РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

УДК 525.7

С. В. Соколов

(Ростов-на-Дону)

ОБ ОЦЕНКЕ ОШИБКИ НЕЛИНЕЙНОГО ГАУССОВА ФИЛЬТРА С ВОЗМУЩЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрена и решена задача среднеквадратического оценивания ошибки фильтрации, возникающей при возмущении параметров нелинейного гауссова фильтра и за счет погрешности аппроксимации апостериорной плотности вероятности при расчете фильтра.

Постановка задачи. В предположении точно определенных коэффициентов стохастических уравнений оцениваемого процесса Y_t и его наблюдателя Z_t [1] получены различные алгоритмы субоптимальной фильтрации, использующие идею аппроксимации решения интегродифференциального уравнения в частных производных для апостериорной плотности вероятности (АПВ). Для реальных систем подобное предположение может выполняться лишь приближенно, так как, наряду с ошибкой оценивания за счет аппроксимации АПВ, в реальных условиях возникают ошибки, порожденные возмущениями параметров фильтра. Ранее в [2] была рассмотрена и решена задача фильтрации параметрических возмущений для оптимального гауссова фильтра, уравнения которого относительно оценки процесса $\hat{Y}_t$ линейны. Особенностью решения задачи фильтрации возмущений субоптимального оценивания является, во-первых, нелинейность уравнений субоптимального фильтра относительно оценки $\hat{Y}_t$, а во-вторых, необходимость дополнительного оценивания ошибки, возникающей в результате аппроксимации АПВ плотностью a priori известного вида.

Наибольшее распространение получила в настоящее время гауссова аппроксимация АПВ, приводящая к субоптимальным фильтрам различной сложности.

В данной работе возможность решения проблемы оценки ошибки нелинейного субоптимального гауссова фильтра при возмущении его параметров рассматривается для фильтра наиболее общего вида [1. С. 465]. При этом решаемая задача формулируется как задача текущего оценивания ошибки, возникающей на выходе фильтра за счет погрешностей аппроксимации АПВ и возмущений параметров фильтра. Упомянутая ошибка далее трактуется аналогично [2] как первая вариация погрешности неоптимального оценивания процесса Y_t.

Вывод стохастического уравнения для возмущенной оценки. Пусть N-мерный вектор состояния $\mathbf{Y}_t$ и M-мерный вектор наблюдения $\mathbf{Z}_t$ процесса $\mathbf{Y}_t$ описываются системой нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито:

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{F}_0(\mathbf{Y}, t)dt + F_1(\mathbf{Y}, t)d\mathbf{W}_t, \qquad (1)$$

$$d\mathbf{Z} = \mathbf{f}_0(\mathbf{Y}, t)dt + f_1(t)d\mathbf{V}_t, \qquad (2)$$

где $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{f}_0$, F_1, f_1 — известные нелинейные векторы и матрицы-функции соответственно, удовлетворяющие $\forall\, \mathbf{Y} \in [-\infty, \infty]$ — условию Липшица [3]; $\mathbf{W}_t$, $\mathbf{V}_t$ — взаимно независимые стандартные винеровские процессы соответствующей размерности.

Как известно [3], решение уравнения (1), записанного в эквивалентной форме:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_0(\mathbf{Y}, s)ds + \int_{t_0}^{t} F_1(\mathbf{Y}, s)d\mathbf{W}_s,$$

$$\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0,$$

может быть получено с помощью стохастического аналога метода последовательных приближений, приводящего к итеративной процедуре вида

$$\mathbf{Y}_i(t) = \mathbf{Y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}_0(\mathbf{Y}_{i-1}, s)ds + \int_{t_0}^{t} F_1(\mathbf{Y}_{i-1}, s)d\mathbf{W}_s,$$

$$\mathbf{Y}_0(t) = \mathbf{Y}_0,$$

где $\mathbf{Y}_i(t)$ — i-е приближение к искомому решению $\mathbf{Y}(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, или, возвращаясь к эквивалентной дифференциальной форме (1):

$$\begin{gathered} d\mathbf{Y}_i = \mathbf{F}_0(\mathbf{Y}_{i-1}, t)dt + F_1(\mathbf{Y}_{i-1}, t)d\mathbf{W}_t, \\ \mathbf{Y}_i(t_0) = \mathbf{Y}_0(t) = \mathbf{Y}_0. \end{gathered} \tag{3}$$

Рассмотренная итеративная процедура является сходящейся к решению (1) при $i \to \infty$ почти наверное [P—ПН] [3]. На траекториях $\mathbf{Y}_i(t)$ могут быть построены соответствующие приближения к процессу наблюдения

$$d\mathbf{Z}_i(t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{Y}_i, t)dt + f_1(t)d\mathbf{V}_t, \tag{4}$$

