РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 6 1995

УДК 535.5

Д. А. Безуглов
(Ростов-на-Дону)

ОЦЕНКА КУМУЛЯНТНЫМ МЕТОДОМ ЭФФЕКТИВНОСТИ АДАПТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С МЕМБРАННЫМ ЗЕРКАЛОМ

На базе кумулянтного представления случайных пуассоновских величин разработан метод оценки эффективности гибкого мембранного зеркала адаптивной оптической системы. Получено аналитическое выражение для характеристической функции и оценки плотности распределения шумовой ошибки. Даны практические рекомендации по использованию разработанного метода.

Введение. В настоящее время при создании адаптивных оптических систем, компенсирующих нестационарные искажения световых пучков при их распространении в турбулентной атмосфере, широко используются мембранные адаптивные зеркала [1]. Это обусловлено, прежде всего, тем, что такие зеркала обладают широким частотным диапазоном действия и большим диапазоном фазовой коррекции. При построении на базе таких зеркал адаптивных оптических систем возникает потребность в оценке их эффективности. Рассмотрение данной проблемы следует производить с учетом двух возникающих при этом видов ошибок. Первый вид ошибок, методика оценки которых изложена в [2], возникает из-за конечного числа степеней свободы гибкого зеркала адаптивной оптической системы. Такие ошибки будем называть ошибками аппроксимации. Второй вид ошибок — это ошибки, обусловленные наличием шумов в каналах управления адаптивной оптической системы. В дальнейшем эти ошибки будем называть шумовыми. Специфика этих двух видов ошибок заключается в том, что при увеличении степеней свободы адаптивной оптической системы первая ошибка уменьшается, зато возрастает вторая. Таким образом, возникает стандартная задача оптимизации вида

$$\min_N \sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma_c^2,$$

где σ^2 — дисперсия суммарной ошибки; σ_a^2 — дисперсия ошибки аппроксимации; σ_c^2 — дисперсия шумовой ошибки.

В работах [3—6] рассматривается случай гауссовых коррелированных и некоррелированных шумов. При этом производится оценка эффективности функционирования адаптивной оптической системы, однако предложенные там методики не учитывают эффективность собственно гибкого зеркала. Таким образом, остается открытым вопрос оценки эффективности гибкого зеркала при наличии в каналах управления пуассоновских шумов и шумов, описываемых другими плотностями распределения. Особенно актуальным данный вопрос становится при анализе эффективности системы апертурного зондирования, в которой управляющие сигналы формируются на основе линейной обработки сигналов с выхода фотоприемника [7]. Очевидно, что в статистическом смысле в такой системе [8] наиболее предпочтительно пуассоновское описание сигналов и шумов.

В данной работе предложен принципиально новый подход к решению задачи оценки эффективности функционирования гибкого зеркала адаптивной оптической системы на основе кумулянтного критерия эффективности.

Преимущество использования аппарата кумулянтного анализа [9] вызвано тем, что кумулянты в отличие от моментов случайных величин имеют четко выраженный статистический смысл и могут быть заданы независимо друг от друга. Это приводит к тому, что различные статистические средние на выходе адаптивной оптической системы достаточно просто выражаются именно через кумулянты входных переменных. Следующее преимущество кумулянтов связано с тем, что учет их высших порядков позволяет достаточно просто описать любую степень негауссовости случайных величин. Именно по этой причине основную ценность кумулянтное описание приобретает для негауссовых переменных, которыми являются, например, пуассоновские случайные величины. Следует отметить, что конечному набору кумулянтов всегда соответствует некоторая вещественная функция, аппроксимирующая вероятностное распределение, в то время как несингулярной функции, все высшие моменты которой равнялись бы нулю, не существует. Это обстоятельство имеет особо важное значение при приближенном представлении вероятностных распределений тех случайных величин, для которых возможно отыскать лишь конечные наборы кумулянтов. Именно такой подход является целесообразным при исследовании преобразований пуассоновских случайных величин, описывающих процессы, протекающие в адаптивных оптических системах.

