

УДК 621.391.1

В. Е. Фарбер

(Москва)

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ОШИБОК СЧЕТА
В ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**

Показано, что учет корреляции между так называемыми ошибками счета и квантуемыми процессами может привести к большим погрешностям в вероятностной оценке влияния ошибок счета на точностные характеристики после цифровой обработки информации. Предложен метод экспериментальной вероятностной оценки, учитывающий такую корреляцию, и дано его сравнение с общепринятым методом оценки, при котором влияние корреляции между ошибками счета и квантуемыми процессами не учитывается.

Постановка задачи. Ошибки квантования, возникающие при преобразовании «аналог—код», и ошибки вычисления, возникающие при выполнении арифметических операций в ЭВМ, могут существенно ухудшить точностные характеристики систем цифровой обработки данных. Для обоснованного выбора разрядной сетки ЭВМ необходимо оценить влияние ошибок счета (ОС) на точность цифровой обработки. В случаях, когда аналитически провести вероятностную оценку такого влияния затруднительно, необходимо пользоваться экспериментальными вероятностными оценками.

В [1] рассмотрен один из методов такой экспериментальной оценки. Однако получаемые на его основе результаты справедливы при отсутствии корреляции между ОС и квантуемыми процессами (КП). В случае, когда ОС сильно коррелированы с КП [2, 3], указанный метод может привести к ошибке в вероятностной оценке влияния ОС на точностные характеристики результатов цифровой обработки данных. Настоящая работа посвящена рассмотрению метода экспериментального определения результирующей ОС на выходе системы цифровой обработки, учитывающего наличие указанной корреляции.

Описание способов экспериментальной оценки ошибок счета. На рис. 1 представлены схемы способов экспериментальной оценки влияния результирующей ОС без учета (рис. 1, а) и с учетом (рис. 1, б) корреляции между ОС и КП. В обоих случаях дискретные выборки фильтруемого процесса \bar{x}_n в моменты времени t_n поступают на два математически эквивалентных фильтра, реализованных на ЭВМ. В первом фильтре вычисления проводятся с ценой младшего разряда Δ , а во втором — с ценой младшего разряда Δ^* . Выбирая $\Delta^* \ll \Delta$, можно считать, что ОС на выходе второго фильтра отсутствуют. Обозначая результаты фильтрации на выходе первого и второго фильтров через \bar{y}_n и \bar{x}_n соответственно, имеем

$$\bar{y}_n = \bar{x}_n - \bar{\kappa}_n,$$

где $\bar{\kappa}_n$ — значение результирующей ОС на выходе первого фильтра, обусловленное вычислениями в ЭВМ с ценой младшего разряда Δ .

При первом способе (см. рис. 1, а) результаты фильтрации \bar{y}_n и \bar{x}_n на каждом такте работы фильтра вычитаются. Полученная таким образом выборка разностей $\bar{\kappa}_n = \bar{x}_n - \bar{y}_n$ подвергается статистической обработке, в результате ко-

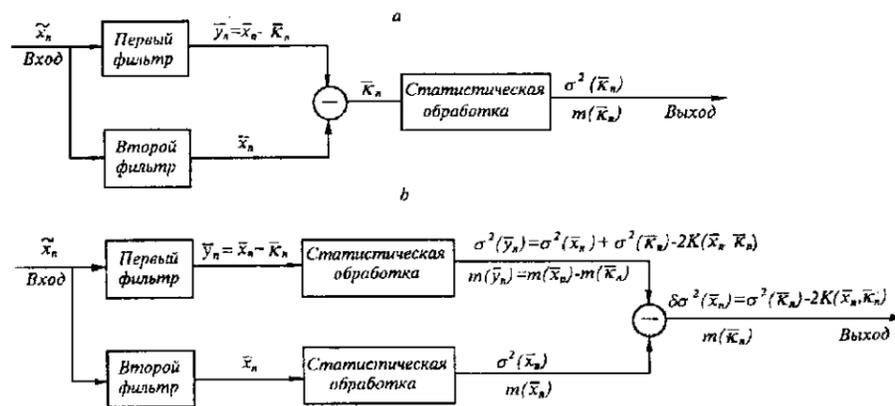


Рис. 1

торой находятся оценки дисперсии $\sigma^2(\bar{\kappa}_n)$ и математического ожидания $m(\bar{\kappa}_n)$ результирующей ОС $\bar{\kappa}_n$ на выходе фильтра.

