядка s . Поэтому

$$\rho_6(m) = \sum_{s=0}^{k-1} \rho_s(m) \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} sm\right\}. \quad (8)$$

Так как спектр ЭК порядка s содержит только одну ненулевую составляющую $\rho_s(s) = k, s = 0, 1, \dots, k - 1$, то выражение (8) упрощается и принимает вид

$$\rho_6(m) = k \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} m(m)_k\right\}, \quad m = 0, 1, \dots, k^2 - 1.$$

При получении данного выражения величина m в (8) заменяется на величину $(m)_k$, которая меняется в пределах от 0 до $k - 1$, т. е. это величина m по модулю k . Окончательно выражение для спектра базового контура записывается в виде

$$\{\rho_6(m)\}_{0, k^2 - 1} = \left\{k \exp\left\{-i \frac{2\pi}{k^2} m(m)_k\right\}\right\}_{0, k^2 - 1}. \quad (9)$$

Например, найдем элементарный вектор $\rho_6(5)$ базового контура, составленного из ЭК размерностью $k = 4$. В этом случае $m = 5, (m)_4 = (5)_4 = 1$. Применение формулы (9) дает следующий результат:

$$\rho_6(5) = 4 \exp\left\{-i \frac{2\pi}{16} 5 \cdot 1\right\} = 4(\cos 112,5^\circ - i \sin 112,5^\circ) = -1,53 - 3,69i.$$

Из полученного выражения вытекают следующие основные закономерности для спектра базового контура:

1) амплитудный и энергетический спектры равномерны во всей полосе частот и равны

$$|\rho_6(m)| = k; \quad |\rho_6(m)|^2 = k^2, \quad m = 0, 1, \dots, k^2 - 1; \quad (10)$$

2) при $m = \alpha k$, где $m = 0, 1, \dots, k - 1$, величина $(m)_k = 0$, следовательно, в этих точках составляющие спектра вещественны и равны

$$\rho_6(m) = k, \quad m = 0, k, 2k, \dots, (k - 1)k; \quad (11)$$

3) фазочастотный спектр в общем случае имеет вид

$$\arg \rho_6(m) = -\frac{2\pi}{k^2} m(m)_k, \quad m = 0, 1, \dots, k^2 - 1. \quad (12)$$

Согласованная фильтрация базового контура. Частотный коэффициент передачи контурного согласованного фильтра равен [13]

$$\omega(m) = \rho^*(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} m\right\}, \quad m = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Если фильтр согласован с базовым контуром, то

$$\omega(m) = k \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} m [(m)_k + 1]\right\}, \quad m = 0, 1, \dots, k^2 - 1. \quad (13)$$

Отсюда следует, что амплитудно-частотная характеристика фильтра является равномерной и равна

$$|\omega(m)| = k, \quad m = 0, 1, \dots, k^2 - 1. \quad (14)$$

Спектр выходного сигнала при контурной согласованной фильтрации

$$\begin{aligned} \rho_{\text{вых}}(m) &= \omega(m) \rho_6(m) = |\rho_6(m)|^2 \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} m\right\} = \\ &= k^2 \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} m\right\}, \quad m = 0, 1, \dots, k^2 - 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда видно, что амплитудно-частотный спектр выходного контура остается равномерным, а отсчеты фазочастотного спектра линейно нарастают в пределах от 0 до 2π с шагом $2\pi/k^2$. Выходной контур, определенный с помощью обратного ДПФ от спектра (14), имеет вид

$$\begin{aligned}\eta(n) &= \frac{1}{k^2} \sum_{m=0}^{k^2-1} \rho_{\text{вых}}(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} mn\right\} = \sum_{m=0}^{k^2-1} \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} m\right\} \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\} = \\ &= \sum_{m=0}^{k^2-1} \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} m(n+1)\right\} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, 1, \dots, k^2-2, \\ k^2 & \text{при } n = k^2-1. \end{cases}\end{aligned}$$