Кумулянтный критерий эффективности. Рассмотрим задачу анализа эффективности гибкого мембранного адаптивного зеркала в следующей постановке. Поверхность адаптивного зеркала может быть представлена как линейная комбинация функций отклика $S_i(r)$ [1]:

$$W(r) = \sum_{i=1}^{N} S_i(r) a_i, \qquad r \in \Omega,$$

где $W(r)$ — функция, описывающая требуемый профиль гибкого адаптивного зеркала; a_i — управляющее воздействие в i-м канале управления; Ω — плоскость апертуры адаптивной оптической системы.

Функции отклика мембранного зеркала удобно представить с достаточной для практических случаев точностью в виде [10]

$$S_i(r) = \exp(-a(r - r_i)^b), \tag{1}$$

где a и b — конструктивные параметры мембранного зеркала.

Конструктивные параметры a и b зависят от конструкции зеркала [10]. На них влияют также расстояние между приводами, материал и толщина мембраны, диаметр апертуры зеркала, а также конструктивные особенности закрепления мембраны по краям зеркала. Величину параметров a и b обычно определяют по результатам измерений вида функций отклика конкретного зеркала.

При функционировании адаптивной оптической системы независимо от алгоритма управления мембранным зеркалом в каналах управления присутствуют аддитивные шумы, которые в дальнейшем будем описывать системой случайных величин n_i. Следует отметить, что такой подход позволяет существенно упростить математические выкладки, а полученные результаты легко обобщить на стационарные случайные процессы. Положим, что известна система кумулянтов κ, описывающих систему пуассоновских случайных величин n_i. Для такого случая все совместные кумулянты κ_{ij} необходимо положить равными нулю, а все остальные кумулянты κ_i — равными λ, где λ — параметр пуассоновского распределения. Такая система кумулянтов описывает статистически независимые случайные величины. Таким образом, шумовая ошибка запишется в виде

$$\Delta W(r) = W(r) - W^*(r, n), \qquad r \in \Omega,$$

или

$$\Delta W(r) = \sum_{i=1}^{N} S_i(r) a_i - \sum_{i=1}^{N} S_i(r)(a_i + n_i) = \sum_{i=1}^{N} S_i(r) n_i.$$

Усреднив ошибку по апертуре адаптивной оптической системы, получим

$$\Delta W_s(r) = 1/s \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} S_i(r) n_i dr.$$

Очевидно, что $\Delta W_s(r)$ есть случайная величина. Во многих работах [1, 8] ранее априорно предполагалось, что математическое ожидание

$$M[(\Delta W_s(r))] = m_w = 0.$$

При этом рассматривался только второй центральный момент $M[(\Delta W_s(r) - m_w)^2]$ — дисперсия. Однако в реальных адаптивных оптических системах условие $m_w = 0$, как правило, не выполняется, а с учетом негауссовости случайных величин n_i остается открытым вопрос о размерах высших моментов случайной величины $\Delta W_s(r)$. В этом случае целесообразно рассмотреть критерий эффективности гибкого зеркала адаптивной оптической системы вида

$$\Theta_k = \left\langle \left(1/s \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} S_i(r) n_i dr \right)^k \right\rangle, \qquad k = 1, L, \tag{2}$$

где $\langle * \rangle$ — угловые скобки, обозначающие здесь и в дальнейшем усреднение по множеству реализаций.

По сути, элементы вектора Θ есть моменты высшего порядка случайной величины $\Delta W_s(r)$. В дальнейшем мы будем получать и анализировать выражения вида $\Theta_k = f(S_i(r) n_i, N, \kappa)$.

Для мембранного зеркала кумулянтный критерий вида (2) удобно представить в следующей форме:

$$\Theta_k = \left\langle \left(1/N \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} S_i(r_j) n_i \right)^k \right\rangle, \qquad k = 1, L, \tag{3}$$

где $S_i(r_j)$ — матрица отклика мембранного зеркала.

