

УДК 519.219 : 519.237.5

О. А. Степанов

*(Санкт-Петербург)***ПОСТРОЕНИЕ КОМБИНИРОВАННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧИ КОРРЕЛЯЦИОННО-ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ  
В РАМКАХ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**

В рамках теории нелинейной фильтрации предлагается алгоритм решения задачи оценивания в корреляционно-экстремальных системах. Построение алгоритма основано на комбинированном использовании фильтра Калмана и нелинейного блока, периодически вырабатывающего для фильтра корректирующие измерения. Возможность их оптимальной обработки в фильтре Калмана обеспечивается за счет формирования в нелинейном блоке матрицы ковариаций, характеризующей точность корректирующих измерений.

**Введение.** В последнее время интенсивное развитие получили системы, в которых в том или ином виде предполагается решать задачи совмещения реализаций процессов и полей. В отечественной литературе эти системы получили наименование корреляционно-экстремальных систем (КЭС). Типичным представителем КЭС являются системы уточнения координат места объекта, основанные на сравнении измеренных и вычисленных с помощью карты значений геофизических полей, — корреляционно-экстремальные системы навигации (КЭСН). При разработке современных КЭС и КЭСН широкое применение получают алгоритмы, основанные на теории оптимальной нелинейной фильтрации [1—9]. В тех случаях, когда область априорной неопределенности для оцениваемых параметров такова, что допустима линеаризация задачи, использование теории нелинейной фильтрации, по сути, приводит к различным модификациям алгоритмов типа фильтра Калмана [1—3]. Применительно к корреляционно-экстремальным системам навигации такие алгоритмы получили наименование беспойсковых алгоритмов [1, 2]. Их основное достоинство заключается в том, что они могут использоваться в условиях, когда описание оцениваемых параметров осуществляется с помощью марковских моделей достаточно общего вида. Недостаток беспойсковых алгоритмов связан с небольшими размерами области априорной неопределенности, в которой сохраняется их работоспособность. Это является существенным ограничением на пути использования алгоритмов такого типа.

Исследование возможностей построения алгоритмов, обеспечивающих оптимальность оценок при любых начальных отклонениях в рамках теории нелинейной фильтрации, в настоящее время проведено достаточно подробно лишь для частного случая, при котором оцениваемые параметры предполагаются неизменными или описываются с помощью квазидетерминированных моделей [5, 8, 9]. Для таких моделей, в частности, разработаны и алгоритмы рекуррентно-поискового оценивания [1, 2]. Непосредственное применение этих алгоритмов, а также ряда других алгоритмов [10—14] при марковских моделях общего вида для оцениваемых параметров затруднительно. Вместе с тем в ряде случаев использование квазидетерминированных моделей оказывается неприемлемым.

Эффективный способ построения алгоритмов, обеспечивающих работу в условиях значительных начальных отклонений при достаточно сложном

описании оцениваемых параметров, основан на комбинированных схемах [1]. В таких схемах предполагается совместное использование фильтра Калмана и некоторого блока, учитывающего нелинейный характер задачи. К примеру, в работах [15—17] применительно к задаче проектирования КЭСН предлагается алгоритм, в котором вначале с помощью нелинейного блока, представляющего собой банк фильтров Калмана, настроенных на приближенное описание поведения ошибок, реализуется этап грубого уточнения координат. Затем при существенном снижении уровня априорной неопределенности осуществляется линеаризация координат, а затем вычисляются лишь отдельные составляющие, что существенно снижает эффективность такой схемы.

Более рациональный путь построения комбинированных алгоритмов основан на периодическом формировании в нелинейном блоке корректирующих измерений, используемых затем в фильтре Калмана [18, 19]. При построении таких схем обсуждается обычно лишь процедура получения оценок, предлагаемая, как правило, из эвристических соображений. Вопрос о выработке характеристик точности сформированных оценок в указанных работах практически не обсуждается. В то же время отсутствие адекватных характеристик точности, по сути, не позволяет оптимально обработать получаемые оценки в фильтре Калмана.

В связи с отмеченным представляется целесообразным исследовать возможность построения комбинированного алгоритма в рамках теории нелинейной фильтрации. Это позволит, как будет показано ниже, достаточно корректно решить проблему формирования самих корректирующих измерений и соответствующих им характеристик точности. Данному вопросу и посвящена настоящая работа. Для определенности рассмотрение проводится применительно к задаче проектирования алгоритмов для КЭСН.

**Постановка задачи.** Итак, предположим, что имеется информация о координатах объекта, задаваемая в некоторой системе координат, в виде

$$\bar{y}_t = y_t + \Delta x_t, \quad (1)$$

где  $y_t = (y(1), y(2))^T$ ,  $\bar{y}_t = (\bar{y}(1), \bar{y}(2))^T$  — истинные координаты объекта и координаты, вырабатываемые корректируемой навигационной системой (НС), показания которой требуется уточнить;  $\Delta x_t = (\Delta x_t(1), \Delta x_t(2))^T$  — вектор ошибок НС; нижний индекс указывает на зависимость от времени  $t$ .

Пусть, кроме того, осуществляются скалярные измерения поля в виде

$$Z_t = \psi(y_t) + \varepsilon_t + v_t, \quad (2)$$

где  $\psi(\cdot)$  — функция, определяющая правило вычисления значений поля с помощью данных, снимаемых с карты;  $\varepsilon_t$ ,  $v_t$  — низкочастотная и высокочастотная составляющие суммарных ошибок карты и измерителя поля.