также сходящиеся [P—ПН] к процессу $\mathbf{Z}_t$ в силу оговоренных выше условий и сходимости $\mathbf{Y}_i(t)$ к $\mathbf{Y}(t)$. Если представить в (4) функцию $\mathbf{f}_0(\mathbf{Y}_i, t)$ с помощью разложения в окрестности $(i-1)$-го приближения $\mathbf{Y}_{i-1}(t)$ и ограничиться членами до второго порядка малости, то аппроксимация i-го приближения к $\mathbf{Z}_t$ примет вид:

$$d\mathbf{Z}_i(t) = \left\{\mathbf{f}_0(\mathbf{Y}_{i-1}, t) + \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i-1}, t)[\mathbf{Y}_i(t) - \mathbf{Y}_{i-1}(t)]\right\}dt + f_1(t)d\mathbf{V}_t. \tag{5}$$

Очевидно, что при $i \to \infty$ правая часть (5) в силу $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{Y}_i(t) = \mathbf{Y}(t)$ сходится [P—ПН] к (2) аналогично (4). Аппроксимируя также подобным образом функцию $\mathbf{F}_0$ в (1), рассмотрим далее систему i-х приближений, образованную полученными таким образом уравнениями для $\mathbf{Y}_i$ и $\mathbf{Z}_i$, сходящихся, как установлено выше, [P—ПН] к системе (1), (2). При фиксированном (условно заданном) $(i-1)$-м приближении $\mathbf{Y}_{i-1}(t)$ данная система является линейной по $\mathbf{Y}_i(t)$.

Следовательно, для условного стохастического процесса $\{\mathbf{Y}_i/\mathbf{Y}_{i-1}\}$ оптимальная в среднеквадратическом оценка является калмановской:

$$d\widehat{\mathbf{Y}}_{i\,\text{опт}} = \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i-1}, t)\widehat{\mathbf{Y}}_i dt + \psi_1(\mathbf{Y}_{i-1}, t)dt +$$

$$+ K(\mathbf{Y}_{i-1}, t)\left\{d\mathbf{Z}_t - [\psi(\mathbf{Y}_{i-1}, t) + \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i-1}, t)\widehat{\mathbf{Y}}_i]dt\right\},$$

$$
\begin{gathered}
\widehat{\mathbf{Y}}_{i\text{опт}}(t_0) = \widehat{\mathbf{Y}}_0 = M(\mathbf{Y}_0), \\
K(\mathbf{Y}_{i-1}, t) = R_i(t)\frac{\partial \mathbf{f}_0^T}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i-1}, t)(ff_1^T)^{-1}, \\
dR_{i\text{опт}} = \left\{\frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i-1}, t)R_i + R_i\frac{\partial \mathbf{F}_0^T}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i-1}, t) + F_1F_1^T - K(\mathbf{Y}_{i-1}, t)(f_1f_1^T)K^T\right\}dt, \\
R_i(t_0) = R_0 = M\left\{(\mathbf{Y}_0 - \widehat{\mathbf{Y}}_0)(\mathbf{Y}_0 - \widehat{\mathbf{Y}}_0)^T\right\},
\end{gathered} \tag{6}
$$

где

$$
\psi_1(\mathbf{Y}_{i-1}, t) = \mathbf{F}_0(\mathbf{Y}_{i-1}, t) - \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i-1}, t)\mathbf{Y}_{i-1},
$$

$$
\psi(\mathbf{Y}_{i-1}, t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{Y}_{i-1}, t) - \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\mathbf{Y}_{i-1}, t)\mathbf{Y}_{i-1},
$$

причем в качестве вектора наблюдений в данном случае используется вектор i-х приближений $\mathbf{Z}_i$ (5).

Система (6), имея, строго говоря, формальный характер, является ключевой для последующих построений.

Так как стохастическая траектория $\mathbf{Y}_{i-1}(t)$ точно определена не может быть в принципе, то предположим, что задана лишь ее некоторая оценка $\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}(t)$, т. е.

$$
\mathbf{Y}_{i-1}(t) = \widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}(t) + \delta\mathbf{Y}_{i-1}(t),
$$

где $\delta\mathbf{Y}_{i-1}(t)$ — ошибка оценки $\mathbf{Y}_{i-1}(t)$.