Таким образом, выходной контур при согласованной фильтрации базового контура имеет уникальный вид: все его ЭВ равны нулю, кроме последнего, длина которого равна энергии фильтруемого контура. Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Как было показано в разд. 1, с каждым из элементарных контуров Γ_m , $m = 0, 1, \dots, k-1$, из которых состоит базовый композиционный контур, можно ассоциировать периодический процесс с круговой частотой m . Поэтому базовый контур можно рассматривать как дискретно-кодированный сигнал из гармонических колебаний одинаковой амплитуды всех возможных в выбранном базисе частот. Такой сигнал, как известно, можно сжать до одного отсчета, сохранив в этом отсчете всю энергию сигнала [1].

Если через фильтр, согласованный с базовым контуром, проходит произвольный контур $N = \{v(n)\}_{0, k^2-1}$ со спектром $\{\rho_v(m)\}_{0, k^2-1}$, то спектр выходного контура и сам выходной контур $H = \{\eta_m(n)\}_{0, k^2-1}$ будут иметь вид

$$\begin{aligned}\rho_{\text{вых}}(m) &= k \rho_v(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} m [(m)_k + 1]\right\}, \\ \eta_m(n) &= \frac{1}{k^2} \sum_{m=0}^{k^2-1} \rho_v(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} m [(m)_k + 1]\right\} \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} mn\right\} = \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{m=0}^{k^2-1} \rho_v(m) \exp\left\{i \frac{2\pi}{k^2} m [(m)_k + n + 1]\right\}, \quad m = 0, 1, \dots, k^2-1.\end{aligned}$$

П р и м е р. Рассмотрим прохождение через фильтр согласованного с ним базового контура $\Gamma_{0,1,2}$. Контур и его спектр имеют вид

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,1,2} &= \\ &= \{1; 1; 1; 1; -0,5 + 0,866i; -0,5 - 0,866i; 1; -0,5 - 0,866i; -0,5 + 0,866i\}, \\ \{\rho_6(m)\}_{0,8} &= 3\{1; e^{-0,7i}; e^{3,49i}; 1; e^{3,49i}; e^{-0,7i}; 1; e^{-4,89i}; e^{-4,89i}\}.\end{aligned}$$

Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра в соответствии с выражением (13) равен

$$\{\omega(m)\}_{0,8} = 3\{1; e^{1,4i}; e^{-2,1i}; e^{2,1i}; e^{-0,7i}; e^{4,2i}; e^{4,2i}; e^{3,5i}; e^{4,2i}\}.$$

Спектр выходного контура, определенный по формуле (15), равен

$$\{\rho_{\text{вых}}(m)\}_{0,8} = 9\{1; e^{0,7i}; e^{1,4i}; e^{2,1i}; e^{2,8i}; e^{3,5i}; e^{4,2i}; e^{4,9i}; e^{5,6i}\}.$$

3. Обсуждение полученных результатов. В данной работе описаны два взаимосвязанных класса геометрических фигур с особыми математическими свойствами, представляющие интерес при решении задач обработки изображений.

Фигуры первого класса — элементарные контуры — являются ориентированными k -угольниками с одинаковыми размерами сторон и одинаковыми углами между соседними сторонами. k векторов, задающие полное семейство ЭК размерностью k , образуют в функциональном пространстве ортогональный базис, по которому разлагается произвольный контур, как без самопересечения, так и с самопересечением своих сторон. АКФ элементарного контура представляет собой такой же контур, отличающийся от исходного параметрами преобразований масштабирования и отражения. Его спектр содержит лишь одну ненулевую компоненту на частоте, равной порядку контура.

