РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1996

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.725

В. М. Чернов

(Самара)

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ ОСНОВАНИЯ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА*

Рассматриваются методы синтеза быстрых алгоритмов двумерного дискретного преобразования Фурье. Устанавливается связь между покрытиями множества индексов входных данных и различными неархимедовыми метриками в квадратичных полях алгебраических чисел. Показывается, что известные алгоритмы с векторным основанием неявно используют эту связь неоптимальным образом.

К настоящему времени разработано большое количество быстрых алгоритмов двумерного дискретного преобразования Фурье (ДПФ-2), базирующихся на существенно различных идеях: полиномиальных преобразованиях [1], с использованием тензорной техники [2], на основе дискретного преобразования Радона [3] и т. д. Однако несмотря на относительно низкую арифметическую сложность, такие алгоритмы имеют ограниченное применение из-за сложной структуры. Поэтому наибольшее распространение у пользователей получили различные модификации построчно-столбцовых алгоритмов ДПФ-2 и алгоритм с векторным основанием [4], являющийся дальнейшим развитием базового алгоритма Кули — Тьюки.

Наиболее изучены и эффективны алгоритмы этих классов для преобразований вещественных массивов размером $N \times N$ при $N = 2^r$. При $N = p^r$ (p — простое нечетное число) описанные в литературе алгоритмы имеют значительно худшие оценки вычислительной сложности.

В настоящей работе для $N = 2^r$ описывается серия алгоритмов ДПФ-2 усложняющейся структуры, мультипликативная сложность лучшего из которых меньше, чем у алгоритмов с векторным основанием.

Снижение сложности достигается с помощью применения новой схемы редукции ДПФ-2 размером $N \times N$ к ДПФ-2 тех же размеров для функций более простого вида. Подобная схема рассмотрена впервые в [5]. Она связана с покрытиями области изменения индексов входных данных множествами со специальными метрическими свойствами в неархимедовых метриках квадратичных полей. По своей структуре такие алгоритмы можно отнести к алгоритмам с расщеплением основания «дробного порядка». Далее в работе мы будем называть такие алгоритмы чесс-БПФ (Chess-FFT) (рис. 1, 2).

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 95-01-00367).

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. Пусть $x(n_1, n_2) \in \mathbf{R}$ — преобразуемый двумерный $(N \times N)$-массив, $N = 2^r$, $X(m_1, m_2)$ — двумерный дискретный спектр Фурье:

$$X(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} x(n_1, n_2)\omega^{n_1 m_1 + n_2 m_2}, \qquad \omega = \exp\{2\pi i/N\}. \tag{1}$$

Тогда существуют чесс-БПФ вычисления (1), мультипликативная сложность $M(N \times N)$ которых имеет оценку

$$M(N \times N) \le AN^2 \log_2 N, \tag{2}$$

где $A = 1;\ 3/4;\ 3/5$.

1. **Описание схемы чесс-редукции.** Пусть комплексная функция $f(n_1, n_2)$ определена на $Z \times Z$ и N-периодична по каждому аргументу; множество $D \subset Z \times Z$ состоит из пар целых чисел одной четности:

$$D = \{(n_1, n_2)\colon n_1 \equiv n_2 \,(\mathrm{mod}2)\}; \tag{3}$$

функция $\chi_D(n_1, n_2)$ — индикатор множества D:

$$\chi_D(n_1, n_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n_1, n_2) \notin D; \\ 1, & \text{если } (n_1, n_2) \in D. \end{cases}$$

Предложение 1.1. Пусть

$$(Rf)(u_1, u_2) = f(u_2 - u_1, u_1 + u_2)\,\chi_D(u_2 - u_1, u_1 + u_2),$$

R^k — k-я итерация оператора R; пусть далее

$$F = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2), \qquad S^k(F) = \sum_{u_1, u_2=0}^{N-1} (R^k f)(u_1, u_2).$$