Суть задачи заключается в уточнении показаний НС (1) по измерениям (2). Будем рассматривать задачу в дискретном времени. Подставляя выражение (1) в (2) и полагая, что поведение ошибок  $\Delta x_t$  описывается с помощью марковских последовательностей, рассматриваемую задачу можно свести к задаче оценивания компонент  $n$ -мерного вектора  $x_t$ , задаваемого уравнением

$$x_t = \Phi_t x_{t-1} + w_t \quad (3)$$

по измерениям

$$Z_t = \chi_t(x_t) + v_t, \quad (4)$$

в которых

$$\begin{aligned} \chi_i(x_i) &= \varphi_i(\Delta x_i) + \varepsilon_i, \\ \varepsilon_i &= B_i x_i, \quad \Delta x_i = D_i x_i, \end{aligned}$$

где  $\varphi_i(\Delta x_i) = \psi(\bar{y}_i - \Delta x_i)$ ;  $B_i, D_i$  — известные матрицы размерностью  $1 \times n$  и  $2 \times n$ , определяющие связь между векторами  $\varepsilon_i, \Delta x_i$  и  $x_i$ ;  $w_i, v_i$  — белозумные гауссовы последовательности, плотности распределения которых заданы в виде  $f(w_i) = N(v_i; 0, r_i)$ ,  $f(v_i) = N(w_i; 0, Q_i)$ . Здесь для плотности распределения гауссова вектора  $a$  с математическим ожиданием  $\bar{a}$  и матрицей ковариаций  $A$  используется обозначение  $f(a) = N(a; \bar{a}, A)$ .

Очевидно, что необходимость решения сформулированной задачи оценивания возникает при проектировании КЭС широкого класса.

Из теории оптимального оценивания известно, что оценка, минимизирующая величину ее среднеквадратической ошибки, и матрица ковариаций, характеризующая текущую точность оценивания, определяются в виде

$$\hat{x}_i = \int x_i f(x_i / \bar{Z}_1^i) dx_i, \quad (5)$$

$$P_i = \int (x_i - \hat{x}_i)(x_i - \hat{x}_i)^T f(x_i / \bar{Z}_1^i) dx_i^T, \quad (6)$$

где  $\bar{Z}_1^i = (Z_1 \dots Z_i)^T$ ,  $f(x_i / \bar{Z}_1^i)$  — апостериорная плотность, т. е. плотность, условная к набору измерений  $\bar{Z}_1^i$ . Здесь и далее интегралы понимаются в бесконечных пределах, а дифференциалы — как произведение дифференциалов их компонент.

В рамках рассматриваемой постановки задача проектирования алгоритмов сводится к разработке процедур вычисления интегралов (5), (6). Для получения экономичных процедур вычисления этих интегралов следует выбрать подходящее описание апостериорной плотности  $f(x_i / \bar{Z}_1^i)$ .

**Комбинированный алгоритм.** Получим описание апостериорной плотности, приводящее к комбинированной схеме при вычислении интегралов (5), (6). Заметим, что одна из отличительных особенностей рассматриваемой задачи заключается в том, что, как правило, интервал поступления измерений  $\Delta t$  существенно меньше интервала корреляции компонент вектора  $x_i$ . Это позволяет в пределах некоторого интервала  $\Delta T$  использовать следующее приближенное описание для вектора  $x_i$ :

$$x_i \approx x_\mu, \quad i \in (\mu + 1, \mu + 2, \dots, \mu + k, \dots, \mu + L), \quad L = \Delta T / \Delta t. \quad (7)$$

Для получения искомого описания апостериорной плотности рассмотрим сначала выражение для плотности  $f(x_i / \bar{Z}_1^i)$ ,  $i = \mu + L$ , которое может быть записано в виде [20]

$$f(x_i / \bar{Z}_1^i) = \frac{f(x_i / \bar{Z}_1^\mu) f(\bar{Z}_\mu^{\mu+L} / x_\mu)}{\int f(x_i / \bar{Z}_1^\mu) f(\bar{Z}_\mu^{\mu+L} / x_\mu) dx_\mu}. \quad (8)$$

Предположим, что для  $f(x_\mu / \bar{Z}_1^\mu)$  справедлива гауссова аппроксимация апостериорной плотности, т. е.

$$f(x_\mu / \bar{Z}_1^\mu) = N(x_\mu; \hat{x}_\mu, P_\mu). \quad (9)$$

Введем трехмерный вектор

$$X_\mu^* = (\Delta x_\mu^T, \varepsilon_\mu)^T = \begin{bmatrix} D_\mu \\ B_\mu \end{bmatrix} x_\mu \quad (10)$$

и с учетом приближения (7) представим выражение для  $f(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}/x_\mu)$ ,  $k \leq L$ , в виде

$$f(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}/x_\mu) = f(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}/X_\mu^*) \approx \exp \left[ -0,5 \sum_{p=1}^k \frac{(Z_{\mu+p} - \varphi_{\mu+p}(\Delta X_\mu) - \varepsilon_\mu)^2}{r_{\mu+p}} \right]. \quad (11)$$

Для описания плотности  $f(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}/X_\mu^*)$ , а следовательно, и  $f(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}/x_\mu)$  как функции  $X_\mu^*$  в области  $\Omega_0$  наиболее вероятных значений  $X_\mu^*$  используем аппроксимацию вида

$$f(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}/X_\mu^*) \approx C(\bar{Z}_\mu^{\mu+k})N(y_k; H_k X_\mu^*, R_k) \quad (12)$$

при

$$X_\mu^* \in \Omega_0, \quad (13)$$

где  $y_k = y_k(\bar{Z}_\mu^{\mu+k})$  — вектор размерностью  $m^* \leq 3$ , зависящий от  $\bar{Z}_\mu^{\mu+k}$ ;  $H_k$  —  $m^* \times 3$ -матрица;  $C(\bar{Z}_\mu^{\mu+k})$  — не зависящая от  $X_\mu^*$  константа.