Ортогональность элементарных контуров обеспечивает высокое значение расстояния между любой парой контуров, что позволяет считать алфавит из полного семейства изображений ЭК наиболее помехоустойчивыми символами для распознавания на фоне широкополосных гауссовых шумов. Изучением правильных k -угольников занимался еще Платон. Немало времени этой задаче уделил Иоганн Кеплер, решая вопрос о расстояниях между орбитами планет. В частности, он начал рассматривать в качестве правильных фигур звездные k -угольники. Правильные фигуры изучались Луи Коши, Германом Вейлем, Карлом Фридрихом Гауссом и другими известными математиками. Очень близко к понятию элементарного контура подошел Луи Пуансо [14]. Так называемые «полигоны Пуансо» строились следующим образом. Окружность делилась на k равных частей, и все точки деления соединялись хордами одинаковой длины. Изменяя порядок соединения точек, можно было получить $(k - 1)$ фигуру; часть из них являлись ЭК.

На рис. 7, $a-d$ показаны все четыре «полигона Пуансо» для $k = 8$. Первый полигон (см. рис. 7, a) образуется последовательным соединением восьми точек деления окружности. Полученный правильный восьмиугольник является ЭК Γ_1 первого порядка. Вторым полигоном (см. рис. 7, b) образуется соединением точек через одну. Он имеет вид двух квадратов 1, 3, 5, 7 и 2, 4, 6, 8, повернутых относительно друг друга на угол $\pi/4$. Такая составная фигура не является ЭК, так как не вычерчивается непрерывной линией (см. свойство замкнутости ЭК). Здесь проявляется одно из отличий между «полигонами Пуансо» и ЭК, вызванное правилами их построения. ЭК образуется конкатенацией ЭВ $\gamma_m(n)$, $n = 0, 1, \dots, k - 1$ (см. (1)). При этом могут создаваться условия, когда часть из них уже образует замкнутый контур. Для этого необходимо, чтобы сумма аргументов текущих ЭВ $\gamma_m(n), \gamma_m(n + 1), \dots, \gamma_m(n + r + 1)$ стала равной $2\alpha\pi$, т. е.

$$\frac{2\pi}{k} mr = 2\alpha\pi \quad \text{или} \quad \frac{mr}{k} = \alpha, \quad m = 1, 2, \dots, k - 1. \quad (16)$$

Здесь $r = k/p$ — число ЭВ, составляющих один замкнутый k/p -угольник; α — в данном случае минимальное целое число, удовлетворяющее (16). Таким образом, в соответствии с (16) некоторые ЭК размерностью k представляют собой p k/p -многоугольников, наложенных друг на друга. Для рассматривае-

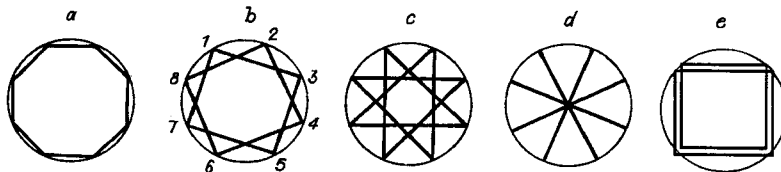


Рис. 7. «Полигоны Пуансо» для $k = 8$ ($a-d$) и элементарный контур Γ_2 в виде наложенных друг на друга квадратов (e)

мого случая, т. е. для $k = 8$ и $m = 2$, восьмиугольный ЭК Γ_2 является замкнутым и имеет вид наложенных друг на друга квадратов (см. рис. 7, *e*).

На рис. 7, *c* показан «полигон Пуансо», образованный соединением точек деления окружности через две. Данная фигура совпадает с ЭК Γ_3 . «Полигон Пуансо» на рис. 7, *d* получается соединением каждой пятой точки на окружности. Здесь опять выполняется условие (16) замкнутости части фигуры, которая распадается на четыре изолированные части и не может быть ЭК.

Таким образом, не всякий «полигон Пуансо» будет ЭК. Кроме того, полигоны не являются ориентированными фигурами. Поэтому их число при данном k равно примерно $k/2$ и соотношение, аналогичное (5), для разложения произвольной фигуры здесь не имеет места.