Тогда $2F = S^1(F)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для любой пары целых чисел (n_1, n_2) с условиями

$$(n_1, n_2) \in D, \qquad 0 \le n_1, n_2 \le N - 1$$

существуют ровно два решения системы сравнений:

$$\begin{cases} u_2 - u_1 \equiv n_1 \,(\mathrm{mod}N), \\ u_2 + u_1 \equiv n_2 \,(\mathrm{mod}N), \end{cases} \tag{4}$$

$$0 \le n_1, n_2 \le N - 1. \tag{5}$$

Так как $(n_1, n_2) \in D$, то все решения системы (4) являются решениями системы сравнений:

$$\begin{cases} u_1 \equiv (n_1 + n_2)/2 \,(\mathrm{mod}N/2), \\ u_2 \equiv (n_1 - n_2)/2 \,(\mathrm{mod}N/2). \end{cases}$$

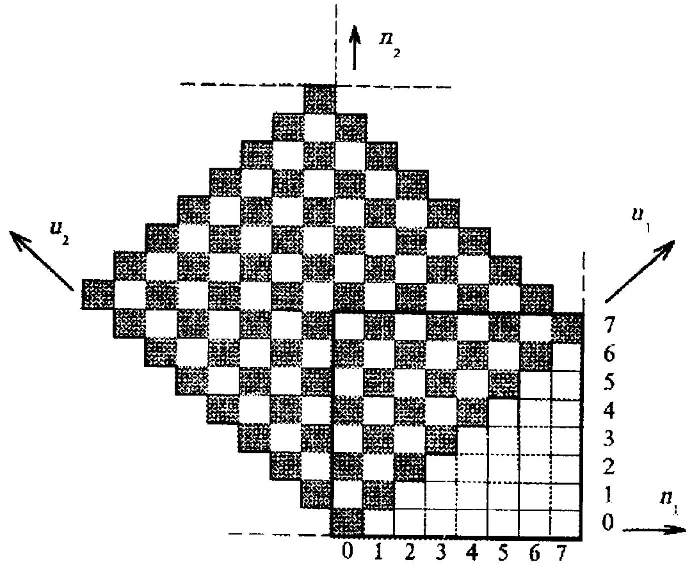

Рис. 1

Пусть u_1 и u_2 — вычеты чисел $\nu^{\pm} = (n_1 \pm n_2)/2 \ (\mathrm{mod} N/2)$ соответственно. Тогда из четырех пар чисел

$$(u_1 + Na/2,\ u_2 + Nb/2), \qquad a, b = 0, 1$$

только две являются решениями системы (4) с условием (5).

Преобразование области суммирования при переходе от F к $S^1(F)$ изображено на рис. 1. Штриховкой выделены отсчеты входного сигнала, принадлежащие области суммирования в $S^1(F)$.

Отметим очевидные равенства

$$(R^{2k}f)(u_1, u_2) = f(2^k u_1, 2^k u_2)\,\chi_D(2^k u_1, 2^k u_2). \tag{6}$$

Последовательное изменение областей суммирования в $S^k(F)$ изображено на рис. 2, *a*—*d*.

Пусть далее $T_{ab} f(n_1, n_2) = f(n_1 + a, n_2 + b)$. Следующее предложение является основным при описании новой схемы декомпозиции и непосредственно следует из соотношений (1), (6) и предложения 1.1.

Предложение 1.2. При $N = 2^r$ $(r \geq 3)$ и $\sigma = 2, 3, 4$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} S^{2k}(X(m_1, m_2)) &= \frac{1}{2} S^1(X_{00}(2^k m_1, 2^k m_2)) + \\ &+ \frac{1}{2^\sigma} \sum_{a, b \in \Lambda_\sigma} \omega^{2^k(am_1 + bm_2)} S^\sigma(X_{ab}(2^k m_1, 2^k m_2)), \\ S^{2k+1}(X(m_1, m_2)) &= \frac{1}{2} S^1(X_{00}(2^k(m_2 - m_1), 2^k(m_1 + m_2))) + \\ &+ \frac{1}{2^\sigma} \sum_{a, b \in \Lambda_\sigma} \omega^{2^k(a(m_2 - m_1) + b(m_1 + m_2))} S^\sigma(X_{ab}(2^k(m_2 - m_1), 2^k(m_1 + m_2))), \end{aligned} \tag{7}$$