Для нахождения этой аппроксимации необходимо отыскать такие  $y_k$ ,  $H_k$ ,  $R_k$ , которые обеспечивают приближенное равенство (12) при выполнении условия (13). Учет этого условия удобно произвести путем умножения левой и правой частей равенства (12) на весовую функцию  $f_0(X_\mu^*)$ , которая существенно отлична от нуля лишь в области  $\Omega_0$ . В качестве такой функции выберем априорную плотность

$$f_0(X_\mu^*) = N(X_\mu^*; 0, \tilde{P}_0), \quad (14)$$

у которой  $\tilde{P}_0$  определяется с учетом соотношения (10) и известной априорной матрицы ковариации вектора  $x_\mu$ . Проведя умножение, вместо (12), (13) можно записать

$$f_1^k(X_\mu^*) \approx f_2^k(X_\mu^*), \quad (15)$$

где

$$f_1^k(X_\mu^*) = C_1(\bar{Z}_\mu^{\mu+k})f_0(X_\mu^*)f(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}/X_\mu^*), \quad (16)$$

$$f_2^k(X_\mu^*) = C_2(\bar{Z}_\mu^{\mu+k})f_0(X_\mu^*)N(y_k; H_k X_\mu^*, R_k). \quad (17)$$

Константы  $C_1(\bar{Z}_\mu^{\mu+k})$ ,  $C_2(\bar{Z}_\mu^{\mu+k})$  выберем из условия нормировки

$$C_1(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}) = \int f_0(X_\mu^*)f(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}/X_\mu^*)dX_\mu^*, \quad (18)$$

$$C_2(\bar{Z}_\mu^{\mu+k}) = \int f_0(X_\mu^*)N(y_k; H_k X_\mu^*, R_k)dX_\mu^* \quad (19)$$

так, чтобы функции  $f_1^k(X_\mu^*)$  и  $f_2^k(X_\mu^*)$  можно было бы трактовать как плотности распределения  $X_\mu^*$ .

Будем считать приближение (15) выполненным, если первые два момента плотностей  $f_1^k(X_\mu^*)$  и  $f_2^k(X_\mu^*)$  совпадают, т. е.

$$\int X_\mu^* f_1^k(X_\mu^*)dX_\mu^* = \int X_\mu^* f_2^k(X_\mu^*)dX_\mu^*, \quad (20)$$

$$\int X_\mu^* (X_\mu^*)^T f_1^k(X_\mu^*)dX_\mu^* = \int X_\mu^* (X_\mu^*)^T f_2^k(X_\mu^*)dX_\mu^*. \quad (21)$$

Введем обозначения:

$$\tilde{X}_{\mu/\mu+k}^* = \int X_{\mu}^* f_1^k(X_{\mu}^*) dX_{\mu}^*, \quad (22)$$

$$\tilde{P}_{\mu/\mu+k} = \int (X_{\mu}^* - \hat{X}_{\mu/\mu+k}^*)(X_{\mu}^* - \hat{X}_{\mu/\mu+k}^*)^T f_1^k(X_{\mu}^*) dX_{\mu}^*, \quad (23)$$

$$f_2^k(X_{\mu}^*) = f^k(X_{\mu}^*/y_k). \quad (24)$$

Из вида функции (17) вытекает, что она является гауссовой плотностью, которая в силу равенств (20), (21) и обозначений (22)—(24) определяется как

$$f^k(X_{\mu}^*/y_k) = N(X_{\mu}^*; \tilde{X}_{\mu/\mu+k}^*, \tilde{P}_{\mu/\mu+k}). \quad (25)$$

Анализ соотношений (17), (14), (25) показывает, что отыскание параметров  $y_k$ ,  $H_k$ ,  $R_k$ , по сути, сводится к нахождению таких линейных измерений

$$y_k = H_k X_{\mu}^* + v_k^*, \quad M(v_k^* v_k^{*T}) = R_k > 0, \quad M(X_k^* v_k^{*T}) = 0, \quad (26)$$

использование которых преобразует априорную плотность (14) в апостериорную (25). Методы нахождения измерений (26) при заданных  $\tilde{X}_{\mu/\mu+k}^*$ ,  $\tilde{P}_{\mu/\mu+k}$ ,  $\tilde{P}_0$  и возможность решения этой задачи в общем случае обсуждаются в приложении. Для вычисления  $\tilde{X}_{\mu/\mu+k}^*$ ,  $\tilde{P}_{\mu/\mu+k}$  в соответствии с выражениями (22), (23) удобно использовать применяемый для случая квазидетерминированного описания ошибок НС алгоритм метода сеток [8, 9]. Получающиеся при этом соотношения также приведены в приложении.

Существенно, что вычисление  $\tilde{X}_{\mu/\mu+k}^*$ ,  $\tilde{P}_{\mu/\mu+k}$  следует выполнять для каждого  $k \leq L$ , а нахождение измерений (26) может быть проведено лишь для последнего  $k = L$ .