В выражении (3) непрерывный интеграл заменен на конечную сумму. Физический смысл получившейся при этом матрицы S с элементами s_{ij} состоит в следующем. При подаче на i-й привод мембранного зеркала единичного воздействия величина s_{ij} будет численно равна деформации мембраны в центрах j-х приводов. Элементы матрицы S могут быть вычислены в соответствии с формулой (1). Такой подход целесообразно использовать при разработке и проектировании мембранного зеркала. При анализе эффективности уже существующих зеркал можно воспользоваться результатами интерферометрических измерений функций отклика. Анализ выражения (1) свидетельствует о том, что при достаточно «качественном» мембранном зеркале матрица S будет преобразовываться в диагональную единичную матрицу.

Вывод основных соотношений. При $k = 1$ формула (3) будет иметь вид

$$\Theta_1 = \left\langle \left(1/N \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} S_i(r_j) n_i \right) \right\rangle = \alpha_1 / N \mathrm{sum}(S),$$

где α_1 — момент первого порядка случайной величины n_i; sum(*) — здесь и в дальнейшем оператор суммирования элементов матрицы.

При наличии в каналах управления адаптивной оптической системы пуассоновских шумов будем иметь: $\alpha_1 = \kappa_1 = \lambda$, где λ — параметр распределения Пуассона.

Для Θ_2 можно записать:

$$\Theta_2 = \left\langle \left(1/N \sum_{i=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} S_i(r_m) n_i * 1/N \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} S_j(r_n) n_j \right) \right\rangle.$$

В окончательном виде получим

$$\Theta_2 = 1/N^2 \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} S_{im} S_{jn} n_i n_j \right) \right\rangle. \tag{4}$$

В выражении (4) в соответствии со свойствами кумулянтов пуассоновских случайных величин при вычислении соответствующих сумм необходимо положить:

$$\langle n_i n_i \rangle = \alpha_2 = \lambda^2 + \lambda,$$

$$\langle n_i n_j \rangle = \alpha_{11} = \lambda^2.$$

С учетом того, что матрица S симметрична и имеет единичную диагональ, формулу (4) удобно представить в матричном виде. Если $\lambda^2 \gg \lambda$ при $\lambda > 1$, то это выражение запишется следующим образом:

$$\Theta_2 = 1/N(\lambda^2 + \lambda)\mathrm{sum}(SS^T),$$

где S^T — транспонированная матрица S.

Для Θ_3 будем иметь:

$$\Theta_3 = 1/N \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{M} \sum_{r=1}^{M} s_{im} s_{jn} s_{kr} n_i n_j n_k \right) \right\rangle.$$

В этой формуле с учетом свойств кумулянтов пуассоновских случайных величин при вычислении соответствующих сумм необходимо положить:

$$\langle n_i n_i n_i\rangle = \alpha_3 = \kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda,$$

$$\langle n_i n_i n_j\rangle = \alpha_{21} = \kappa_{21} + \kappa_{01}\kappa_{20} + 2\kappa_{01}\kappa_{11} + \kappa_{10}^2\kappa_{01} = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda,$$

$$\langle n_i n_j n_k\rangle = \alpha_{111} = \lambda^3.$$

В окончательном виде имеем

$$\Theta_3 = 1/N(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda)\mathrm{sum}(SS^TS). \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем при записи формулы для Θ будем руководствоваться следующими соображениями. В каждое слагаемое формулы (5) будет входить многочлен относительно λ. При этом λ в старшей степени имеет всегда единичный коэффициент [9].

