РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1995

УДК 681.518.2 : 621.391

Ч. М. Гаджиев

(Баку, Азербайджан)

РОБАСТНЫЙ МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ НЕПОЛАДОК ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Разработан робастный метод обнаружения неполадок фильтра Калмана, не требующий гауссовости случайных параметров модели и погрешности измерений. Предложена также упрощенная процедура обнаружения неполадок в реальном времени.

Введение. Оперативное обнаружение неполадок в системах оценивания имеет важное значение при решении ряда прикладных задач [1, 2]. При этом необязательно идентифицировать причины возникновения отказа, достаточно лишь своевременно определить возникшие в системе неполадки.

Предложенные в [3, 4] методы обнаружения неполадок разработаны в предположении, что все случайные параметры модели и погрешности измерений подчинены нормальному закону распределения. При отклонении указанных плотностей от нормального закона эти методы приводят к большим погрешностям и, следовательно, снижается вероятность принятия правильного решения в результате контроля. Поэтому целесообразно разработать робастные методы диагностирования, слабо зависящие от нарушения введенных предположений.

Математическая модель и некоторые предварительные замечания. Рассмотрим динамическую систему, заданную уравнениями вида

$$\begin{gathered} x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + w(k), \\ z(k) = H(k)x(k) + \mathrm{v}(k), \end{gathered} \tag{1}$$

где $x(k)$ — n-мерный вектор состояния системы; $\Phi(k+1, k)$ — ее переходная матрица; $w(k)$ — вектор шумов возмущений (шумов системы); $z(k)$ — s-мерный вектор измерений; $H(k)$ — матрица измерений системы; $\mathrm{v}(k)$ — вектор шумов измерений.

Начальное состояние $x(0)$, шумы системы $w(k)$ и шумы измерений $\mathrm{v}(k)$ являются случайными с конечными вторыми моментами. Предполагается, что $x(0)$, $\{w(k)\}$ и $\{\mathrm{v}(k)\}$ — взаимно некоррелированы и независимы, а модель (1) полностью управляема и наблюдаема.

При указанных предположениях в [5] доказана асимптотическая нормальность статистики

$$S(k) = B^{-1}(k)\left\{\hat{x}(k) - E\hat{x}(k)\right\} \tag{2}$$

с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей ($\hat{x}(k)$ — оценка состояния системы; $B^2(k)$ — ковариационная матрица ошибок оценок, причем $B^2(k) > 0$; E — оператор математического ожидания) в стабильных системах для произвольно распределенных $x(0)$, $\{w(k)\}$ и $\{v(k)\}$, т. е. $S(k) \to N(0, I)$ при $k \to \infty$.

Этот результат позволяет свести задачу обнаружения неполадок в системе оценивания к проверке соответствия последовательности $\{S(k)\}$ белому шуму с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей.

Обнаружение неполадок на основе проверки статистических характеристик S(k). С целью проверки соответствия последовательности $\{S(k)\}$ белому шуму вычислим оценку автокорреляционной функции по M (M должно быть достаточно большим) экспериментальным данным:

$$R_{S(k)S(k-j)} = \frac{1}{M}\sum_{k=j}^{M}\left[S(k) - \overline{S}\right]\left[S(k-j) - \overline{S}\right]^T,$$

где выборочное среднее

$$\overline{S} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} S(k).$$

Как известно, элементы матрицы $R_{S(k)S(k-j)}$, когда величины $S(k)$ при $k = 1, 2, \ldots$ независимы, будут асимптотически независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевым средним и их можно проверять, используя доверительные границы нормального распределения при заданной доверительной вероятности.

Для проверки соответствия последовательности $\{S(k)\}$ белому шуму может быть использована также статистика выборочного коэффициента корреляции между компонентами вектора $S(k)$ [6].

С целью проверки равенства нулю среднего значения последовательности $\{S(k)\}$ целесообразно формировать статистику вида

$$l(k) = \sum_{j=k-M+1}^{k} S^T(j)S(j),$$

имеющую распределение χ^2 с M_s-степенями свободы, где s — размерность вектора $S(k)$; M — число используемых реализаций.

