

УДК 621.391

В. В. Сергеев, Л. Г. Фролова

(Самара)

**РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ИЗОБРАЖЕНИЯ В СКОЛЬЗЯЩЕМ ОКНЕ**

Предлагается рекурсивный алгоритм нелинейной обработки изображения в скользящем окне, основанный на адаптивной локальной аппроксимации двумерного сигнала полиномиальной функцией специального (цилиндрического) вида. Рассматриваются и сравниваются по вычислительной сложности два варианта его реализации. Приводятся примеры, демонстрирующие эффективность применения алгоритма в задачах цифровой обработки изображений.

Введение. Многие задачи цифровой обработки изображений эффективно решаются с помощью алгоритмов и вычислительных процедур, построенных на основе принципа «скользящего окна». Их суть состоит в том, что некоторая ограниченная двумерная область — «окно обработки» — последовательно (например, в порядке построчной развертки) занимает все возможные положения на плоскости аргументов входного изображения и для каждого положения вычисляется одно значение выходного отсчета, соответствующего центру окна. Именно так обычно осуществляется фильтрация шумов и восстановление изображений, выделение контуров, корреляционное обнаружение двумерных объектов и т. д. [1, 2].

В подобных процедурах, как правило, ограничиваются использованием окна небольших размеров (чаще всего в 3×3 отсчета), поскольку необходимые вычислительные затраты растут пропорционально его площади. В то же время большие окна необходимы для достижения высокой помехоустойчивости обработки, при восстановлении сильно расфокусированных изображений, обнаружении пространственно протяженных объектов, во многих других важных практических ситуациях. При линейной обработке изображений зависимость ее вычислительной сложности от размеров окна может быть устранена применением двумерных параллельно-рекурсивных цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой [2, 3]. Однако во многих случаях линейные фильтры недостаточно эффективны, а ряд прикладных задач анализа видеоинформации принципиально требует выхода за рамки линейной обработки. В данной работе предлагается и анализируется рекурсивный алгоритм нелинейной обработки изображения в скользящем окне, основанный на адаптивной локальной аппроксимации двумерного сигнала полиномиальной функцией специального вида.

1. **Локальная цилиндрическая полиномиальная аппроксимация изображения.** В системе координат, связанной с положением скользящего окна, задается двумерный степенной полином, аппроксимирующий изображение $x(n_1, n_2)$, в виде «цилиндра» — полинома K -го порядка одной переменной, развернутого на плоскости аргументов под некоторым углом φ :

$$x(n_1, n_2) \approx \sum_{k=0}^K a_k (n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)^k. \quad (1)$$

При фиксированном значении угла φ вектор $A = \{a_k\}_{k=0}^K$ коэффициентов полинома (1) определяется методом наименьших квадратов, т. е. рассчитывается из условия

$$\varepsilon = \sum_{(n_1, n_2) \in D} \left[x(n_1, n_2) - \sum_{k=0}^K a_k (n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)^k \right]^2 \rightarrow \min, \quad (2)$$

где D — область отсчетов изображения, определяющая окно обработки.

Из (2) получаем систему линейных уравнений $(K + 1)$ -порядка, решение которой записывается в векторно-матричном виде:

$$A = B^{-1}C. \quad (3)$$

Здесь

$$B = \left\{ \sum_{(n_1, n_2) \in D} (n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)^{i+k} \right\}_{i, k=0}^K \quad (4)$$

— квадратная матрица системы; C — вектор свободных членов, который задается выражением

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \sum_{(n_1, n_2) \in D} x(n_1, n_2) (n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)^i \right\}_{i=0}^K = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mu_{k, i-k} \cos^k \varphi \sin^{i-k} \varphi \right\}_{i=0}^K, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\binom{i}{k}$ — биномиальные коэффициенты;

$$\mu_{ij} = \sum_{(n_1, n_2) \in D} x(n_1, n_2) n_1^i n_2^j \quad (6)$$

— локальные степенные моменты изображения в окне обработки D .