При втором способе экспериментальной оценки (см. рис. 1, б) сигналы \bar{y}_n и \bar{x}_n подвергаются статистической обработке, в результате которой имеем $\sigma^2(\bar{x}_n)$, $m(\bar{x}_n)$ и

$$\sigma^2(\bar{y}_n) = \sigma^2(\bar{x}_n) + \sigma^2(\bar{\kappa}_n) - 2K(\bar{x}_n, \bar{\kappa}_n); \quad m(\bar{y}_n) = m(\bar{x}_n) - m(\bar{\kappa}_n), \quad (1)$$

где $K(\bar{x}_n, \bar{\kappa}_n)$ — взаимная корреляция оценки \bar{x}_n и результирующей ОС $\bar{\kappa}_n$. Затем результаты статистической обработки вычитаются, так что при втором способе экспериментальной оценки находятся оценки $m(\bar{\kappa}_n)$ и

$$\delta\sigma^2(\bar{x}_n) = \sigma^2(\bar{\kappa}_n) - 2K(\bar{x}_n, \bar{\kappa}_n). \quad (2)$$

Таким образом, в результате использования первого способа находится оценка дисперсии результирующей ошибки счета $\sigma^2(\bar{\kappa}_n)$, а при использовании второго способа — величина $\delta\sigma^2(\bar{x}_n)$, характеризующая увеличение дисперсии процесса на выходе фильтра, обусловленное влиянием ОС.

Сравнение способов оценки влияния ошибок счета. Проиллюстрируем на примере фильтра с постоянными параметрами преимущества второго метода экспериментальной оценки влияния ошибок счета на точностные характеристики процессов на выходе цифровых систем обработки информации по сравнению с первым методом.

Рассмотрим характеристики ошибок, возникающих при обработке данных в ЭВМ по следующей схеме (рис. 2). Непрерывный по уровню процесс ψ квантуется по уровню в первом квантователе. Зависимость значений ошибки

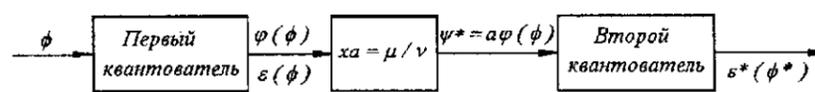


Рис. 2

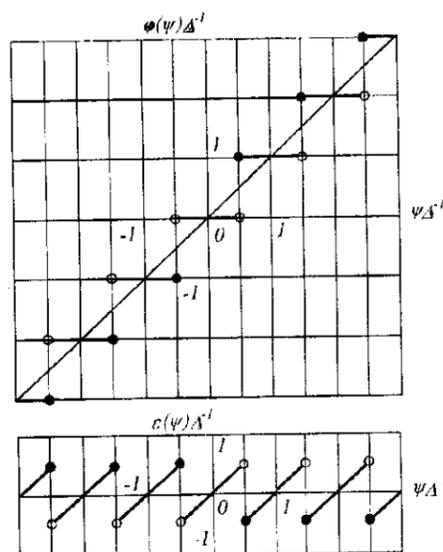


Рис. 3

квантования ϵ и квантованного процесса $\varphi(\psi)$ от значений ψ изображена на рис. 3 и описывается соотношением

$$\epsilon(\psi) = \psi - \varphi(\psi), \quad (3)$$

$$\varphi(\psi) = \Delta E\{\lfloor \psi \Delta^{-1} + 0,5 \rfloor \text{sign} \psi\},$$

где $E\{\cdot\}$ — операция взятия целой части. Затем квантованный процесс $\varphi(\psi)$ умножается на несократимую дробь $a = \mu/\nu$ и результат умножения $\psi^* = a\varphi(\psi)$ подвергается квантованию по уровню во втором квантователе, полностью идентичном первому.