При замене в (6) $\mathbf{Y}_{i-1}(t)$ на $\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}(t)$ полученная оценка $\widehat{\mathbf{Y}}_i$ уже не будет оптимальной ввиду ее неизбежного возмущения ошибкой $\delta\mathbf{Y}_{i-1}(t)$. Уравнения возмущенной оценки в этом случае принимают вид:

$$
\begin{gathered}
d\widehat{\mathbf{Y}}_i = \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)dt\widehat{\mathbf{Y}}_i + \psi_1(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)dt + K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) \times \\
\times \left(d\mathbf{Z}_i - \left[\psi(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) + \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\widehat{\mathbf{Y}}_i\right]dt\right), \\
\widehat{\mathbf{Y}}_i(t_0) = \widehat{\mathbf{Y}}_0, \\
K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) = R_i\frac{\partial \mathbf{f}_0^T}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)(f_1f_1^T)^{-1}, \\
dR_i = \left\{\frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Y}}R_i + R_i\frac{\partial \mathbf{F}_0^T}{\partial \mathbf{Y}} + F_1F_1^T - K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)(f_1f_1^T)K^T(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right\}dt, \qquad R_i(t_0) = R_0.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Важной особенностью системы (7) является тот факт, что при допущении о сходимости оценок приближений $\widehat{\mathbf{Y}}_i(t)$ к некоторой оценке $\widehat{\mathbf{Y}}_t$: $\lim\limits_{i\to\infty}\widehat{\mathbf{Y}}_i(t) = \widehat{\mathbf{Y}}_t$ (а подобное допущение проистекает, например, из сходимости приближений $\mathbf{Y}_i(t)$ к $\mathbf{Y}(t)$ и предположения о малости влияния ошибки оценивания на возмущение процесса оценки, исходного при построении исследуемого субоптимального фильтра) уравнения (7) при $\lim\limits_{i\to\infty}\widehat{\mathbf{Y}}_i(t) = \widehat{\mathbf{Y}}(t)$ превращаются в вышеупомянутые уравнения субоптимального оценивания — обобщенного нелинейного фильтра Калмана [1. С. 465].

Для оценки возмущения, вызванного в фильтре (7) ошибкой $\delta\mathbf{Y}_{i-1}$, а также случайными вариациями его параметров, воспользуемся подходом, изложенным в [2]. Используя аналогично [2] понятие вектора $\mathbf{A}^{(\vartheta)}$, сформированного из элементов некоторой матрицы A размерностью $m \times n$ следующим образом:

$$\mathbf{A}^{(\vartheta)} = \left| a_{11}a_{21} \dots a_{m1}a_{12}a_{22} \dots a_{m2} \dots a_{1n}a_{2n} \dots a_{mn} \right|^{T},$$

получим уравнения для ошибки оценки $\delta\widehat{\mathbf{Y}}_i$ в виде

$$d\delta\widehat{\mathbf{Y}}_i = A_0\delta\widehat{\mathbf{Y}}_i + A_1\delta\mathbf{R}_i^{(\vartheta)} + A_2\delta\mathbf{Y}_{i-1} + A_3\delta\left[\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right]^{(\vartheta)} + A_4\delta\mathbf{f}_1^{(\vartheta)} +$$

$$+ A_5\delta\left[\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right]^{(\vartheta)} - K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\delta\mathbf{f}_0(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) + \delta\mathbf{F}_0(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t),$$

$$A_0 = A_0(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) = \left[\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) - K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right]dt,$$

$$A_1 = A_1(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, \widehat{\mathbf{Y}}_i, d\mathbf{Z}_i, t) = \mathbf{r}^T(f_1f_1^T)^{-1}\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) \otimes E,$$

$$\mathbf{r} = d\mathbf{Z}_i - \left[\psi(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) + \frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\widehat{\mathbf{Y}}_i\right]dt,$$

$$A_2 = A_2(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, \widehat{\mathbf{Y}}_i, d\mathbf{Z}_i, t) = [(\widehat{\mathbf{Y}}_i^T \otimes E) - (\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}^T \otimes E)]\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{Y}}\left[\left(\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\mathbf{Y}}\right)^{(\vartheta)}\right]dt +$$

$$+ \left(R_i \otimes \mathbf{r}^T(f_1f_i^T)^{-1} + K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)[(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}^T \otimes E) - (\widehat{\mathbf{Y}}_i^T \otimes E)]dt\right)\frac{\partial}{\partial\mathbf{Y}}\left[\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right]^{(\vartheta)},$$

$$A_3 = R_i \otimes \mathbf{r}^T(f_1f_1^T)^{-1} + K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)[(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}^T \otimes E) - (\widehat{\mathbf{Y}}_i^T \otimes E)],$$

$$A_4 = -\mathbf{r}^T(f_1^T)^{-1} \otimes K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) - K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)f_1 \otimes \mathbf{r}^T(f_1f_1^T)^{-1},$$

$$A_5 = [(\widehat{\mathbf{Y}}_i^T \otimes E) - (\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}^T \otimes E)]\,dt,$$

где символ $\delta\mathbf{A}^{(\vartheta)}$ обозначает возмущение вектора $\mathbf{A}^{(\vartheta)}$, образованного из соответствующей матрицы A; E — единичная матрица.