В соответствии с (5) при формировании вектора C используются моменты (6) с суммарным индексом, ограниченным сверху порядком полинома K . Упорядочим их в вектор, имеющий длину $\frac{(K+1)(K+2)}{2}$:

$$M = \left\{ m_j \right\}_{j=0}^{\frac{(K+1)(K+2)}{2}} = \{ \mu_{00}; \mu_{01}; \mu_{10}; \mu_{02}; \mu_{11}; \mu_{20}; \dots \}^t.$$

После этого формула (5) может быть записана в виде

$$C = PM, \quad (7)$$

где P — слабозаполненная прямоугольная матрица преобразования размером $\left[\frac{(K+1)(K+2)}{2}, K+1 \right]$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{K}{0} \cos^0 \varphi \sin^K \varphi & \binom{K}{1} \cos^1 \varphi \sin^{K-1} \varphi & \cdots & \binom{K}{K} \cos^K \varphi \sin^0 \varphi \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Одновременно с (3) вычисляется и минимальное (по коэффициентам полинома) значение квадратичной ошибки, которое задается выражением

$$\varepsilon_{\min}(\varphi) = \sum_{(n_1, n_2) \in D} x^2(n_1, n_2) - C^t A. \quad (9)$$

Для дальнейшей минимизации величины (9) ищется оптимальный угол поворота аппроксимирующего цилиндра на плоскости изображения

$$\varphi_{\text{opt}} = \arg \min_{\varphi} \varepsilon_{\min}(\varphi) \quad (10)$$

и определяется соответствующая ему минимально достижимая ошибка локальной цилиндрической аппроксимации:

$$\bar{\varepsilon}_{\min} = \varepsilon_{\min}(\varphi_{\text{opt}}). \quad (11)$$

Поиск величины (10) для каждого положения окна может осуществляться прямым перебором среди заданного множества значений φ .

В результате выполнения описанных преобразований для всех положений окна обработки, скользящего по изображению, формируются двумерные поля величин (10) и (11), а также соответствующие им поля коэффициентов аппроксимирующего полинома (1).

2. Реализация и оценка вычислительной сложности. При заданных конфигурации окна обработки и порядке цилиндрического полинома (1) элементы матрицы (4), а затем и элементы входящей в (3) обратной матрицы могут быть рассчитаны заранее для всего множества рассматриваемых значений угла φ . Аналогично для тех же углов заранее рассчитываются ненулевые элементы матрицы (8). Будем считать, что эти достаточно трудоемкие операции не оказывают влияния на сложность обработки. Для окна прямоугольной формы

$$D: -N_1 \leq n_1 \leq N_1, \quad -N_2 \leq n_2 \leq N_2,$$

которое будем рассматривать везде далее, вычисление степенных моментов (6) может выполняться рекурсивно [4, 5], без зависимости требуемого числа арифметических операций от размеров окна N_1, N_2 . Вычислительная сложность получения всех моментов, имеющих суммарный индекс до K включительно, для каждого положения окна составляет

$$U_{\text{add}}^{(1)} = \frac{(K+1)(K+3)(K+8)}{6}, \quad U_m^{(1)} = \frac{K(K+2)(K+7)}{6} \quad (12)$$

операций сложения и умножения соответственно.

После расчета вектора моментов производятся вычисления последовательно по формулам (7), (3) и (9). На это требуется выполнение еще

$$U_{\text{add}}^{(2)} = \frac{K(3K+5)}{2}, \quad U_m^{(2)} = \frac{3(K+1)(K+2)}{2} \quad (13)$$

операций сложения и умножения. Эти вычисления производятся для каждого рассматриваемого угла ориентации аппроксимирующего цилиндра. Таким образом, с учетом перебора K_φ значений угла общие вычислительные затраты на обработку составляют

$$U_{\text{add}} = U_{\text{add}}^{(1)} + K_\varphi U_{\text{add}}^{(2)} = \frac{(K+1)(K+3)(K+8)}{6} + K_\varphi \frac{K(3K+5)}{2},$$

$$U_m = U_m^{(1)} + K_\varphi U_m^{(2)} = \frac{K(K+2)(K+7)}{6} + K_\varphi \frac{3(K+1)(K+2)}{2}$$
(14)

операций сложения и умножения на один отсчет выходного изображения. (Формулы (12)–(14) и подобные им оценки сложности, приведенные ниже, получены без учета пренебрежимо малых постоянных составляющих, не зависящих от K и K_φ .)