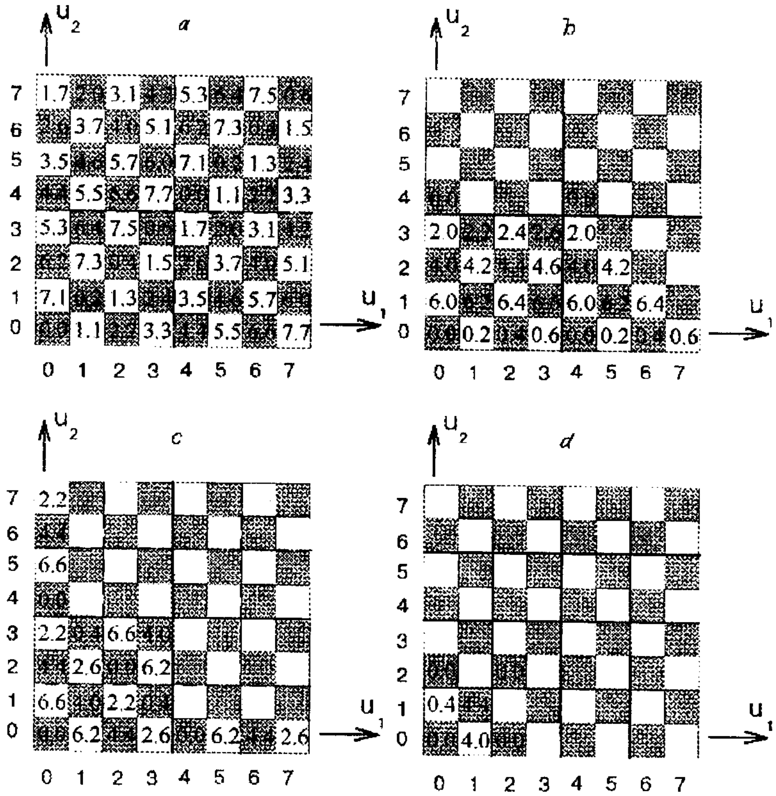

Рис. 2

где

$$X_{ab}(m_1, m_2) = \sum_{n_1,\, n_2=0}^{N-1} \omega^{n_1 m_1 + n_2 m_2} T_{ab}(x(n_1, n_2)), \tag{8}$$

$$\Lambda_\sigma = \begin{cases} \{0 \le a, b \le 1;\ a \not\equiv b\,(\mathrm{mod}2)\}, & \text{если } \sigma = 2; \\ \{0 \le a, b \le 3;\ a, b \not\equiv 0\,(\mathrm{mod}2)\}, & \text{если } \sigma = 3; \\ \{0 \le a, b \le 3;\ a \not\equiv b\,(\mathrm{mod}2)\}, & \text{если } \sigma = 4. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, с помощью предложения 1.2 вычисление $X(m_1, m_2)$ редуцируется к вычислению ДПФ того же размера, но для функций все более простого вида, и, в конце концов, к вычислению ДПФ константы.

Предложение 1.3. Пусть $N_k = N/2^k$ и

$$Y_{ab}^{\sigma,\,k}(m_1, m_2) = \omega^{2^k(am_1 + bm_2)} S^\sigma(X_{ab}(2^k m_1, 2^k m_2)),$$

$$Z_{ab}^{\sigma,\,k}(m_1, m_2) = \omega^{2^k(a(m_2 - m_1) + b(m_1 + m_2))} S^\sigma(X_{ab}(2^k(m_2 - m_1), 2^k(m_1 + m_2))).$$

Тогда при фиксированных σ, a, b, k массив $Y_{ab}^{\sigma,k}(m_1, m_2)$ достаточно найти для $(m_1, m_2) \in \Omega_{\sigma,Y}^k$, а массив $Z_{ab}^{\sigma,k}(m_1, m_2)$ — для $(m_1, m_2) \in \Omega_{\sigma,Z}^k$, где $\Omega_{\sigma,Y}^k$ и $\Omega_{\sigma,Z}^k$ — фундаментальные области:

$$\Omega_{\sigma,Y}^k = \begin{cases} \{(m_1, m_2)\colon 0 \le m_1 \le N_k/2;\ 0 \le m_2 \le N_k/4\}, & \text{если } \sigma = 2; \\ \{(m_1, m_2)\colon 0 \le m_1, m_2 \le N_k/4\}, & \text{если } \sigma = 3; \\ \{(m_1, m_2)\colon 0 \le m_1 \le N_k/4;\ 0 \le m_2 \le N_k/8\}, & \text{если } \sigma = 4; \end{cases}$$