С учетом соотношений (10)—(12) можно записать

$$f(\bar{Z}_{\mu}^{\mu+L}/x_{\mu}) = C(\bar{Z}_{\mu}^{\mu+L})N(y_k; \tilde{H}_k x_{\mu}, R_k), \quad (27)$$

где  $\tilde{H}_L = H_L \begin{bmatrix} D_{\mu} \\ B_{\mu} \end{bmatrix}$  — матрица  $m^* \times n$ .

Принимая во внимание соотношения (8), (9), (27), замечаем, что плотность  $f(x_{\mu}/\bar{Z}_{\mu}^{\mu+L})$  будет гауссовой, а ее параметры легко вычисляются с помощью следующих соотношений [20]:

$$\hat{x}_{\mu/\mu+L} = \hat{x}_{\mu} + P_{\mu/\mu+L} H_L^T R_L^{-1} (y_L - H_L \hat{x}_{\mu}), \quad (28)$$

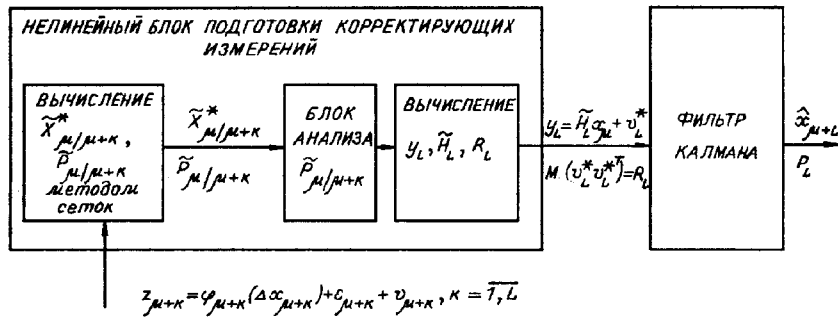
$$P_{\mu/\mu+L} = (P_{\mu}^{-1} + \tilde{H}_L^T R_L^{-1} \tilde{H}_L)^{-1}. \quad (29)$$

Располагая  $f(x_{\mu}/\bar{Z}_{\mu}^{\mu+L}) = N(x_{\mu}; \hat{x}_{\mu/\mu+L}, P_{\mu/\mu+L})$ , нетрудно, используя приближенные соотношения, найти параметры

$$\hat{x}_{\mu+L} \approx \Phi_{\mu+L/\mu} \hat{x}_{\mu/\mu+L}, \quad (30)$$

$$P_{\mu+L} \approx \Phi_{\mu+L/\mu} P_{\mu/\mu+L} \Phi_{\mu+L/\mu}^T + \Delta Q_L, \quad (31)$$

задающие гауссову аппроксимацию плотности  $f(x_{\mu+L}/\bar{Z}_{\mu}^{\mu+L})$ . Здесь  $\Delta Q_L$  — матрица, определяющая ковариационные свойства разности  $x_L - x_{\mu}$ , характеризующей изменчивость  $x_{\mu+k}$  на интервале  $\Delta t$  за счет наличия порождающих шумов.



Блок-схема комбинированного алгоритма оценивания

Анализ полученных соотношений показывает, что предлагаемый алгоритм, собственно, и представляет собой комбинацию двух блоков, взаимодействие которых поясняется на рисунке. В одном из этих блоков с учетом нелинейного характера задачи в предположении справедливости описания (7) на интервале времени  $\Delta T$  обрабатывается накапливаемая в течение  $\Delta T$  группа измерений. При этом на каждом шаге в соответствии с выражениями (22), (23) и алгоритмом метода сеток (соотношения (5Б)—(10Б) приложения) вычисляются  $\tilde{X}_{\mu/\mu+L}^*$ ,  $\tilde{P}_{\mu/\mu+L}$ , а в конце интервала в соответствии с процедурой, также описанной в приложении, отыскиваются параметры корректирующих измерений (26). В другом блоке с учетом общего характера поведения  $x_i$  и результатов обработки группы измерений в некоторый момент времени  $(\mu + L)\Delta t$  в соответствии с соотношениями (28)—(31) вычисляются оценки и матрицы ковариаций их ошибок для всего набора измерений  $\tilde{Z}_1^{\mu+L}$ . Нетрудно заметить, что вычисления, осуществляемые в этом блоке, соответствуют стандартной процедуре линейного фильтра Калмана, на вход которого из первого блока периодически поступают корректирующие измерения типа (26) размерностью  $m^* \leq 3$  и соответствующая им матрица ковариации  $R_L$ .

Некоторые особенности комбинированной процедуры. Обратим внимание, что корректирующие измерения (26) необязательно должны формироваться с использованием измерений поля, накапливаемых в течение всего интервала  $\Delta T$ , для которого допустимо приближенное описание (7). Вопрос о выборе момента формирования  $y_L$  может решаться на основе оперативного анализа матрицы  $\tilde{P}_{\mu/\mu+k}$ . В частности, при принятии этого решения разумно сопоставлять величины, характеризующие изменчивость ошибок НС на интервале  $k\Delta t < \Delta T$ , с параметрами полуосей эллипса ошибок  $a, b$ , соответствующих  $2 \times 2$ -подматрице ковариаций в матрице  $\tilde{P}_{\mu/\mu+k}$ . Решение о формировании измерений может приниматься, например, в случае, если величина малой полуоси эллипса становится соизмеримой с величиной, характеризующей изменчивость ошибок  $\Delta x_\mu$  на данном интервале. Таким образом, можно подбирать интервал  $\Delta T$  согласованно со свойствами используемых в текущий момент времени участков поля.