3. «Беспереборный» вариант алгоритма. Из (14) видно, что основные затраты на обработку изображения связаны с необходимостью K_φ -кратного вычисления одних и тех же величин для разных значений угла φ . С целью снижения вычислительной сложности алгоритма можно воспользоваться приближенным способом поиска φ_{opt} , описывая синусоидой зависимость минимальной ошибки от φ

$$\varepsilon_{\min}(\varphi) \approx c \cos 2\varphi + s \sin 2\varphi + \text{const} \quad (15)$$

и аналитически определяя положение минимума ошибки аппроксимации по углу:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\min}(\varphi)}{\partial \varphi} \approx -2c \sin 2\varphi + 2s \cos 2\varphi = 0, \quad \text{tg} 2\varphi = \frac{s}{c}. \quad (16)$$

Параметры c и s , входящие в формулы (15) и (16), определяются как коэффициенты разложения π -периодичной функции (9) в ряд Фурье:

$$c = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varepsilon_{\min}(\varphi) \cos 2\varphi d\varphi = M'VM, \quad s = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varepsilon_{\min}(\varphi) \sin 2\varphi d\varphi = M'WM. \quad (17)$$

Здесь V, W — квадратные $\left[\frac{(K+1)(K+2)}{2}, \frac{(K+1)(K+2)}{2} \right]$ матрицы с элементами

$$v_{ij} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi z_{ij} \cos 2\varphi d\varphi, \quad w_{ij} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi z_{ij} \sin 2\varphi d\varphi, \quad (18)$$

где, в свою очередь, z_{ij} — (i, j) -й элемент квадратной матрицы того же размера:

$$Z = P'B^{-1}P. \quad (19)$$

Расчет матриц V, W по формулам (18), (19) может выполняться перед обработкой изображения и, следовательно, не будет влиять на вычислительную сложность алгоритма. Объем вычислений по формуле (17) и далее по (9) требует выполнения

$$U_{\text{add}}^{(3)} = \frac{(K+1)^2(K+2)^2}{2} + \frac{K(3K+5)}{2},$$
(20)

$$U_m^{(3)} = \frac{(K+1)(K+2)[(K+1)(K+2)+5]}{2}$$

операций умножения и сложения. С учетом затрат (12) на рекурсивное вычисление моментов сложность данного варианта алгоритма составляет

$$U_{\text{add}} = U_{\text{add}}^{(1)} + U_{\text{add}}^{(3)} = \frac{(K+1)(K+3)(K+8)}{6} + \frac{(K+1)^2(K+2)^2}{2} + \frac{K(3K+5)}{2},$$

$$U_m = U_m^{(1)} + U_m^{(3)} = \frac{K(K+2)(K+7)}{6} + \frac{(K+1)(K+2)[(K+2)+5]}{2}$$
(21)

операций умножения и сложения на каждый отсчет обрабатываемого изображения.

Результаты сопоставления оценок (14) и (20) вычислительной сложности для описанных вариантов реализации алгоритма цилиндрической аппроксимации представлены в таблице.

Из таблицы следует, что при малых порядках аппроксимирующего полинома и большом числе рассматриваемых углов ориентации цилиндра применение беспереборного алгоритма может дать существенное сокращение объема вычислений.

Заметим, что уравнение (16) имеет бесконечное множество решений, соответствующих экстремальным значениям ошибки. Оптимальный угол, обеспечивающий минимум величины (15), находится с учетом знаков c и s и приведения угла к интервалу $[0, \pi)$:

$$\varphi_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \begin{cases} \arctg \frac{s}{c} + \pi, & c \geq 0, \\ \arctg \frac{s}{c} + 2\pi, & s > 0, c < 0, \\ \arctg \frac{s}{c}, & c < 0, s \leq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Преобразование c, s в φ по формуле (22) может быть реализовано таблично с пренебрежимо малыми вычислительными затратами.