$$\Omega_{\sigma,Z}^k = \begin{cases} \{(m_1, m_2)\colon 0 \le m_1 \le N_k/2;\ 0 \le m_2 \le N_k/8\}, & \text{если } \sigma = 2; \\ \{(m_1, m_2)\colon 0 \le m_1 \le N_k/4;\ 0 \le m_2 \le N_k/8\}, & \text{если } \sigma = 3; \\ \{(m_1, m_2)\colon 0 \le m_1 \le N_k/4;\ 0 \le m_2 \le N_k/16\}, & \text{если } \sigma = 4. \end{cases}$$

Доказательство. Подробное доказательство проведем для $\sigma = 4$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть $\tau_{\alpha\beta}^j$ (сдвиг) и $\mu_{\xi\eta}^j$ (зеркальное отражение) — преобразования фундаментальных областей:

$$\tau_{\alpha\beta}^j\colon (m_1, m_2) \to (m_1 + \alpha N_k/2^j,\ m_2 + \beta N_k/2^j),$$

$$\mu_{\xi\eta}^j\colon (m_1, m_2) \to ((-1)^\xi m_1 + \xi N_k/2^j,\ (-1)^\eta m_2 + \eta N_k/2^j),$$

$$j = 1, 2, 3; \qquad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 2^j - 1; \qquad \xi, \eta = 0, 1.$$

Пусть $\sigma = 4$. Тогда в силу (6) функции

$$S^4(X_{ab}(2^k m_1, 2^k m_2))$$

инвариантны относительно преобразований $\tau_{\alpha\beta}^1$ и $\tau_{\alpha\beta}^2$ и N_k-периодичны. Кроме того, справедливо равенство

$$Y_{ab}^{\sigma,k}(\mu_{11}^j(m_1, m_2)) = (Y_{ab}^{\sigma,k}(m_1, m_2))^* \qquad (j = 1, 2)$$

($*$ — знак комплексного сопряжения). Пусть

$$\Delta_k = \{(m_1, m_2)\colon 0 \le m_1, m_2 \le N_k\},$$

тогда доказываемое утверждение для $Y_{ab}^{\sigma,k}(m_1, m_2)$ следует из соотношения

$$\Delta_k \subseteq \bigcup_{\alpha,\beta} (\tau_{\alpha\beta}^2(\mu_{11}^2(\Omega_{\sigma,Y}^k)) \cup \tau_{\alpha\beta}^2(\Omega_{\sigma,Y}^k)).$$

Аналогично функции

$$S^4(X_{ab}(2^k(m_2 - m_1), 2^k(m_1 + m_2)))$$

инвариантны относительно преобразований $\tau_{\alpha\beta}^1$ и $\tau_{\alpha\beta}^2$ и умножаются на ± 1, $\pm i$ при преобразованиях $\tau_{\alpha\alpha}^3$. Доказываемое утверждение для $Z_{ab}^{\sigma,k}(m_1, m_2)$ следует, например, из соотношения

$$\Delta_k \subseteq \bigcup_{\xi=0}^{1} \mu_{\xi\xi}^0 \left(\bigcup_{\alpha=0}^{3} \tau_{\alpha 0}^2 \left(\bigcup_{\beta=0}^{7} \tau_{\beta\beta}^3(\Omega_{\sigma,Z}^k) \right) \right).$$

2. Оценки вычислительной сложности. Из предложений 1.2 и 1.3, а также вида фундаментальных областей $\Omega_{\sigma,Y}^k$ и $\Omega_{\sigma,Z}^k$ для $\sigma = 2, 3, 4$ легко получаем рекуррентные соотношения для мультипликативной сложности $Q_N(k)$ вычисления $S^k(X(m_1, m_2))$:

$$Q_N(k) = \begin{cases} Q_N(k+1) + 2Q_N(k+2) + 3N^2/2^{k+2}, & \text{если } \sigma = 2; \\ Q_N(k+1) + 4Q_N(k+3) + 3N^2/2^{k+2}, & \text{если } \sigma = 3; \\ Q_N(k+1) + 8Q_N(k+4) + 3N^2/2^{k+2}, & \text{если } \sigma = 4. \end{cases} \quad (10)$$