Вывод данного уравнения осуществлен аналогично выводу уравнения для ошибки оценки в [2].

Возмущения векторов $\delta\left[\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right]^{(\vartheta)}$, $\delta\mathbf{F}_0(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)$, $\delta\left[\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right]^{(\vartheta)}$, $\delta\mathbf{f}_0(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)$, $\delta\mathbf{f}_1^{(\vartheta)}(t)$ описывают при этом параметрические возмущения рассматриваемого фильтра, обусловленные отклонением параметров фильтра от действительных значений параметров объекта и наблюдателя и погрешностями их аппаратурно-алгоритмической реализации. Следует отметить, что возмущения, порожденные априорной неопределенностью в описании векторов $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{f}_0$, автоматически вызывают возмущения той же природы в определении матриц $\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\mathbf{Y}}$ и $\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}$ (и наоборот).

В связи с этим для удобства последующего аналитического описания возмущений представим возмущения $\delta\mathbf{F}_0$ и $\delta\mathbf{f}_0$ в виде двух составляющих: первой, обусловленной интегрированием матрицы ошибок $\delta\left(\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\mathbf{Y}}\right)\delta\left(\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}\right)$ при формировании $\mathbf{F}_0(\mathbf{f}_0)$ по возмущенной матрице $\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\mathbf{Y}}\left(\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}\right)$, и второй, вызванной погрешностями вычислительных операций и не зависящей от первой.

Используя соображения, изложенные в [2], возмущения $\delta\left(\frac{\partial \mathbf{F}_r}{\partial \mathbf{Y}}\right)^{(\vartheta)}$, $\delta\left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}\right)^{(\vartheta)}$, $\delta \mathbf{f}_1^{(\vartheta)}$ представим как

$$Q_F(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\mathbf{W}_1, \qquad Q_f(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\mathbf{W}_2, \qquad Q_{f_1}(t)\mathbf{W}_3,$$

где $\mathbf{W}_i$, $i = \overline{1, 3}$, — белые гауссовы вектор-шумы со взаимно независимыми компонентами с нулевым средним и единичной интенсивностью размерностью соответственно n^2, $m \times n$, m; Q_F, Q_f, Q_{f_1} — диагональные матрицы, элементы которых определяют среднеквадратические отклонения возмущений элементов соответствующих векторов (размерность матриц соответственно $n^2 \times n^2$, $(mn) \times (mn)$, $m \times m$).

Тогда первую составляющую возмущения $\delta \mathbf{F}_0$ можно представить как

$$\left| g_1 \vdots g_2 \vdots \ldots \vdots g_n \right| \mathbf{W}_1 = g_F \mathbf{W}_1,$$

где $g_j = \int Q_{F_j}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)d\mathbf{Y}_{(j)}$, $Q_{F_j}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)$ имеет размерность $n \times n$ и определяется из матрицы Q_F следующим образом:

$$Q_F = \begin{vmatrix} Q_{F_1} & & & \\ & Q_{F_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_{F_n} \end{vmatrix}.$$

Аналогично для первой составляющей возмущения $\delta \mathbf{f}_0$

$$\left| h_1 \vdots h_2 \vdots \ldots \vdots h_n \right| \mathbf{W}_2 = h_f \mathbf{W}_2,$$

где $h_j = \int Q_{f_j}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)d\mathbf{Y}_{(j)}$, $Q_{f_j}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)$ имеет размерность $m \times m$ и определяется из Q_f аналогично предыдущему случаю.

Вторые составляющие возмущений $\delta \mathbf{F}_0$, $\delta \mathbf{f}_0$, вызванные погрешностями их аппаратурно-вычислительной реализации или другими случайными факторами, используя упомянутые соображения, можно также аппроксимировать белыми гауссовыми шумами $\mathbf{W}_F$, $\mathbf{W}_f$ с матрицами интенсивностей, зависящими в общем случае от оценки $D_F(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\delta(t-\tau)$, $D_f(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\delta(t-\tau)$. Таким образом,

$$\delta \mathbf{F}_0(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) = g_F \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_F, \qquad \delta \mathbf{f}_0(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) = h_f \mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_f.$$

Учтем также, что ошибка $\delta \mathbf{Y}_{i-1}$ состоит из ошибки оптимальной невозмущенной оценки $\Delta_{i-1} = \mathbf{Y}_{i-1} - \widehat{\mathbf{Y}}_{(i-1)_{\text{опт}}}$ и ошибки возмущенного оценивания

$$\delta \widehat{\mathbf{Y}}_{i-1} = \widehat{\mathbf{Y}}_{(i-1)_{\text{опт}}} - \widehat{\mathbf{Y}}_{i-1},$$

т. е.

$$\delta \mathbf{Y}_{i-1} = \delta \widehat{\mathbf{Y}}_{i-1} + \Delta_{i-1},$$

а также то, что в силу своего определения процесс $\Delta_i(t)$ является белым гауссовым с нулевым средним и матрицей интенсивностей $R_{i_{\text{опт}}}\delta(t-\tau)$, определяемой из (6).