Важно подчеркнуть, что возможность формирования измерений типа (26) в значительной степени обеспечивается тем, что в нелинейном блоке с помощью метода сеток, наряду с оценкой  $\tilde{X}_{\mu/\mu+L}^*$ , вычисляется еще и матрица ковариаций  $\tilde{P}_{\mu/\mu+L}$ . Располагая этой матрицей, удастся сформировать матрицу  $R_L$ , которая характеризует точность оценивания компонент вектора состояний по текущему набору измерений. Наличие матрицы  $R_L$ , в сущности, и обеспечивает возможность оптимальной обработки результатов, получаемых на различных интервалах времени  $\Delta T$  в фильтре Калмана.

Существенно, что размерность  $u_L$  может изменяться от единицы до трех. В случае, если с использованием  $\bar{Z}_\mu^{\mu+L}$  удастся оценить все компоненты вектора  $X_\mu^*$ , размерность  $u_L$  равна трем. Если, опираясь на  $\bar{Z}_\mu^{\mu+L}$ , можно уточнить только две или одну комбинации компонент вектора  $X_\mu^*$ , размерность  $u_L$  соответственно снижается до двух или единицы. Возможность формирования измерений  $Y_L$  размерностью  $m^* \leq 3$  обеспечивает эффективное использование участков поля, на которых в пределах интервала  $\Delta T$ , допускающего приближенное описание (7), удастся оценить лишь отдельные составляющие координат  $\Delta x_\mu(1)$ ,  $\Delta x_\mu(2)$  или ошибку  $\epsilon_\mu$ , либо их комбинации. К таким участкам, в частности, относятся районы типа склонов и плато.

Заметим также, что в предложенном алгоритме не используется свойственная беспойсковым алгоритмам процедура линеаризации. Параметры линейных измерений типа (26) формируются в результате обработки группы измерений  $\bar{Z}_\mu^{\mu+L}$  с учетом нелинейного характера задачи.

Очевидно, что рассмотренный алгоритм может быть эффективно использован не только в КЭС со скалярными измерениями, но и в системах, в которых предполагается векторный характер измерений, например, в КЭСН, где информация о поле поступает в виде кадра [9], а также при определении параметров движения фрагмента телевизионного изображения [16]. В этом случае нет необходимости накапливать измерения в течение всего интервала  $\Delta T$ , а целесообразно формировать  $u_L$  для каждого кадра. Применение предложенного алгоритма при определении параметров движения фрагмента телевизионного изображения [16] позволит эффективно использовать кадры изображений, обеспечивающие уточнение лишь отдельных составляющих координат.

Заметим, что эффективность предложенной схемы применительно к КЭСН была подтверждена как путем моделирования на ЭВМ, так и с использованием реальных данных.

**Заключение.** В рамках теории оптимальной нелинейной фильтрации предложен комбинированный алгоритм решения задачи оценивания для КЭС, основанный на взаимодействии фильтра Калмана, учитывающего изменчивый характер оцениваемых параметров, и нелинейного блока, периодически вырабатывающего для фильтра корректирующие измерения и соответствующие им матрицы ковариаций. Такой алгоритм весьма удобен в плане практической реализации, поскольку изменчивость оцениваемых параметров достаточно просто учитывается в фильтре Калмана, а при разработке нелинейного блока может быть использован опыт создания алгоритмов для квазидетерминированных моделей ошибок, в частности, алгоритмов типа метода сеток.

Выявлено основное достоинство предложенного алгоритма, связанное с выработкой в нелинейном блоке матрицы ковариаций, характеризующей эффективность оценивания компонент вектора состояния с использованием группы измерений, накапливаемой в пределах ограниченного интервала времени  $\Delta T$ . Наличие текущей характеристики точности обеспечивает возможность оптимальной обработки в фильтре Калмана результатов, получаемых на отдельных интервалах  $\Delta T$ , величина которых может подбираться оперативно в ходе решения задачи на основе анализа уточняемости компонент вектора состояния.

Применение предложенного алгоритма рассмотрено для решения задачи уточнения координат объекта по данным о геофизических полях в условиях, когда ошибки корректируемой навигационной системы описываются с помощью марковских моделей общего вида. Показано, что в этом случае, кроме всего прочего, удастся, не прибегая к процедуре линеаризации, свойственной беспойсковым алгоритмам, эффективно использовать для навигации участки поля, на которых могут уточняться лишь отдельные составляющие координат или их комбинации.

Отмечена возможность применения предложенного алгоритма в КЭС, для которых характерно многократное поступление информации о поле в виде кадра, в частности в системах совмещения изображений.

А. *Определение параметров корректирующих измерений.* Пусть задано априорное распределение трехмерного вектора (индексы и \* в обозначениях опускаем):

$$f(X) = N(X; 0, \tilde{P}_0), \quad \tilde{P}_0 > 0. \quad (1A)$$

Необходимо найти линейное измерение размерностью  $m^* \leq 3$  вида

$$y = HX + v, \quad M(v v^T) = R > 0; \quad M(X v^T) = 0, \quad (2A)$$

использование которого при оценивании  $X$  преобразует априорную плотность (1A) в апостериорную  $f(X/y) = N(X; \tilde{X}, \tilde{P}), \tilde{P} > 0$ .