В работе [15] ЭК рассмотрены с алгебраических позиций как k -угольники из атомарных циклических классов и показано, что произвольная полигональная фигура однозначно разлагается на сумму таких k -угольников. Таким образом, исследования k -угольников и, в частности, k -угольников, задающих ЭК, имеют богатую историю. Однако при этом необходимо отметить, что применяемый к ним в настоящей работе подход как к сигналам отсутствует. Основа такого подхода — получение ортогонального базиса в виде полного семейства ЭК и трактовка ЭК Γ_m как простейшего периодического процесса с частотой $f = m$ при $m \leq k/2$ и $f = k - m$ при $m > k/2$. Качественный результат при этом получается весомым: для решения задач обработки контуров изображений могут быть привлечены аппараты теории сигналов и теории статистических решений, в первую очередь спектрального анализа и согласованной фильтрации. Это дает возможность использовать известные модели зашумленных сигналов, строго сформулировать и оптимально с позиций заданных критериев решить такие задачи, как обнаружение и распознавание изображений по их форме, найти оценки линейных преобразований изображений и т. д.

Фигуры второго класса — композиционные контуры из полного семейства ЭК — как сигналы обладают уникальными свойствами. АКФ каждого из них носит дельтовидный характер: ее значения везде равны нулю за исключением одного отсчета, равного k^2 . Энергетический спектр контура строго равномерен, т. е. его спектр можно рассматривать как простую сумму спектров составляющих его ЭК. Сигнал на основе композиционного контура после обработки контурным согласованным фильтром не имеет боковых лепестков, т. е. допускает идеальное сжатие. Это свойство делает его оптимальным для разрешения (сегментации) отдельных зашумленных символов [1] из поступающего потока визуальной информации в виде композиционных контуров. Отметим, что подобный вид АКФ композиционных контуров не зависит от размерности k , которая может быть взята очень малой, например, $k = 2, 3, 4$. В то же время ни один из известных сигналов в чистом виде подобным свойством не обладает. АКФ в виде дельта-функции обладает реализация белого шума, когда ее продолжительность стремится к бесконечности. Реально близкие свойства имеет псевдослучайная последовательность, но при очень большой длине — сотни и тысячи кодовых интервалов. Исключения составляют комплементарные коды, у которых боковые лепестки имеют разные знаки и могут быть скомпенсированы [1, 16], а также последовательности, описанные в [4], но имеющие ограничение (до трех) на количество различных значений знака.

Поскольку композиционный контур состоит из набора ЭК, являющихся максимально различными фигурами, то на его основе можно сформировать алфавит визуальных символов, эффективных с точки зрения их распознавания. Таким образом, контуры подобного вида и их составные части сочетают противоречивые спектральные и корреляционные свойства и на их основе можно строить системы, решающие наилучшим образом совместно задачи разрешения и распознавания зашумленных визуальных символов. С энергетической точки зрения сигнал на базе композиционного контура также лишен недостатков. Модули ЭВ контура равны между собой, и поэтому пик-фактор равен единице, т. е. максимально возможному значению.

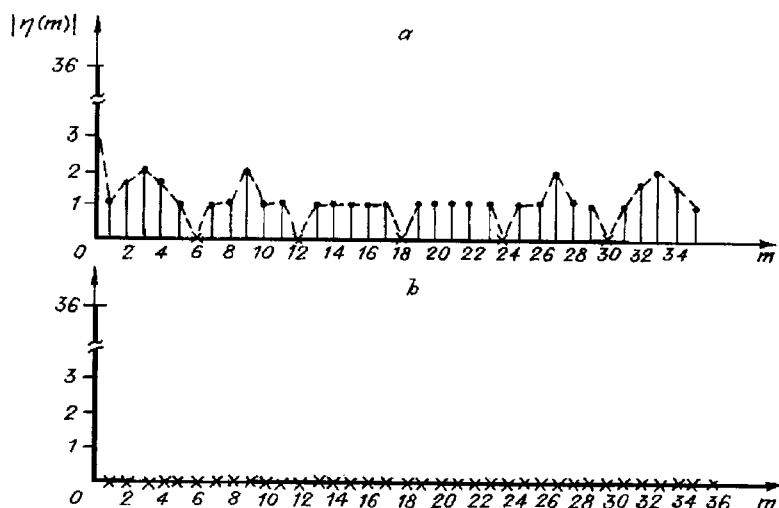


Рис. 8. АКФ композиционного контура для $k = 6$, полученная путем аperiodической (a) и периодической (b) свертки