Таким образом, уравнение ошибки оценки $\delta\widehat{\mathbf{Y}}_i$ окончательно имеет вид

$$d\delta\widehat{\mathbf{Y}}_i = A_0\delta\widehat{\mathbf{Y}}_i + A_1\delta\mathbf{R}_i^{(\vartheta)} + A_2\delta\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1} + A_2\Delta_{i-1} + (A_3Q_f - Kh_f)\mathbf{W}_2 -$$
$$- K\mathbf{W}_f + A_4Q_{f_1}\mathbf{W}_3 + (g_F + A_5Q_F)\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_F. \tag{8}$$

Из полученного уравнения вытекает, что для полного определения вектора ошибки необходимо также знание уравнения ошибки $\delta\mathbf{R}_i^{(\vartheta)}$ возмущенной апостериорной ковариационной матрицы.

Уравнение ошибки матрицы апостериорных ковариаций. Применение математического аппарата для исследования возмущений многомерных линейных систем, использованного при выводе векторного уравнения (8), не позволяет определять возмущение $\delta\mathbf{F}^{(\vartheta)}$ матричной функции F (зависящей от матрицы Q размерностью $n \times m$), вызванное возмущением $\delta\mathbf{Q}^{(\vartheta)}$.

Для решения этой задачи используются следующие леммы, доказательства которых приведены в [2].

Лемма 1. Пусть $F = AQB$, где A, B — матрицы соответствующей размерности. Если вектор $\mathbf{Q}^{(\vartheta)}$ получает возмущение $\delta\mathbf{Q}^{(\vartheta)}$ (матрица Q соответственно δQ), то

$$\delta\mathbf{F}^{(\vartheta)} = [\,(B^TE_{V1} \otimes A)\,\widehat{\otimes}\,\mathbf{E}^{(\vartheta)}]\,\delta\mathbf{Q}^{(\vartheta)},$$

где размерность единичной матрицы E соответствует размерности матрицы A;

$$E_{V1} = \left| E_n^{(1)} \otimes E_{m(1)} \vdots E_n^{(2)} \otimes E_{m(1)} \vdots \ldots \vdots E_n^{(n)} \otimes E_{m(m)} \right|,$$

E_i — единичная матрица размерностью $i \times i$; $E_{k(j)}$ — j-й столбец матрицы E_k; $E_k^{(j)}$ — j-я строка.

Лемма 2. Пусть $F = AQ^TB$.

Если вектор $\mathbf{Q}^{T(\vartheta)}$ получает возмущение $\delta\mathbf{Q}^{(\vartheta)}$, то

$$\delta\mathbf{F}^{(\vartheta)} = [\,(B^TE_{V2} \otimes A)\widehat{\otimes}\,\mathbf{E}^{(\vartheta)}]\,\delta\mathbf{Q}^{(\vartheta)},$$

где

$$E_{V2} = | E_{n(1)} \otimes E_m^{(1)} \vdots E_{n(2)} \otimes E_m^{(1)} \vdots \ldots \vdots E_{n(n)} \otimes E_m^{(1)} \vdots \times$$
$$\times \vdots E_{n(1)} \otimes E_m^{(2)} \vdots \ldots \vdots E_{n(n)} \otimes E_m^{(m)} |.$$

Используя доказательства и результаты полученных лемм, запишем дифференциальное уравнение для вектора ошибок $\delta\mathbf{R}_i^{(\vartheta)}$ возмущенной матрицы R_i:

$$d\delta\mathbf{R}_i^{(\vartheta)} = [B_1\delta\mathbf{R}_i^{(\vartheta)} + B_2\delta\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1} + B_2\Delta_{i-1} + B_3Q_f\mathbf{W}_2 +$$
$$+ B_4Q_{f_1}\mathbf{W}_3 + B_5Q_F\mathbf{W}_1 + B_6\delta\mathbf{F}_1^{(\vartheta)}]dt, \tag{9}$$