Из теории оценивания [20] и заданной формулировки задачи следует, что, по сути, необходимо найти такие  $y, H$  и  $R$ , которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\tilde{X} = \tilde{P} H^T R^{-1} y, \quad (3A)$$

$$\tilde{P} = (\tilde{P}_0^{-1} + P_M^{-1})^{-1}, \quad P_M^{-1} = H^T R^{-1} H. \quad (4A)$$

1. Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, при которой  $|P_M^{-1}| \neq 0$ . В этом случае очевидно, что существует множество решений указанной задачи. Одно из них тривиально и определяется следующими соотношениями:

$$H = E, \quad R = P_M, \quad y = P_M \tilde{P}^{-1} \tilde{X}. \quad (5A)$$

2. Предположим теперь, что  $|P_M^{-1}| = 0$ . Перейдем с использованием нормирующей матрицы к безразмерному вектору состояния и сохраним для удобства за новым вектором старое обозначение. Найдем ортогональную матрицу такую, что

$$S P_M^{-1} S^T = \tilde{\Lambda}_M^{-1}, \quad (6A)$$

где  $\tilde{\Lambda}_M^{-1}$  — диагональная матрица, элементы которой на диагонали расположены в порядке убывания. В силу того, что при  $|P_M^{-1}| = 0$  у матрицы  $P_M^{-1}$  может быть одно или два нулевых собственных числа, матрицу  $\tilde{\Lambda}_M^{-1}$  запишем в виде

$$\tilde{\Lambda}_M^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7A)$$

где  $\Lambda_M^{-1}$  — скаляр или  $2 \times 2$ -диагональная матрица.

Представим  $S$  в виде

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix},$$

где  $S_1, S_2$  — матрицы размерностью  $1 \times 2, 2 \times 3$  ( $\Lambda_M^{-1}$  — скаляр) либо  $2 \times 3$  и  $1 \times 3$  ( $\Lambda_M^{-1}$  — матрица  $2 \times 2$ ).

Запишем следующее очевидное равенство:

$$P_M^{-1} = S^T \tilde{\Lambda}_M^{-1} S = (S_1^T S_2^T) \begin{bmatrix} \Lambda_M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = S_1^T \Lambda_M^{-1} S_1. \quad (8A)$$



Из последнего соотношения вытекает, что измерение

$$y = S_1 X + v, \quad M(v v^T) = \Lambda_M, \quad M(X v^T) = 0 \quad (9A)$$

обеспечивает выполнение равенства (4A). Уравнение (3A) в этом случае записывается так:

$$\tilde{X} = \tilde{P} S_1^T \Lambda_M^{-1} y. \quad (10A)$$

Если (10A) справедливо, то из него с очевидностью следует, что

$$y = \Lambda_M S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{X}. \quad (11A)$$

Таким образом, если заведомо известно о существовании решения (10A) (такая ситуация, например, складывается при использовании участков поля типа склона или плато), то для определения численного значения измерения (9A) следует опираться на соотношение (11A). В общем случае для того, чтобы решение (10A) при  $|P_M^{-1}| = 0$  существовало, необходимо потребовать выполнения дополнительного условия.

Покажем, что это решение существует тогда и только тогда, когда

$$S_2 \tilde{P}^{-1} \tilde{X} = 0. \quad (12A)$$

Действительно, пусть решение существует, т. е. для заданного  $\tilde{X}$  может быть найден  $y$ , удовлетворяющий соотношению (11A). Тогда  $\tilde{P}^{-1} \tilde{X} = S_1^T \Lambda_M^{-1} y$  и справедливость (12A) следует из соотношения  $S_2 S_1^T = 0$ , которое, в свою очередь, вытекает из свойства ортогональной матрицы  $SS^T = E$ .

Пусть теперь (12A) выполнено. В этом случае (11A) является решением (10A), так как

$$\tilde{X} = \tilde{P} S_1^T \Lambda_M^{-1} \Lambda_M S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{X} = \tilde{P} (S_1^T S_1 + S_2^T S_2) \tilde{P}^{-1} \tilde{X} = \tilde{X}.$$

Последнее равенство справедливо в силу (12A) и соотношения

$$S^T S = S_1^T S_1 + S_2^T S_2 = E.$$

Если условие (12A) не выполнено, то точного решения (10A) не существует. В этом случае возможны различные варианты нахождения приближенных решений уравнений (3A), (4A), в частности, варианты, при которых равенство (3A) выполняется строго, а уравнение (4A) — приближенно и наоборот. Для рассматриваемых приложений наиболее разумным представляется отыскание решения, обеспечивающего строгое выполнение уравнения (4A), т. е. использование корректирующих измерений вида (9A). Численное же значение  $y$  следует выбрать так, чтобы соотношение (10A) выполнялось приближенно. Для отыскания такого приближенного решения перепишем (10A) в виде

$$\tilde{P}^{-1} \tilde{X} = S_1^T \Lambda_M^{-1} y. \quad (13A)$$

Переведем этот вектор с помощью матрицы  $S$  в новую систему координат, затем обнулیم его компоненты, связанные с подматрицей  $S_2$ . Полученный таким образом вектор вновь переведем в исходную систему координат. С учетом (13A) сформируем искомый вектор в виде

$$\tilde{X}^* = \tilde{P} S_1^T S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{X}, \quad (14A)$$

который и следует принять вместо  $\tilde{X}$ .

Поскольку вектор  $\tilde{X}^*$  удовлетворяет условию (12А), то очевидно, что решение

$$\tilde{X}^* = \tilde{P}S_1^T \Lambda_M^{-1} y \quad (15A)$$

при  $\tilde{X}^* = \tilde{P}S_1^T S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{X}$  существует.