В работах [1, 7—19] описан дискретно-кодированный радиолокационный сигнал, названный «многофазными кодами Фрэнка». Последовательность чисел, задающих конкретный код, определяет начальные фазы отрезков синусоид для каждого кодового интервала. Последовательность таких фаз совпадает с последовательностью значений аргументов ЭВ композиционного контура из полного семейства ЭК. Амплитудные спектры многофазных кодов Фрэнка в отличие от амплитудных спектров композиционных контуров не являются равномерными и носят сильно выраженный лепестковый характер. АКФ этих сигналов имеет достаточно высокий уровень боковых лепестков. Это связано с тем, что обработка таких сигналов производилась в скользящем окне, с влиянием краевых эффектов, т. е. методом аperiodической свертки [20]. В настоящей работе для композиционных контуров вычисления производились методом периодической свертки на основе свойства периодичности ЭВ контура, т. е. когда $\gamma(n) = \gamma(n + \alpha k)$. Именно при таком подходе проявились описанные выше замечательные свойства композиционных контуров (рис. 8).

Заключение. Отметим, что рассмотренный в данной статье подход позволяет создать алфавит из визуально наблюдаемых символов, более эффективный для общения, чем принятые изображения букв, цифр, иероглифов, вид которых был определен с эвристических позиций. Кроме того, для технических приложений создан научно-обоснованный подход к выбору тех или иных форм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. М.: Сов. радио, 1971.
2. Сосулин Ю. Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
3. Филиппов Л. И. Теория передачи дискретных сигналов. М.: Высш. шк., 1981.
4. Ипатов В. П. // Радиотехника. 1979. XXIV, № 10.
5. Фурман Я. А., Михайлов А. И., Рожнецов А. А. Оптимальные информационные структуры в контурной среде: Тез. докл. Ульяновск: УГТУ, 1995.
6. Zahn С. Т., Roskies R. Z. Fourier descriptors for plane closed curves // IEEE Trans. Comput. 1972. COM-21, N 3.
7. Фу К., Гонсалес, Ли К. Робототехника: Пер. с англ. М.: Мир, 1989.
8. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974.
9. Furman Y. A., Yanshin W. W. // Pattern Recognition and Image Analysis. 1992. 2, N 3. P. 306.
10. Furman Y. A., Yanshin W. W. // Pattern Recognition and Image Analysis. 1994. 4, N 2. P. 146.

11. Фурман Я. А. // Радиоэлектроника. 1993. № 6.
12. Фурман Я. А. // Радиотехника. 1994. № 12.
13. Фурман Я. А. // Радиотехника. 1995. № 6.
14. Смирнов Г. Математическая теория звезд // Техника молодежи. 1986. № 1.
15. Бахман Ф., Шмидт Э. *k*-угольники. М.: Мир, 1973.
16. Бакулев П. А., Климентьев А. Н., Степин В. М. Анализ эффективности устройств обработки сигналов в обзорных РЛС. М.: Изд-во МАИ, 1992.
17. Heimiller R. C. Phase shift codes with good periodic correlation properties // IRE Trans. 1961. IT-7. P. 254.
18. Frank R., Zadoff S. Phase shift codes with good periodic correlation properties // IRE Trans. (Correspondence). 1962. IT-8. P. 381.
19. Frank R. L. Polyphase codes with good nonperiodic correlation properties // IEEE Trans. 1993. IT-9. P. 43.
20. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. М.: Сов. радио, 1973.

Поступила в редакцию 6 октября 1995 г.

Реклама продукции в нашем журнале — залог Вашего успеха!