где

$$B_1 = \left(E_{V1} \otimes \frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\mathbf{Y}}\right) \widehat{\otimes}\,\mathbf{E}^{(\vartheta)} + \left(\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\mathbf{Y}} E_{V1} \otimes E\right) \widehat{\otimes}\,\mathbf{E}^{(\vartheta)} -$$
$$- \left(K\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}} E_{V1} \otimes E\right) \widehat{\otimes}\,\mathbf{E}^{(\vartheta)} - \left(E_{V1} \otimes K\frac{\partial\mathbf{f}_0}{\partial\mathbf{Y}}\right) \widehat{\otimes}\,\mathbf{E}^{(\vartheta)},$$

$$B_2 = \left[(R_i E_{V1} \otimes E) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} + (E_{V2} \otimes R_i) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Y}} \right)^{(\vartheta)} -$$

$$- \left[(KE_{V2} \otimes B_i) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} + (R_i E_{V1} \otimes K) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}} \right)^{(\vartheta)} +$$

$$+ \left[(F_1 E_{V1} \otimes E) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} + (E_{V2} \otimes F_1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}} \left\{ \mathbf{F}_1^{(\vartheta)} \right\},$$

$$B_3 = -(KE_{V2} \otimes R_i) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} - (R_i E_{V1} \otimes K) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)},$$

$$B_4 = (KE_{V2} \otimes Kf_1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} + (Kf_1 E_{V1} \otimes K) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)},$$

$$B_5 = (R_i E_{V1} \otimes E) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} + (E_{V2} \otimes R_i) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)},$$

$$B_6 = (F_1 E_{V1} \otimes E) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)} + (E_{V2} \otimes F_1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{E}^{(\vartheta)}.$$

Аналогично уже описанным параметрическим возмущениям аппроксимируем $\delta \mathbf{F}_1^{(\vartheta)}$ белым гауссовым вектор-шумом и обозначаем как $Q_{F_1} \mathbf{W}_4$, где Q_{F_1} — диагональная матрица, элементы которой определяют среднеквадратические отклонения возмущений соответствующих элементов вектора $\mathbf{F}_1^{(\vartheta)}$; $\mathbf{W}_4$ — белый гауссов вектор-шум с нулевым средним и единичной интенсивностью.

Синтез уравнений оценки вектора возмущений нелинейного гауссова фильтра. Для решения поставленной задачи введем расширенный вектор $\mathbf{X}_i = \begin{vmatrix} \delta \widehat{\mathbf{Y}}_i \\ \hline \delta \mathbf{R}_i^{(\vartheta)} \end{vmatrix}$ и, исходя из полученных выше уравнений (8), (9), запишем

$$d\mathbf{X}_i = \Phi_i \mathbf{X}_i + C_i \delta \widehat{\mathbf{Y}}_{i-1} + D_i \mathbf{W}, \tag{10}$$

где

$$\Phi_i = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ 0 & B_1 \end{vmatrix}, \qquad C_i = \begin{vmatrix} A_2 \\ \hline B_2 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{W} = \begin{vmatrix} \Delta_{i-1} \\ \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \\ \mathbf{W}_f \\ \mathbf{W}_F \end{vmatrix},$$

$$D_i = \left| \begin{array}{c:c:c:c:c:c:c} A_2 & g_F + A_5 Q_F & A_3 Q_f - K h_f & A_4 Q_{f_1} & 0 & -K & E \\ \hdashline B_2 & B_5 Q_F & B_3 Q_f & B_4 Q_{f_1} & B_6 Q_{F_1} & 0 & \end{array} \right|.$$

Выберем далее в качестве вектора наблюдения за вектором $\mathbf{X}_i$ вектор $\widehat{\mathbf{Y}}_i$, описываемый уравнением (7).

Так как i-е приближение к истинному сигналу наблюдения $\mathbf{Z}_i$ аналогично вышеизложенному может быть с точностью до возмущений второго порядка малости представлено в виде

$$\mathbf{Z}_i = \overline{\mathbf{Z}}_i + \delta \mathbf{Z}_i,$$

где $\delta \mathbf{Z}_i$ — ошибка наблюдения, вызванная заменой в (5) $\mathbf{Y}_{i-1}$ на $\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}$; $\overline{\mathbf{Z}}_i$ — возмущенное наблюдение, т. е.

$$d\overline{\mathbf{Z}}_i = \left\{ \mathbf{f}_0(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) + \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}} (\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) [\mathbf{Y}_i - \widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}] \right\} dt + f_1 d\mathbf{V}_i,$$