4. Применение алгоритма в задачах обработки изображений. Эффективность применения предлагаемого алгоритма в задачах цифровой обработки изображений продемонстрируем на нескольких примерах.

1. *Повышение качества и анализ дактилоскопических изображений.* Локально-анизотропные «линейчатые» изображения типа дактилограмм, интерферометрических картин и т. п. обычно содержат случайные шумовые и структурные искажения, затрудняющие визуальное восприятие или автоматическое «прослеживание» линий. Локальная цилиндрическая аппроксимация позволяет существенно повысить их качество: сгладить шумы и мелкие дефекты, устранить разрывы линий на участках их прямолинейности или плавного изгиба. Очевидно, что для получения эффекта сглаживания в качестве результирующего изображения следует взять двумерное поле значений аппроксимирующей функции в центре скользящего окна обработки, т. е. коэффициент

K	Переборный алгоритм		Беспереборный алгоритм		Выигрыш
	U_{add}	U_m	U_{add}	U_m	
2	$25 + 11K_\varphi$	$12 + 18K_\varphi$	106	114	при $K_\varphi > 7$
3	$44 + 21K_\varphi$	$25 + 30K_\varphi$	263	275	$K_\varphi > 10$
4	$70 + 34K_\varphi$	$44 + 45K_\varphi$	552	569	$K_\varphi > 14$
5	$104 + 50K_\varphi$	$102 + 63K_\varphi$	1034	1089	$K_\varphi > 18$