Мы считаем, что умножения комплексных чисел реализованы по схеме «три сложения, три умножения», а умножения на степени двойки не учитываются. Так как $Q_N(0) = M(N \times N)$, а $Q_N(2r) = 0$, то из (10) следуют неравенства основной теоремы:

$$M(N \times N) \le \begin{cases} N^2\log_2 N, & \text{если } \sigma = 2; \\ 3/4N^2\log_2 N, & \text{если } \sigma = 3; \\ 3/5N^2\log_2 N, & \text{если } \sigma = 4. \end{cases}$$

Для сравнения заметим [4], что лучший из алгоритмов с векторным основанием имеет мультипликативную сложность

$$M(N \times N) \le 9/14N^2\log_2 N.$$

Кроме того, предлагаемые чесс-БПФ требуют и меньшего числа сложений, так как область суммирования Λ_σ в (8) для алгоритмов с векторным основанием шире. Относительным недостатком при реализации чесс-БПФ является необходимость «диагонального» чтения массивов данных. При достаточном объеме памяти этого можно избежать, используя чтение двух массивов $x(n_1, n_2)$ — данного и повернутого на $\pi/4$ для четных и нечетных k соответственно.

3. **Обсуждение результатов.** Рассмотренные в работе алгоритмы можно отнести к тому же классу БПФ, что и БПФ по основаниям 2 и 4, БПФ с векторным основанием. Они базируются на одних и тех же алгебраических принципах.

Действительно, пусть p — простое число. Тогда (например, [6]) на множестве целых чисел, помимо обычной (архимедовой) нормы

$$\| x \|_\infty = | x |, \quad (11)$$

можно ввести p-адическую (неархимедову) норму

$$\| x \|_p = p^{-\nu_p(x)},$$

где $\nu_p(x)$ — p-адический показатель целого числа x, представимого в виде $x = p^{-\nu_p(x)} y$ $(y \not\equiv 0 \bmod p)$.

В классическом одномерном БПФ Кули — Тьюки длиной $N = 2^k$ множество индексов входного сигнала покрывается двумя равномощными подмножествами (четных и нечетных индексов) с 2-адическими диаметрами в 2 раза меньшими диаметра исходного множества индексов. Индексы преобразованного сигнала при этом рассматриваются разбитыми на два подмножества с диаметрами, связанными с нормой (11), в 2 раза меньшими исходного:

$$\{0, 1, \ldots, N/2 - 1\} \cup \{N/2, \ldots, N - 1\}.$$

Связь между суммами, являющимися ДПФ подпоследовательностей входного сигнала с четными и нечетными аргументами, вычисленными для различных множеств индексов выходного сигнала, определяет схему редукции преобразования длиной N к ДПФ меньших размеров.

При построении двумерных алгоритмов ДПФ также возникают аналогичные покрытия множеств индексов входного и преобразованного сигналов, определяющие схему редукции ДПФ-2 размером $N \times N$ к ДПФ-2 меньшего объема или более простых функций.

Рассмотрим один из вариантов построения таких покрытий. Отождествим пару индексов (n_1, n_2) входного сигнала с целым гауссовым числом [6]:

$$(n_1, n_2) \leftrightarrow n_1 + n_2 i.$$

Функция

$$\Phi_2(a_1 + a_2 i) = \left(2^{-\nu_2(a_1^2 + a_2^2)}\right)^{1/2}, \qquad \Phi_2(0) = 0; \qquad a_1, a_2 \in \mathbf{Q},$$

является продолжением 2-адической нормы с $\mathbf{Q}$ на алгебраическое расширение $\mathbf{Q}(i)$ и индуцирует на множестве индексов (n_1, n_2) метрику, причем неравенство $\Phi_2(n_1, n_2) \leq 1/2$ равносильно соотношению $n_1, n_2 \equiv 0 \pmod 2$.

Именно относительно нормы Φ_2 неявно рассматриваются покрытия области определения входных данных, определяющие схему редукции в известных алгоритмах.