уравнение возмущенной оценки, записанное с точностью до малых возмущений 2-го порядка, получается в следующей форме:

$$d\widehat{\mathbf{Y}}_i = \frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\widehat{\mathbf{Y}}_i dt + \psi_1(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)dt + K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)(\mathbf{Y}_i - \widehat{\mathbf{Y}}_i)dt + f_1 d\mathbf{V}_t + d\delta\mathbf{Z}_i\right]. \tag{11}$$

Вновь применяя аппарат и методику, использованные при получении уравнения (8), для $d\delta\mathbf{Z}_i$ имеем

$$d\delta\mathbf{Z}_i = [(\mathbf{Y}_i - \widehat{\mathbf{Y}}_{i-1})^T \otimes E]\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}}\left[\left\{\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right\}^{(\theta)}\right]\delta\mathbf{Y}_{i-1},$$

или, учитывая, что $\mathbf{Y}_i = \widehat{\mathbf{Y}}_i + \delta\mathbf{Y}_i$, и пренебрегая составляющей, содержащей произведение $\delta\mathbf{Y}_i$ и $\delta\mathbf{Y}_{i-1}$ 2-го порядка малости, получаем, подставляя преобразованное выражение для $d\delta\mathbf{Z}_i$ в (11),

$$d\widehat{\mathbf{Y}}_i = \left[\frac{\partial \mathbf{F}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\widehat{\mathbf{Y}}_i + K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\delta\widehat{\mathbf{Y}}_i + \psi_1(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right]dt +$$

$$+ K(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\left[f_1 d\mathbf{V}_t + \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\Delta_i dt +\right.$$

$$\left. + [(\widehat{\mathbf{Y}}_i - \widehat{\mathbf{Y}}_{i-1})^T \otimes E]\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}}\left[\left\{\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i-1}, t)\right\}^{(\theta)}\right]\delta\mathbf{Y}_{i-1}dt\right]. \tag{12}$$

Проанализируем далее уравнения (10), (12) с точки зрения получения их предельной формы при $i \to \infty$. Так как $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{Y}_i(t) = \mathbf{Y}(t)$ [P—ПН] [3], а векторные приближения $\widehat{\mathbf{Y}}_i(t)$, определяемые уравнением (7), сходятся, как было отмечено выше, к вектору субоптимальной оценки $\mathbf{Y}_t$, являющемуся решением исследуемых уравнений субоптимальной фильтрации [1. С. 465], то, следовательно, существует предел $\lim\limits_{i\to\infty} \delta\widehat{\mathbf{Y}}_i(t) = \delta\widehat{\mathbf{Y}}(t)$.

Переходя к пределу по i в (10), (12), имеем

$$d\mathbf{X} = \Phi\mathbf{X} + D\mathbf{W}, \tag{13}$$

где

$$\Phi = \left|\begin{array}{c:c} \overline{A}_0 + \overline{A}_2 & \overline{A}_1 \\ \hdashline \overline{B}_2 & \overline{B}_1 \end{array}\right|,$$

$$D = \left|\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c} \overline{A}_2 & g_F & \overline{A}_3 Q_F - Kh_f & A_4 Q_{f_1} & 0 & -K & E \\ \hdashline \overline{B}_2 & \overline{B}_5 Q_F & \overline{B}_3 Q_f & B_4 Q_{f_1} & \overline{B}_6 Q_{F_1} & \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right|,$$

$$\{\overline{A}_i, \overline{B}_i\} = \{A_i, B_i\}(\widehat{\mathbf{Y}}, \overline{\mathbf{r}}, t), \qquad \overline{\mathbf{r}} = d\mathbf{Z} - \mathbf{f}_0(\widehat{\mathbf{Y}}, t),$$

$$\overline{A}_3 = R \otimes \overline{\mathbf{r}}^T(f_1 f_1^T)^{-1}, \qquad \overline{A}_2 = \overline{A}_3\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}}\left[\left\{\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}(\widehat{\mathbf{Y}}, t)\right\}^{(\theta)}\right],$$

и для выбранного наблюдателя

$$d\widehat{\mathbf{Y}} = K\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}\delta\widehat{\mathbf{Y}} + \mathbf{F}_0(\widehat{\mathbf{Y}}, t) + K\left[f_1 d\mathbf{V}_t + \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}\Delta dt\right],$$

или

$$d\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}_0(\widehat{\mathbf{Y}}, t) + G\mathbf{X} + K\left[f_1 d\mathbf{V}_t + \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}}\Delta dt\right], \qquad G = \left| K\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}} \vdots 0 \right|. \tag{14}$$

Таким образом, поставленная задача сводится к задаче текущей оценки вектора **X**, описываемого уравнением (13) по наблюдениям, заданным уравнением (14). Подобная задача допускает оптимальное в среднеквадратическом решение на основе методов теории условно-гауссовой фильтрации [3]. Перед окончательным представлением уравнений оптимальной оценки $\widehat{\mathbf{X}}$ отметим лишь, что матрица интенсивностей шума Δ, равная, как отмечалось выше, $R_{\text{опт}}$, может быть представлена как $R_{\text{опт}} = R + \delta R$ или $R_{\text{опт}} = R + \delta R + \Delta_{\delta R}$, где $\delta\widehat{\mathbf{R}}^{(\vartheta)} = \left|0 \vdots E\right| \widehat{\mathbf{X}}$ — оценка вектора $\delta\mathbf{R}^{(\vartheta)}$; $\Delta_{\delta R}$ — погрешность такой оценки.