Пусть ψ является нормально распределенным процессом с математическим ожиданием m_ψ и дисперсией $\sigma^2(\psi)$. Тогда [4] при $\sigma(\psi)/\Delta \geq 0,5$ математическое ожидание m_ϵ и дисперсия $\sigma^2(\epsilon)$ ошибок квантования

$\epsilon(\psi)$ на выходе первого квантователя, а также взаимная корреляционная функция $K(\epsilon, \psi)$ ошибок квантования $\epsilon(\psi)$ и КП ψ равны

$$m(\epsilon) = 0, \quad \sigma^2(\epsilon) = \Delta^2/12, \quad K(\epsilon, \psi) = 0 \quad \text{при } \sigma(\psi)/\Delta \geq 0,5. \quad (4)$$

Числовые характеристики ошибок вычисления $\epsilon^*(\psi^*)$ на выходе второго квантователя зависят не только от отношения $\sigma(\varphi)/\Delta$, но и от того, четным или нечетным является знаменатель ν дроби a , а также от значений, которые может принимать квантуемый процесс φ . В [2] показано, что числовые характеристики ошибок вычисления на выходе второго квантователя определяются следующими выражениями:

1) для ν нечетного

$$m(\epsilon^*) = 0, \quad \sigma^2(\epsilon^*) = \Delta^2(\nu^2 - 1)/12\nu^2, \quad K(\epsilon^*, \psi^*) = 0 \quad (5)$$

при $\sigma(\varphi)/\nu\Delta \geq 0,5$,

2) для ν четного

$$m(\epsilon^*) = -\Delta/2\nu \text{sign}\{m(\varphi)\}, \quad \sigma^2(\epsilon^*) = \Delta^2(\nu^2 - 1)/12\nu^2, \quad K(\epsilon^*, \psi^*) = 0 \quad (6)$$

при $[\sigma(\varphi)/\nu\Delta \geq 0,5] \wedge [|m(\varphi)| \geq 3\sigma(\varphi)]$,

$$m(\epsilon^*) = 0, \quad \sigma^2(\epsilon^*) = \Delta^2(\nu^2 + 2)/12\nu^2, \quad |2K(\epsilon^*, \psi^*)| > \sigma^2(\epsilon^*) \quad (7)$$

при $[\sigma(\varphi)/\nu\Delta \geq 0,5] \wedge [m(\varphi) = 0]$.

Если при ν четном квантованный процесс может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то числовые характеристики ошибок вычисления на выходе второго квантователя зависят от вероятностных характеристик процесса φ независимо от отношения $\sigma(\varphi)/\Delta$. Этот факт существенно

затрудняет проведение вероятностной оценки, ибо вероятностные характеристики фильтруемых величин априори, как правило, неизвестны. В частном случае, когда $m(\varphi) = 0$ (7), ошибки вычисления ε^* сильно коррелированы с φ^* .

Сравнивая между собой вероятностные характеристики ошибок квантования на выходе первого квантователя и ошибок вычисления на выходе второго квантователя (см. рис. 2), можно заключить, что при выполнении условий, оговоренных в (4)–(6), вероятностные характеристики ошибок вычисления для $\nu \geq 10$ можно считать аналогичными вероятностным характеристикам ошибок квантования. Если же при ν четном математическое ожидание процесса $\varphi(\psi)$ равно нулю, то неучет $K(\varepsilon^*, \varphi^*)$ неизбежно приведет к занижению результата аналитически проведенной вероятности оценки, а результаты описанных выше способов экспериментальной оценки не будут совпадать.

В качестве примера рассмотрим прохождение стационарного некоррелированного нормального случайного процесса x_n с математическим ожиданием $m(\tilde{x}) = 0$ и дисперсией $\sigma^2(\tilde{x})$ через цифровой фильтр

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + (1-a)(\tilde{x}_n - \bar{x}_{n-1}), \quad (8)$$

который с учетом возникающих при его реализации на ЭВМ ошибок счета может быть записан в виде

$$\bar{y}_n = \bar{x}_n - \bar{\kappa}_n = \bar{y}_{n-1} + (1-a)(\tilde{y}_n - \bar{y}_{n-1}) - \tilde{\kappa}_n^{(2)}, \quad (9a)$$

$$\tilde{y}_n = \tilde{x}_n - \tilde{\kappa}_n^{(1)}, \quad (9b)$$

где \bar{x}_n и \bar{y}_n — оценки фильтруемого процесса \tilde{x}_n в момент времени $t = t_n$ без учета и с учетом влияния ОС; $a = \mu/\nu$ — параметр сглаживания ($\mu < \nu$); $\bar{\kappa}_n$ — результирующее значение ОС на выходе фильтра; $\tilde{\kappa}_n^{(1)}$ — ошибка, возникающая при преобразовании «аналог—цифра»; $\tilde{\kappa}_n^{(2)}$ — ошибка, возникающая при вычислении произведения $(1-a)(\tilde{y}_n - \bar{y}_{n-1})$. Ошибки $\tilde{\kappa}_n^{(1)}$ и $\tilde{\kappa}_n^{(2)}$ численно равны $\varepsilon(\psi)$ (3) при $\psi = \tilde{\kappa}_n$ и $\psi = (1-a)(\tilde{y}_n - \bar{y}_{n-1})$ соответственно. Числовые характеристики ошибок $\tilde{\kappa}_n^{(1)}$ определяются выражением (4), а ошибок $\tilde{\kappa}_n^{(2)}$ — выражениями (5) или (7).