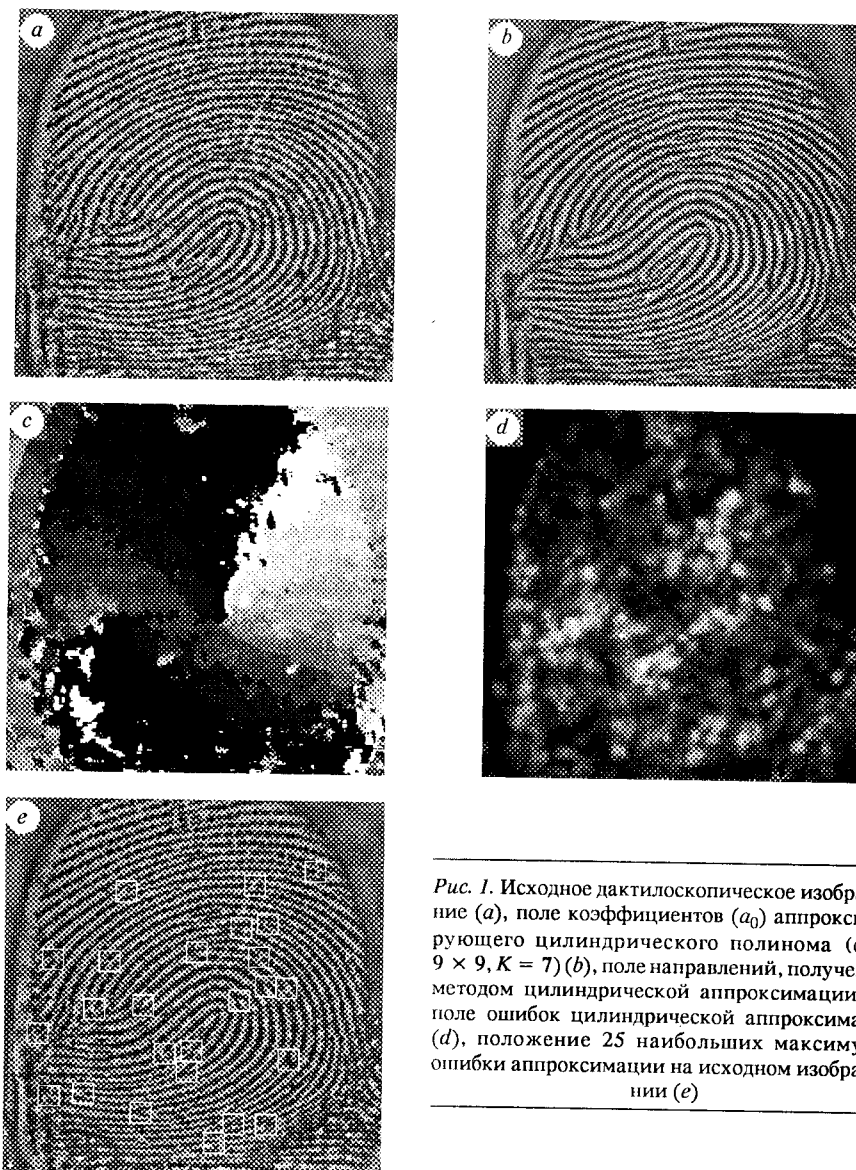


Рис. 1. Исходное дактилоскопическое изображение (а), поле коэффициентов (a_0) аппроксимирующего цилиндрического полинома (окно 9×9 , $K = 7$) (b), поле направлений, полученное методом цилиндрической аппроксимации (с), поле ошибок цилиндрической аппроксимации (d), положение 25 наибольших максимумов ошибки аппроксимации на исходном изображении (e)

a_0 в формуле (1). На рис. 1, а представлено исходное дактилоскопическое изображение, а на рис. 1, b — результат его сглаживания предложенным алгоритмом.

Далее, известно, что подобные изображения обладают большой информационной избыточностью, которую целесообразно устранить до их содержательного анализа или распознавания. Один из способов устранения избыточности заключается в описании изображения полем направлений (ориентации линейных элементов) [6]. Такое описание естественным образом формируется с помощью предложенного алгоритма, если в качестве выходного изображения принять поле значений φ_{opt} (рис. 1, c). Еще один способ малоизбыточного представления дактилоскопического изображения состоит в его описании координатами особенностей папиллярного узора (развилки, петли и т. п.). Эти особенности соответствуют «нецилиндрическим» участкам поля яркости, которые легко выявляются по локальным максимумам ошибки цилиндрической аппроксимации (рис. 1, d, e).

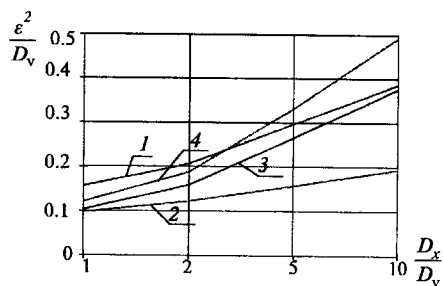


Рис. 2. Характеристики эффективности алгоритмов фильтрации:

1 – винеровская фильтрация «дактилограммы», 2 – цилиндрическая аппроксимация «дактилограммы», 3 – винеровская фильтрация «портрета», 4 – цилиндрическая аппроксимация «портрета»

2. *Фильтрация шумов с сохранением границ объектов.* Адаптивный характер алгоритма локальной цилиндрической аппроксимации позволяет рассчитывать, что он будет эф-

фективно устранять шум на изображении, сглаживая его вдоль границ областей с разными значениями яркости, т. е. сохраняя резкость границ объектов. Для проверки этого предположения проводились вычислительные эксперименты, для которых были взяты два тестовых изображения: «дактилограмма», предварительно очищенная от дефектов (см. рис. 1, *b*), и «портрет» (см. ниже рис. 3, *a*). Изображения искажались аддитивным нормально распределенным дискретным белым шумом и обрабатывались алгоритмом цилиндрической аппроксимации и, для сравнения, оптимальным линейным (винеровским) фильтром [1, 2]. При этом для цилиндрической аппроксимации осуществлялся подбор оптимальных параметров. На рис. 2 представлены экспериментально полученные зависимости дисперсии среднеквадратичной ошибки фильтрации ε^2 от соотношения дисперсий полезного сигнала (D_x) и шума (D_v). Как и ожидалось, для первого изображения, имеющего на большинстве фрагментов цилиндрический характер поля яркости, предлагаемый алгоритм выигрывает