Для Θ_4 запишем формулу

$$\Theta_4 = 1/N^4\left\langle\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{r=1}^{N}\sum_{t=1}^{N} s_{im}s_{jn}s_{kr}s_{lt}n_i n_j n_k n_m\right)\right\rangle. \tag{6}$$

Для пуассоновских случайных величин будут справедливы следующие формулы:

$$\langle n_i n_i n_i n_i\rangle = \alpha_4 = \lambda^4 + 10\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda,$$

$$\langle n_i n_i n_j n_j\rangle = \alpha_2^2 = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2,$$

$$\langle n_i n_j n_j n_j\rangle = \alpha_{31} = \lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2,$$

$$\langle n_i n_j n_k n_k\rangle = \alpha_{211} = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda,$$

$$\langle n_i n_j n_k n_l\rangle = \alpha_{1111} = \lambda^4.$$

Аналогично соотношению (5) формулу (6) можно записать в матричной форме:

$$\Theta_4 = 1/N(\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda)\mathrm{sum}(SS^TSS^T).$$

Очевидно, что в общем виде k-й элемент кумулянтного критерия запишется в виде:

$$\Theta_{2k} = 1/N\sum_{i=0}^{2k} a_i\lambda^{2k-i}\mathrm{sum}((SS^T)^k),$$

$$\Theta_{2k-1} = 1/N\sum_{i=0}^{2k-1} a_i\lambda^{2k-i-1}\mathrm{sum}((SS^T)^{k-1}S), \tag{7}$$

$$a_0 = 1, \qquad a_k = 0.$$

Плотность распределения шумовой ошибки для гипотетического мембранного зеркала. При конструировании гибких мембранных зеркал обычно стремятся так выбрать конструктивные параметры a и b, чтобы обеспечить минимум влияния каждого привода на соседние. В идеальном случае матрица отклика мембранного зеркала S будет стремиться к единичной. В таком случае

$$\mathrm{sum}(SS^T)^{0,5k} = N.$$

С учетом этого аппроксимируем значения элементов вектора Θ следующей зависимостью:

$$\Theta_k = \sum_{m=0}^{k} ((m+1)\lambda)^{k-m}. \tag{8}$$

Такая аппроксимация достаточно близка к (7), особенно при $\lambda \gg 1$. Характеристическая функция данного распределения запишется в виде [9]:

$$Q(iu) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k (iu)^k / k!. \tag{9}$$

Подставим (8) в формулу (9):

$$Q(iu) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} ((m+1)\lambda)^{k-m} (iu)^k / k!.$$

Преобразуем это выражение:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} ((m+1)\lambda)^{k-m} (iu)^k / k! = \sum_{m=0}^{k} ((m+1)\lambda)^{-m} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{\infty} ((m+1)\lambda)^{2k} (-1)^k (u)^{2k} / (2k)! + \right.$$

$$\left. + i \sum_{k=1}^{\infty} ((m+1)\lambda)^{2k-1} (-1)^k (u)^{2k-1} / (2k-1)! \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} (\exp(i(m+1)\lambda u) - 1) / (\lambda(m+1))^m + \exp(i\lambda u), \qquad k \to \infty. \tag{10}$$

Для нахождения ненормированной плотности распределения P^* необходимо произвести обратное преобразование Фурье характеристической функции $Q(iu)$:

$$P^*(x) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} Q(iu) \exp(ixu) dx. \tag{11}$$

Подставив (10) в (11), получим

$$P^*(x) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\exp(i\lambda u) + \sum_{m=1}^{\infty} (\exp(i(m+1)\lambda u) - 1) / (\lambda(m+1))^m \right) \times$$

$$\times \exp(ixu) dx = \delta(\lambda - x) + \sum_{m=1}^{n} (\delta((m+1)\lambda - x) - \delta(x)) / ((m+1)\lambda)^m,$$

$$n = \overline{1, \infty}.$$

Окончательно для плотности $P^*(x)$ получим

$$P^*(m) = 1/((m+1)\lambda)^m.$$

Θ_k	S_1	S_2	S_3
1	2,2	2,4	2
2	3,63	4,32	3
3	6,655	8,64	5
4	14,64	20,7	10

Для нахождения нормирующего множителя для оценки плотности $P^*(m)$ необходимо вычислить сумму ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} 1/((m+1)\lambda)^m = 1/m!\lambda^m = \exp(1/\lambda - 1).$$