Пусть теперь

$$\Psi_2(a_1 + a_2 i) = 2^{-\nu_2(a_1 + a_2)}, \qquad \Psi_2(0) = 0.$$

Тогда нетрудно проверить, что функция Ψ_2 индуцирует на $\mathbf{Q}(i)$ метрику, совпадающую с метрикой, индуцированной 2-адической нормой. Покрытия области определения входных данных в чесс-БПФ, определяющие схему редукции, рассматриваются относительно Ψ_2. Неравенство $\Psi_2(n_1, n_2) \leq 1/2$ равносильно соотношению $n_1 - n_2 \equiv 0 \pmod 2$.

В отличие от классического случая $p = 2$ быстрые алгоритмы ДПФ для $N = p^r$ (p — простое нечетное) исследованы менее детально. Следовательно, возможно получение более существенного снижения вычислительной сложности. Причем в этом случае обоснование выбора покрытий области определения входных данных проще [6]. Действительно, отождествим пары (n_1, n_2) с алгебраическими числами из квадратичного расширения $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$:

$$(n_1, n_2) \leftrightarrow n_1 + n_2\sqrt{-d}.$$

В зависимости от того, является ли число $(-d)$ квадратичным невычетом или вычетом $(\mathrm{mod}\, p)$, либо функция

$$\Phi_p(n_1 + n_2\sqrt{-d}) = \left(p^{-\nu_p(n_1^2 + n_2^2 d)}\right)^{1/2}, \tag{12}$$

либо функция

$$\Psi_p^{\pm}(n_1 + n_2\sqrt{-d}) = p^{-\nu_p(n_1 \pm \beta n_2)} \tag{13}$$

продолжает p-адическую норму с $\mathbf{Q}$ на $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. (Здесь β — решение в целых p-адических числах уравнения $\beta^2 = -d$.)

Выбор такой интерпретации входных индексов (n_1, n_2) определяет параметр d, соответствующие нормирования (12) или (13) и схему редукции.

Например, если $p = 3$, $d = 2$, $x(n_1, n_2) \in \mathbf{R}$, то

$$\Psi_3^{\pm}(n_1 + n_2\sqrt{-2}) = 3^{-\nu_3(n_1 \pm n_2)}.$$

При представлении комплексных чисел в «нетрадиционной» форме [7, 8]:

$$x + yi = a\gamma + b\bar{\gamma}, \qquad \gamma = \exp\{2\pi i/3\}, \qquad a, b \in \mathbf{R},$$

возможен синтез чесс-БПФ с мультипликативной сложностью

$$M(N \times N) \leq AN^2\log_3 N, \qquad A = 12/13.$$

Для БПФ «по основанию три» [4] значение константы A почти в 2,5 раза больше: $A = 20/9$.

В заключение отметим, что рассмотренная методика синтеза быстрых алгоритмов ДПФ распространяется и на многомерные дискретные ортогональные преобразования (или преобразования Виленкина — Крестенсона).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нуссбаумер Г.** Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радио и связь, 1985.
2. **Григорян А. М.** Алгоритм вычисления двумерного преобразования Фурье // Радиоэлектроника. 1984. № 10.
3. **Лабунец В. Г.** Быстрое многомерное преобразование Фурье, основанное на быстром преобразовании Радона // Цифровые методы в управлении, радиолокации и связи. Свердловск: УПИ, 1986.
4. **Власенко В. А., Лаппа Ю. М., Ярославский Л. П.** Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. М.: Наука, 1990.
5. **Chernov V. M.** Non-archimedian normalized fields and algorithms for the two-dimensional Fourier transforms // Pattern Recognition and Image Analysis. 1991. **1**, N 4.
6. **Ван дер Варден Б. Л.** Алгебра. М.: Наука, 1976.
7. **Чернов В. М.** Быстрый алгоритм дискретного косинусного преобразования нечетной длины // Автоматика и вычислительная техника. 1994. № 3.
8. **Chernov V. M.** Arithmetic methods in the theory of discrete orthogonal transforms // Image Processing and Computer Optics (DIP-94): Proc. SPIE. 1995. **2363**.

Поступила в редакцию 9 октября 1995 г.