Из (9) можно получить следующие соотношения для определения дисперсии $\sigma^2(\bar{y}_n)$ процесса \bar{y}_n на выходе фильтра с учетом влияния ОС:

$$\sigma^2(\bar{y}_n) = \sigma^2(\bar{x}_n) + \sigma^2(\bar{\kappa}_n) - 2K(\bar{x}_n, \bar{\kappa}_n), \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\bar{y}_n) = & a^2\sigma^2(\bar{y}_{n-1}) + (1-a)^2[\sigma^2(\tilde{x}) + \sigma^2(\tilde{\kappa}_n^{(1)})] + \sigma^2(\tilde{\kappa}_n^{(2)}) - \\ & - 2aK(\bar{y}_n, \tilde{\kappa}_n^{(2)}) - 2(1-a)K(\tilde{y}_n, \tilde{\kappa}_n^{(2)}). \end{aligned} \quad (10b)$$

Для установившегося режима, когда $\sigma^2(\bar{y}_n) = \sigma^2(\bar{y}_{n-1}) = \sigma^2(\bar{y})$, имеем

$$\sigma^2(\bar{y}) = \sigma^2(\bar{x}) + \sigma^2(\bar{\kappa}) - 2K(\bar{x}, \bar{\kappa}), \quad (11a)$$

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1-a}{1+a}\sigma^2(\tilde{x}), \quad (11b)$$

$$\sigma^2(\bar{\kappa}) = \frac{1-a}{1+a}\sigma^2(\tilde{\kappa}^{(1)}) + \frac{1}{1-a^2}\sigma^2(\tilde{\kappa}^{(2)}), \quad (11b)$$

$$K(\bar{x}, \bar{\kappa}) = -\frac{1}{1-a^2}K(\bar{y}, \tilde{\kappa}^{(2)}) - \frac{1}{(1+a)}K(\tilde{y}, \tilde{\kappa}^{(2)}). \quad (11r)$$

ν	μ	$\frac{\sigma^2(\kappa)}{\Delta^2}$	$\hat{\sigma}^2(\bar{x})/\Delta^2$		$\hat{\delta\sigma}^2(\bar{x})/\Delta^2$		$\lambda, \%$	
			$s=0,5$	$s=1,0$	$s=0,5$	$s=1,0$	$s=0,5$	$s=1,0$
2	1	0,194	0,160	0,168	0,297	0,455	086,1	171,0
3	1	0,125	0,124	0,124	0,126	0,130	001,3	005,1
3	2	0,150	0,149	0,150	0,145	0,143	003,1	004,5
4	1	0,150	0,149	0,149	0,366	0,569	145,2	282,5
4	3	0,226	0,185	0,205	0,314	0,453	069,9	121,9
5	2	0,131	0,131	0,131	0,137	0,138	005,1	005,4
5	4	0,231	0,230	0,234	0,220	0,228	004,5	002,8
6	1	0,150	0,151	0,150	0,396	0,632	163,2	320,2
6	5	0,295	0,252	0,271	0,373	0,483	047,5	078,5
7	2	0,135	0,135	0,135	0,138	0,119	002,1	011,9
7	4	0,144	0,144	0,145	0,145	0,160	000,6	010,5
7	6	0,314	0,314	0,317	0,318	0,300	001,4	005,4
8	1	0,152	0,153	0,152	0,406	0,674	165,9	342,7
8	3	0,138	0,137	0,138	0,341	0,479	148,9	248,2
8	5	0,160	0,153	0,159	0,312	0,434	102,8	172,7
8	7	0,372	0,331	0,347	0,470	0,539	042,1	055,6
9	2	0,140	0,139	0,139	0,150	0,155	007,9	011,5
9	4	0,135	0,133	0,135	0,141	0,145	005,7	007,3
9	6	0,164	0,151	0,151	0,145	0,133	004,2	012,3
9	8	0,397	0,399	0,400	0,406	0,401	001,9	000,1
10	1	0,154	0,155	0,155	0,426	0,697	175,3	348,9
10	3	0,138	0,138	0,137	0,355	0,536	157,8	290,4
10	7	0,181	0,176	0,178	0,319	0,393	081,8	120,8
10	9	0,452	0,409	0,430	0,554	0,619	035,3	043,7