Выбирая уровень значимости β:

$$P\left\{\chi^2 > \chi^2_{\beta, M_s}\right\} = \beta, \qquad 0 < \beta < 1,$$

зададим порог χ^2_{β, M_s}, и если $l(k) > \chi^2_{\beta, M_s}$, то подадим сигнал о неполадке фильтра Калмана.

С целью проверки ковариационной матрицы статистики $S(k)$ можно использовать след выборочной ковариационной матрицы

$$\hat{K} = \frac{1}{M-1}\sum_{k=1}^{M}\left[S(k) - \overline{S}\right]\left[S(k) - \overline{S}\right]^T, \tag{3}$$

имеющий χ^2-распределение. Однако в этом случае недиагональные элементы матрицы $\hat{K}$ в проверке не принимают участия, что может привести к принятию неправильного решения о нормальном функционировании фильтра Калмана.

Как известно [7], при нормальном распределении случайной последовательности $\{S(k)\}$ матрица $A = (M-1)\hat{K}$ будет иметь распределение Уишарта (многомерный аналог χ^2-распределения). Определение доверительной области для случайной матрицы Уишарта A представляет достаточно сложную задачу из-за трудности вычисления и применения в практических целях распределения Уишарта.

В [8] предложен последовательный способ проверки ковариационной матрицы и даны некоторые рекомендации для наискорейшего обнаружения ее изменения.

С учетом указанного подхода с целью проверки соответствия выборочной ковариационной матрицы (3) единичной матрице вычислим статистику вида

$$\lambda = \frac{L^T I^{-1} L}{L^T A^{-1} L}, \tag{4}$$

где L — любой фиксированный вектор.

Так как матрицы I и A положительно определены и A имеет распределение Уишарта $\{A \sim W(I, M)\}$, то λ распределена по закону χ^2_{M-s+1} для любого фиксированного вектора L. Этот результат позволяет свести исследование многомерного распределения Уишарта к рассмотрению одномерного χ^2-распределения.

При наличии неполадок в системе оценивания выборочная ковариационная матрица $A/(M-1)$ не будет соответствовать единичной матрице и χ^2_{M-s+1} стремится превысить табличное значение для заданного уровня значимости. Обнаруживаемость неполадок зависит от значения величины λ, следовательно, от выбора вектора L.

В [8] из условия максимума отношения двух квадратичных форм (4) получено, что наилучший вектор $L_{\text{опт}}$ есть собственный вектор матрицы $AI^{-1} = A$, соответствующий максимальному собственному значению этой матрицы.

Так как матрица A симметрична и положительно определена, то она имеет вещественные собственные векторы и вещественные собственные значения [9]. Отсюда следует, что аналитически или численно можно найти оптимальный вектор $L_{\text{опт}}$, обеспечивающий максимум отношения двух квадратичных форм (4).

Обнаружение неполадок на основе построения доверительной области для S(k). При увеличении размерности системы обнаружение неполадок в фильтре Калмана вышеуказанным способом не всегда может быть выполнено в реальном времени. Поэтому на основе построения доверительной области для $S(k)$ ниже предлагается упрощенный алгоритм обнаружения неполадок. Так как в случае нормального функционирования фильтра Калмана статистика $S(k)$ имеет гауссово распределение с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, то уравнение

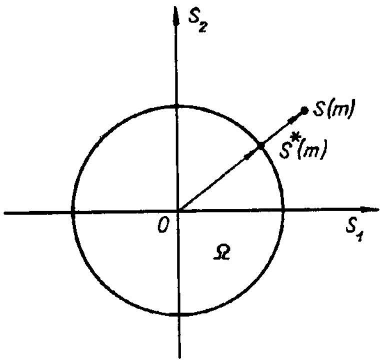
$$S^T(k)S(k) = \rho^2 \tag{5}$$

соответствует допустимому эллипсоиду рассеивания (в данном случае допустимой сфере рассеивания), где ρ — длина радиуса допустимой сферы в средних квадратических отклонениях.

Эллипсоиды обладают тем интересным свойством, что вероятность нахождения величины $S(k)$ внутри эллипсоида является функцией только ρ и при $s \geq 2$ четном равна [10]

$$\mathcal{P}(\rho) = 1 - R(s/2 - 1;\ \rho^2/2), \tag{6}$$

где $R(m, a) = \sum_{i=0}^{m} a^i e^{-a}/i!$ — функция, описывающая распределение вероятностей случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром a.