Действительно, выбирая

$$y = \Lambda_M S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{X}^* \quad (16A)$$

и подставляя его в (15А), с учетом (14А) получаем

$$\tilde{P}S_1^T \Lambda_M^{-1} \Lambda_M S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{X}^* = \tilde{P}S_1^T S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{X} = \tilde{X}^*.$$

Таким образом, при нахождении приближенного решения в качестве  $y$  с учетом (14А), (16А) следует принять

$$y = \Lambda_M S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{P}S_1^T S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{X} = \Lambda_M S_1 \tilde{P}^{-1} \tilde{X}.$$

Замечаем, что это выражение совпадает с соотношением (11А). Отсюда следует, что при нахождении точного и приближенного решений в качестве  $y$  используются одинаковые выражения.

Б. *Вычисление оценок и матриц ковариаций на основе метода сеток.* В целях упрощения используем следующие обозначения:

$$\bar{Z}_\mu^{\mu+k} = \bar{Z}_k, X_\mu^* = (\Delta x_\mu^T, \varepsilon_\mu)^T = (\Delta x^T, \varepsilon)^T,$$

$$\tilde{X}_{\mu/\mu+k}^* = \tilde{X}_k = (\tilde{\Delta x}_k^T, \tilde{\varepsilon}_k)^T, \quad \tilde{P}_{\mu/\mu+k} = \tilde{P}_k = \begin{bmatrix} F_k & \rho_k \\ \rho_k^T & q_k \end{bmatrix},$$

где  $2 \times 2$ -матрица  $F_k$ , столбец  $\rho_k = (\rho_{k1}, \rho_{k2})^T$  и скаляр  $q_k$  характеризуют апостериорную точность оценивания  $\Delta x$  и  $\varepsilon$  по набору  $\bar{Z}_k$ . Для вычисления оценок  $\tilde{\Delta x}_k, \tilde{\varepsilon}_k$  и матрицы ковариаций  $\tilde{P}_k$  в соответствии с выражениями (22), (23) удобно использовать представление для плотности  $f_1^k(X_\mu^*)$  в виде

$$f_1^k(X_\mu^*) = f(\Delta x / \bar{Z}_k) f(\varepsilon / \Delta x, \bar{Z}_k), \quad k = \overline{0, L}, \quad (1B)$$

где  $f(\varepsilon / \Delta x, \bar{Z}_k)$  — условная плотность  $\varepsilon$  при фиксированных  $\Delta x$  и  $\bar{Z}_k$ ;  $f_1^0(X_\mu^*) = N(X_\mu; 0, \tilde{P}_0)$ . В целях упрощения примем

$$F_0 = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}, \quad \rho_k = 0.$$

Для плотности  $f(\Delta x / \bar{Z}_k)$  в области  $\omega$  наиболее вероятных значений  $\omega = (\Delta x: \Delta x(1) \leq 3\sigma, \Delta x(2) \leq 3\sigma)$  используем приближенное описание

$$f(\Delta x / \bar{Z}_k) = \sum_{v=-m}^m \sum_{j=-m}^m \alpha^{jv} \delta(\Delta x(1) - \Delta x(1)^j) \delta(\Delta x(2) - \Delta x(2)^v), \quad (2B)$$

где  $\Delta x(1)^j = j\Delta$ ,  $\Delta x(1)^v = v\Delta$ ,  $j = \overline{-m, m}$ ,  $v = \overline{-m, m}$ ;  $\Delta$  — шаг сетки, определяющий точность аппроксимации (2Б);  $\delta(\cdot)$  — дельта-функции. Веса  $\alpha^{jv}$  в соот-

ношении (2Б) пропорциональны значениям  $f(\Delta x/\bar{Z}_k)$  в точках  $\Delta x^{j\nu} = (\Delta x(1)^j, \Delta x(1)^\nu)^T$  и удовлетворяют условиям нормировки. Для их определения плотность  $f(\Delta x/\bar{Z}_k)$  запишем в виде

$$f(\Delta x/\bar{Z}_k) = f(\Delta x)f(\bar{Z}_k/\Delta x).$$

Учитывая справедливость представления

$$f(\bar{Z}_k/\Delta x) = f(Z_k/\Delta x, \bar{Z}_{k-1})f(Z_{k-1}/\Delta x, \bar{Z}_{k-2}) \dots f(Z_1/\Delta x)$$

и тот факт, что  $\varepsilon$  входит в уравнения для измерений (4) линейно для  $f(\bar{Z}_k/\Delta x)$ , можно получить выражение

$$f(\bar{Z}_k/\Delta x) = c \exp \left[ -0,5 \sum_{p=1}^k \frac{(Z_p - \varphi_p(\Delta x) - \hat{\varepsilon}_{p-1}(\Delta x))^2}{r_p + q_{p-1}^*} \right]. \quad (3Б)$$

Здесь  $c$  — константа, не зависящая от  $\Delta x$ ;  $\hat{\varepsilon}_{p-1}(\Delta x)$  и  $q_{p-1}^*$ ,  $p = \bar{1}, k$ , — параметры плотности

$$f(\varepsilon/\Delta x, \bar{Z}_{p-1}) = N(\varepsilon; \hat{\varepsilon}_{p-1}(\Delta x), q_{p-1}^*), \quad (4Б)$$

имеющей гауссов вид в силу линейной зависимости измерений (4) от  $\varepsilon$ . Эти параметры при  $p > 1$  определяются с помощью соотношений

$$q_{p-1}^* = (q_{p-2}^* r_{p-1}) / (r_{p-1} + q_{p-2}^*),$$

$$\hat{\varepsilon}_{p-1}(\Delta x) = \hat{\varepsilon}_{p-2}(\Delta x) + q_{p-1}^* [z_{p-1} - \varphi_{p-1}(\Delta x) - \hat{\varepsilon}_{p-2}(\Delta x)] / r_{p-1}.$$

При  $p = 1$   $q_{p-1}^* = q_0$ ,  $\hat{\varepsilon}_{p-1}(\Delta x) = 0$ .