В силу приведенных выше рассуждений величиной $\Delta_{\delta R}$ можно пренебречь, так как по отношению к R матрица интенсивностей шума $\Delta_{\delta R}^{(\vartheta)}$ является величиной 2-го порядка малости. Таким образом, считая интенсивность шума Δ равной $R_\Delta = R + \widehat{\delta R}$, уравнения оптимальной оценки вектора **X** получаем в следующем виде [3]:

$$d\widehat{\mathbf{X}} = \Phi\widehat{\mathbf{X}}dt + L(d\widehat{\mathbf{Y}} - [\mathbf{F}_0(\widehat{\mathbf{Y}}, t) + G\widehat{\mathbf{X}}]dt),$$

$$\widehat{\mathbf{X}}_0 = 0,$$

$$L = \left(\gamma_t G^T + \left|\begin{array}{c} \overline{A}_2 \\ \hline \overline{B}_2 \end{array}\right| R_\Delta \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}} K^T\right)\left(K f_1 f_1^T K^T + K\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}} R_\Delta \frac{\partial \mathbf{f}_0^T}{\partial \mathbf{Y}} K^T\right)^{-1},$$

$$\dot{\gamma}_t = \Phi\gamma_t + \gamma_t\Phi^T + D\left|\begin{array}{cccc} R_\Delta & & & 0 \\ & E & & \\ & & D_f & \\ 0 & & & D_F \end{array}\right| D^T - L\left(K f_1 f_1^T K^T + K\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{Y}} R_\Delta \frac{\partial \mathbf{f}_0^T}{\partial \mathbf{Y}} K^T\right) L^T,$$

$$\gamma_0 = \left|\begin{array}{c:c} D_{\delta Y} & 0 \\ \hline 0 & D_{\delta R} \end{array}\right|,$$

где $D_{\delta Y}$ — ковариационная матрица ошибок определения вектора начальной оценки; $D_{\delta R}$ — ковариационная матрица ошибок определения матрицы априорных ковариаций R_0.

Приведенные уравнения позволяют не только решить поставленную задачу — определить ошибку субоптимальной фильтрации, но также и найти оценку вариаций апостериорной ковариационной матрицы, что весьма важно при установлении границ допустимого использования субоптимальных фильтров.

Интересно отметить, что для линейной системы «объект—наблюдатель» (т. е. случая оптимальной фильтрации) полученные уравнения вырождаются в уравнения фильтрации возмущений калмановского фильтра [2].

Для иллюстрации возможности практического использования полученных результатов было осуществлено текущее оценивание процесса из примера 1 [1. Гл. 8. С. 446] с помощью субоптимального возмущенного нелинейного фильтра Калмана с одновременным оцениванием ошибки возмущенной фильтрации предложенным методом. Моделирование процессов фильтрации осуществлялось на временном интервале [0, 600 с] с шагом $\Delta t = 0{,}1$ с при следующих выбранных начальных условиях:

$$Z_0 = 10^{-3}, \quad \hat{Z}_0 = 1{,}1 \cdot 10^{-3}, \quad R_0 = 10^{-2}, \quad \gamma_0 = E \cdot 10^{-3}.$$

Шум объекта, помеха измерителя и возмущения параметров фильтра в виде стандартных нормальных шумов моделировались с использованием стандартной подпрограммы генератора гауссовой последовательности.

Было установлено, что использование предложенной методики позволило уменьшить общую погрешность оценивания результатов фильтрации на ≈ 25 %. Таким образом, очевидно, что применение разработанной методики в практических ситуациях, когда вопросы повышения точности играют первостепенную роль, может оказаться весьма эффективным, несмотря на увеличение вычислительных затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
2. **Соколов С. В.** О решении задачи оптимальной оценки состояния возмущенного линейного фильтра // Автометрия. 1991. № 6.
3. **Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
4. **Чернов А. А., Ястребов В. Д.** Метод оценки возмущений в алгоритмах решения навигационных задач // Космические исследования. 1984. 22, № 3.

Поступила в редакцию 10 июня 1994 г.