Подставляя в (11) $a = \mu/\nu$ и учитывая (2), (4), (5) и (7), получим
1) для ν нечетного

$$\sigma^2(\bar{\kappa}) = \delta\sigma^2(\bar{x}) = \left\{ \frac{(\nu - \mu)^2 + (\nu^2 - 1)}{\nu^2 - \mu^2} \right\} \frac{\Delta^2}{12}, \quad (12)$$

2) для ν четного

$$\sigma^2(\bar{\kappa}) = \left\{ \frac{(\nu - \mu)^2 + (\nu^2 + 2)}{\nu^2 - \mu^2} \right\} \frac{\Delta^2}{12}, \quad (13a)$$

$$\delta\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2(\bar{\kappa}) - \frac{2\mu\nu}{\nu^2 - \mu^2} K(\bar{y}, \bar{\kappa}^{(2)}) - \frac{2\nu}{\nu + \mu} K(\bar{y}, \bar{\kappa}^{(2)}). \quad (13b)$$

Сравним аналитические оценки для $\sigma^2(\bar{\kappa})$ (12), (13) с оценками $\hat{\sigma}^2(\bar{\kappa})$ и $\delta\hat{\sigma}^2(\bar{x})$, полученными на основе описанных выше двух способов экспериментальной оценки. Количество разрядов при реализации первого фильтра (см. рис. 1) определялось в соответствии с формулой (3). Поскольку математические ожидания ОС и фильтруемого процесса равны нулю, усреднение осуществлялось по формулам

$$\hat{\sigma}^2(\bar{\kappa}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{\kappa}_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{y}_n - \bar{x}_n)^2, \quad \delta\hat{\sigma}^2(\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{\kappa}_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\bar{y}_n^2 - \bar{x}_n^2).$$

Затем вычислялась величина

$$\lambda \% = \frac{|\hat{\sigma}^2(\bar{\kappa}) - \delta\hat{\sigma}^2(\bar{x})|}{\sigma^2(\bar{x})} 100 \%,$$

характеризующая ошибку первого способа экспериментальной оценки из-за неучета корреляции между ОС и КП.

В таблице для случая $\frac{\sigma^2(\bar{x})}{\nu\Delta} = S$, $S > 0,5$, т. е. когда выполняются условия, приведенные в (4)–(7), даны результаты аналитической и двух способов экспериментальной оценок влияния ОС на точностные характеристики фильтра с эффективной конечной памятью.

Как и следовало ожидать, при ν нечетном результаты аналитической и экспериментальной оценок хорошо согласуются между собой, а при ν четном из-за неучета корреляции между ОС и КП ошибка λ аналитической и рассмотренного в [1] способа экспериментальной оценок по отношению к приведенному в работе способу при увеличении $\sigma(\bar{x})/\Delta$ растет и при $\nu = 10$, $\mu = 1$ достигает значения $\lambda \approx 350 \%$.

ВЫВОДЫ

Рассмотрен способ экспериментальной вероятностной оценки влияния ОС на точностные характеристики результатов цифровой обработки. Предложенный способ учитывает не только математическое ожидание и дисперсию ОС, но и взаимную корреляцию между ОС и квантуемым процессом. На конкретном примере показано, что неучет корреляции между ними может привести к существенным ошибкам в вероятностной оценке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верешкин А. Е., Катковник В. Я. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. М.: Сов. радио, 1973.
2. Лившиц Н. А., Фарбер В. Е. Об учете корреляции ошибок счета и квантуемых процессов при оценке точности вычислений в ЦВУ // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 1980. Вып. 9.
3. Фарбер В. Е. Об ошибках амплитудного квантования при округлении с недостатком по модулю // Автометрия. 1994. № 5.
4. Ефимов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле. М.: Энергия, 1969.

Поступила в редакцию 8 ноября 1994 г.