При $s \geq 3$ нечетном вероятность попадания вектора $S(k)$ в эллипсоид рассеяния равна

$$\mathcal{P}(\rho) = 2\Phi(\rho) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2/2} \sum_{m=1}^{s-2} \frac{\rho^m}{m!!}, \qquad (7)$$

где сумма определяется только для нечетных индексов $m = 1, 3, 5, \ldots, \quad (s-2)$; $\Phi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\rho \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ — функция Лапласа.

Задав доверительную вероятность, нетрудно построить допустимую сферу с допустимым радиусом $\rho_{\text{доп}}$ для $S(k)$ с помощью квантилей стандартного нормального распределения или на основе выражений (5)—(7):

$$S^T(k)S(k) = \rho^2_{\text{доп}}. \qquad (8)$$

Введем две гипотезы: H_0 — фильтр Калмана функционирует нормально (вектор $S(k)$ находится в допустимой сфере (8)); H_1 — имеют место неполадки ($S(k)$ находится вне допустимой сферы).

Теорема. Если вектор $S(k)$ находится вне допустимой сферы, левая часть уравнения (8) оказывается больше чем $\rho^2_{\text{доп}}$.

Доказательство. Соединим на фигуре (см. рисунок) некоторую произвольную точку $S(m)$ вне допустимой сферы с началом координат вектором $S(m)$, который пересекает границы допустимого круга рассеивания в точке $S^*(m)$. Так как $S(m)$ находится вне допустимого круга, то

$$S(m) = \mu S^*(m), \qquad \mu > 1.$$

Отсюда

$$S^T(m)S(m) = \mu^2 S^{*T}(m)S^*(m) > S^{*T}(m)S^*(m) = \rho^2_{\text{доп}},$$

что и требовалось доказать.

В этом случае проверка попадания вектора $S(k)$ в допустимую область Ω выполняется простой подстановкой вектора $S(k)$ в уравнение (8). В случае неполадок в фильтре Калмана левая часть уравнения (8) окажется больше, чем $\rho^2_{\text{доп}}$, и принимается гипотеза H_1. Если $S(k) \in \Omega$, то левая часть уравнения (8) меньше или равна $\rho^2_{\text{доп}}$, и в результате принимается гипотеза H_0.

Заключение. Разработан робастный метод обнаружения неполадок фильтра Калмана, не требующий гауссовости случайных параметров модели и погрешности измерений. Предложенный метод базируется на знании статистической характеристики величины (2), которая является асимптотически нормальной с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей. Таким образом, задача обнаружения неполадок в системе оценивания сводится к проверке соответствия последовательности $\{S(k)\}$ белому шуму с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей.

Предложен также упрощенный алгоритм обнаружения неполадок на основе построения доверительной области для $S(k)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wilsky A. S.** A survey of design methods for failure detection in dynamic systems // Automatica. 1976. 12. P. 601.
2. **Chang C. B., Dunn K. P.** On GLR detection and estimation of unexpected inputs in linear discrete systems // IEEE Trans. Autom. Contr. 1979. AC-24, N 3. P. 499.
3. **Kerr T. H.** Real-time failure detection: a non-linear optimization problem that gields a two-ellipsoid overlap test // J. Optimiz. Theory Appl. 1977. 22, N 4. P. 509.
4. **Brumback B. D., Srinath M. D.** A chi-square test for fault-detection in Kalman filters // IEEE Trans. Autom. Contr. 1987. AC-32, N 6. P. 552.
5. **Spall J. C.** Validation of state-space models from a single realization of non-Gaussian measurements // IEEE Trans. Autom. Contr. 1985. AC-30, N 12. P. 1212.
6. **Химмельблау Д.** Обнаружение и диагностика неполадок в химических и нефтехимических процессах. Л.: Химия, 1983.
7. **Андерсон Т.** Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.
8. **Гаджиев Ч. М.** Диагностирование динамических систем по обновляющей последовательности фильтра Калмана // Автоматика и телемеханика. 1992. № 1.
9. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1967.
10. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 10 сентября 1992 г.