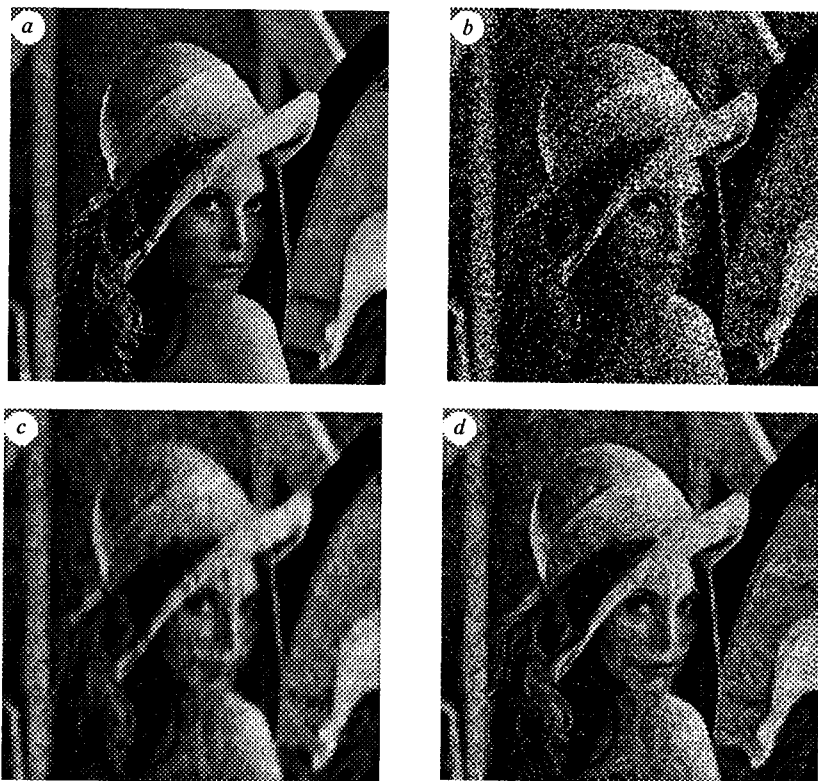
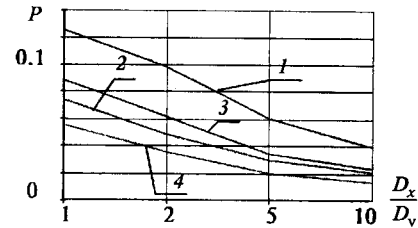


Рис. 3. Входное изображение (*a*), искаженное изображение ($D_x/D_v = 1$) (*b*), изображение, полученное в результате винеровской фильтрации (*c*), изображение, отфильтрованное алгоритмом цилиндрической аппроксимации (*d*)

Рис. 4. Характеристики помехоустойчивости процедур выделения контуров простейшим градиентным методом (1) и цилиндрической аппроксимацией в скользящем окне обработки 5×5 (2), 7×7 (3) и 9×9 (4)



по точности фильтрации перед винеровским фильтром. Для второго изображения с относительно малой площадью участков с контурами винеровский фильтр обеспечивает меньшую среднеквадратичную ошибку фильтрации. Однако, как видно из рис. 3, по критерию зрительного восприятия и в этом случае преимущество остается на стороне цилиндрической аппроксимации.

3. *Помехоустойчивое выделение контуров.* При использовании в качестве изображения, обработанного предлагаемым алгоритмом, поля значений коэффициентов a_1 аппроксимирующего полинома (1) получаем вариант реализации метода градиентного подчеркивания перепадов функции яркости (контуров). В отличие от известных процедур вычисления модуля градиента, соответствующих операторам Робертса, Собела и т. п., он оказывается существенно более помехоустойчивым, поскольку основан на аппроксимации изображения (и соответственно сглаживании шумов) в скользящем окне большего размера. Были проведены эксперименты по выделению контуров на тестовом изображении «портрета» (их подчеркивания с последующей пороговой обработкой), в которых сравнивались простейший алгоритм вычисления дискретного приближения градиента по трем отсчетам (текущему и двум соседним по строке и столбцу) [1] и описанный алгоритм цилиндрической аппроксимации