Таким образом, для весов  $\alpha^{j\nu}$  могут быть использованы выражения

$$\alpha^{j\nu} = \tilde{\alpha}^{j\nu} / \sum_{\nu=-m}^m \sum_{j=-m}^m \tilde{\alpha}^{j\nu},$$

$$\tilde{\alpha}^{j\nu} = f(\Delta x = \Delta x^{j\nu}) f(\bar{Z}_k/\Delta x = \Delta x^{j\nu}),$$

в которых  $f(\Delta x) = N(\Delta x; 0, F_0)$ , а  $f(\bar{Z}_k/\Delta x)$  определяется соотношением (3Б).

Принимая во внимание выражения (1Б), (2Б), (4Б), нетрудно показать, что искомые оценки  $\tilde{\Delta x}_k$ ,  $\tilde{\varepsilon}_k$  и элементы матрицы  $\tilde{P}_k$  могут быть вычислены с помощью следующих соотношений:

$$\tilde{\Delta x}_k \approx \sum_{\nu=-m}^m \sum_{j=-m}^m \alpha^{j\nu} \Delta x^{j\nu}, \quad (5Б)$$

$$F_k \approx \sum_{\nu=-m}^m \sum_{j=-m}^m \alpha^{j\nu} \Delta x^{j\nu} (\Delta x^{j\nu})^T - \tilde{\Delta x}_k (\tilde{\Delta x}_k)^T, \quad (6Б)$$

$$\tilde{\varepsilon}_k \approx \sum_{\nu=-m}^m \sum_{j=-m}^m \alpha^{j\nu} \hat{\varepsilon}_k(\Delta x^{j\nu}), \quad (7Б)$$

$$q_k \approx \sum_{\nu=-m}^m \sum_{j=-m}^m \alpha^{j\nu} \hat{\varepsilon}_k^2(\Delta x^{j\nu}) + q_k^* - \tilde{\varepsilon}_k^2, \quad (8Б)$$

$$\rho_{k1} \approx \sum_{v=-m}^m \sum_{j=-m}^m \alpha^{jv} \widehat{\varepsilon}_k(\Delta x^{jv}) \Delta x^{jv} \quad (1), \quad (9Б)$$

$$\rho_{k2} \approx \sum_{v=-m}^m \sum_{j=-m}^m \alpha^{jv} \widehat{\varepsilon}_k(\Delta x^{jv}) \Delta x^{jv} \quad (2). \quad (10Б)$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоглазов И. Н., Джанджгава Г. И., Чигин Г. П. Основы навигации по геофизическим полям. М.: Наука, 1985.
2. Красовский А. А., Белоглазов И. Н., Чигин Г. П. Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем. М.: Наука, 1979.
3. D'Appolito J. A., Griffiths B. E., Nealy R. D. Gravity navigation performance analysis using the optimal linear correlation technique // IEEE. PLAN'S-80. P. 101.
4. Henly A. J. Terrain aided navigation current status technique, for flat terrain and reference data requirements // IEEE. PLAN'S-90. P. 608.
5. Hollowell J. HELI/SITAN. A terrain referenced navigation algorithm for helicopters // Ibid. P. 616.
6. Priestly N. Terrain reference navigation // Ibid. P. 482.
7. Дмитриев С. П. Высокоточная морская навигация. Л.: Судостроение, 1990.
8. Дмитриев С. П., Степанов О. А. Методы приближенного решения задач синтеза корреляционно-экстремальных систем // Корреляционно-экстремальные системы управления. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1982.
9. Степанов О. А. Оптимальное решение задачи уточнения координат объекта в корреляционно-экстремальных системах навигации при использовании информации о поле в виде кадра // Автометрия. 1994. № 2.
10. Брандин В. К. Анализ критериальных функций, используемых в корреляционно-экстремальных системах навигации, на помехоустойчивость // Автометрия. 1990. № 5.
11. Буймов А. Г. Предельная точность экстремального совмещения изображений // Корреляционно-экстремальные системы обработки информации и управления. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1977.
12. Губанов А. В., Ефимов В. М., Киричук В. С. и др. Методы оценивания взаимного смещения фрагментов цифровых изображений // Автометрия. 1988. № 3.
13. Панкова Т. Л., Резник А. Л. Эффективность алгоритмов прецизионного совмещения цифровых изображений // Автометрия. 1991. № 5.
14. Киричук В. С. Метод максимального правдоподобия в задаче определения координат фрагмента // Автометрия. 1983. № 6.
15. Hostetler L. D., Andreas R. D. Nonlinear Kalman filtering technique for terrain-aided navigation // IEEE. 1983. AC-28, N 3. P. 315.
16. Mealy G. L., Tang W. Application of multiple model estimation to a recursive terrain height correlation system // IEEE. Trans. Automat. Contr. 1983. AC-28, N 3. P. 323.
17. Drayton D., Boozer J. R., Fellerhaff S. R. Terrain aided navigation test results in the AFIT/F-16 aircraft // Navigation of Institute. 1988. 35, N 2.
18. Силаев А. И., Стефанов В. Л., Чигин Г. П. Комбинированный алгоритм оценивания в КЭНС // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 6.
19. Филатов В. Н. Поисково-рекуррентный алгоритм измерения параметров движения фрагмента телевизионного изображения // Автометрия. 1991. № 3.
20. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 21 февраля 1994 г.