Член этого ряда $(m+1)^m$ заменен на $m!$. При этом получается несколько завышенная сумма ряда. Однако для получения оценки плотности распределения при $\lambda >> 1$ такая аппроксимация оправдана. Формула для оценки плотности распределения с учетом нормировки запишется так:

$$P(m) = 1/((m+1)\lambda)^m \exp(1/\lambda - 1).$$

Полученная плотность распределения оказалась дискретной. Это обусловлено тем, что плотность распределения пуассоновских шумов, влияние которых рассмотрено в работе, также является дискретной.

П р и м е р. Использование кумулянтного критерия целесообразно рассмотреть на следующем примере.

Рассмотрим эффективность мембранных адаптивных зеркал, экспериментально исследованных в [10]. Функции отклика (1) зеркал равны:

$$S_{i1}(r_j) = \exp(-9{,}48(|r_j - r_i|)^{2,5}),$$

$$S_{i2}(r_j) = \exp(-3{,}62(|r_j - r_i|)^{1,5}).$$

В качестве «эталона» выберем зеркало с матрицей податливости S_3, эквивалентной единичной матрице. Результаты расчетов в соответствии с выражениями (7), (8) при $\lambda = 1$ приведены в таблице.

Заключение. Разработанный метод оценки эффективности гибкого адаптивного зеркала целесообразно использовать на этапе проектирования адаптивной оптической системы при обосновании выбора числа каналов управления. Если ставится задача получения точных значений элементов кумулянтного критерия, то в таком случае при вычислении сумм вида (7), (8) целесообразно использовать конкретные значения моментов высшего порядка, вычисленные с использованием системы кумулянтов соответствующих случайных величин, например пуассоновских. Следует особо подчеркнуть универсальность разработанного метода. Так, если вместо системы кумулянтов пуассоновского распределения задать систему кумулянтов другого вида, то уже не представляет труда получение соответствующих аналитических выражений для элементов вектора Θ при конкретном значении параметров распределения шумов в каналах управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И.** Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1988.
2. **Wang I. Y., Markey I. K.** Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion // JOSA. 1978. 68, N 1.

3. **Безуглов Д. А.** Метод сплайн-аппроксимации в задаче оптимизации числа пространственных мод адаптивной оптической системы фазового сопряжения // Оптика атмосферы. 1991. 4, № 12.
4. **Безуглов Д. А.** Исследование качества функционирования адаптивных оптических систем при наличии шумов в каналах управления // Оптика атмосферы. 1989. 2. № 8.
5. **Безуглов Д. А.** Метод статистической оценки функционирования адаптивных оптических систем апертурного зондирования // Известия РАН. Сер. физ. 1992. № 9.
6. **Безуглов Д. А.** Метод статистической оценки качества функционирования адаптивных оптических систем апертурного зондирования // XIV Междунар. конф. по когерентной и нелинейной оптике (КиНО-91): Тез. докл. Л., 1991.
7. **О'Мира Т.** Теория адаптивных оптических систем с многоканальной фазовой модуляцией, использующих деформируемые зеркала с зональным управлением // Адаптивная оптика /Под ред. Э. А. Витриченко. М.: Мир, 1980.
8. **Гальярди Р. М., Карп Ш.** Оптическая связь: Пер. с англ. /Под ред. А. Г. Шереметьева. М.: Связь, 1978.
9. **Малахов А. Н.** Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
10. **Пирсон Дж., Хансен С.** Экспериментальные исследования адаптивной оптической системы с деформируемым зеркалом // Адаптивная оптика /Под ред. Э. А. Витриченко. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 2 апреля 1995 г.

Реклама продукции в нашем журнале — залог Вашего успеха!