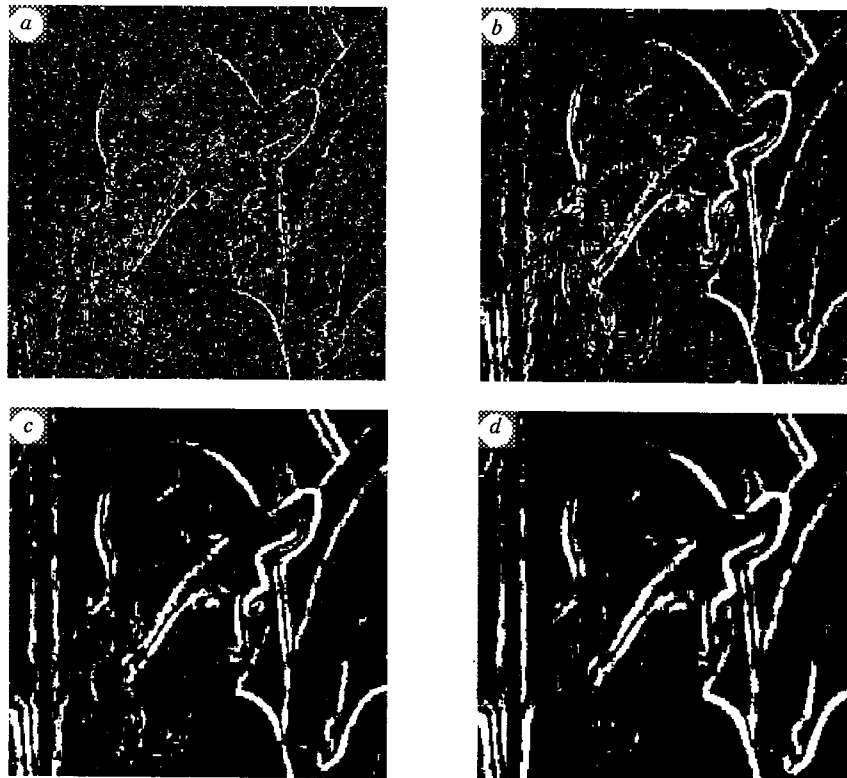


Рис. 5. Выделение контуров простейшим градиентным методом (a), методами цилиндрической аппроксимации, окно 5×5 (b), окно 7×7 (c), окно 9×9 (d)

при $K = 2$ и различных размерах окна. Порог обработки выбирался адаптивно так, чтобы обеспечить отнесение к контурным 10 % всех отсчетов изображения. Для указанных алгоритмов на рис. 4 приведены зависимости вероятности (относительной частоты) P ошибок определения контурных отсчетов от уровня аддитивного белого шума.

В качестве эталонов принимались результаты выделения контуров соответствующим алгоритмом на незашумленном изображении. Качественный эффект помехоустойчивого выделения контуров демонстрируется на рис. 5.

Заключение. Локальная цилиндрическая полиномиальная аппроксимация двумерного сигнала открывает возможность качественного решения широкого круга прикладных задач обработки изображений.

Рекурсивное вычисление двумерных степенных моментов в скользящем окне обработки дает возможность построения сравнительно простых вычислительных процедур цилиндрической аппроксимации при произвольных размерах окна.

Структура преобразований данных, осуществляемых в рассмотренных вариантах алгоритма цилиндрической аппроксимации, обеспечивает эффективность его реализации как на универсальных ЭВМ, так и на специализированных параллельно-конвейерных вычислительных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прэтт У. К. Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982. Кн. 2.
2. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979.
3. Сергеев В. В. Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры для обработки изображений // Компьютерная оптика. М.: МЦНТИ, 1992. Вып. 10, 11.
4. Glumov N. I., Krainukov N. I., Sergeev V. V., Khramov A. G. The fast algorithm of image approximation in a sliding window // Pattern Recognition and Image Analysis. 1991. N 4. P. 424.
5. Glumov N. I., Myasnikov V. V., Sergeev V. V. Application of polynomial bases for image processing using sliding window // Image Processing and Computer Optics (DIP-94): Proc. SPIE. 1995. 2363. P. 40.
6. Ильясова Н. Ю., Устинов А. В., Храмов А. Г. Методы анализа дактилоскопических изображений на основе поля направлений // Научное приборостроение. 1993. 3, № 1: Дифракционная плоская оптика и обработка изображений.

Поступила в редакцию 21 ноября 1995 г.