РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 4 1995

УДК 517.95

В. А. Тупчиев, А. Н. Чепурко
(Обнинск Калужской обл.)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА*

Рассматривается спектральная задача для односкоростного уравнения переноса нейтронов с адсорбционным краевым условием и с малым параметром — средней длиной свободного пробега в среде. Проводится построение и обоснование асимптотических разложений собственных функций и собственных значений этой задачи по указанному малому параметру.

При построении асимптотики используется метод пограничных функций [1, 2], который уже применялся в данной задаче, но обоснование алгоритма было проведено для изотропного случая [3, 4]. Возникающие при построении асимптотики задачи для пограничных функций (задачи Милна) решались с использованием результатов работ [5, 6].

Обоснование асимптотики проведено для анизотропного случая с четной индикатрисой рассеяния для любого собственного значения и любой собственной функции. Оно базируется на известном методе Келлога [7, 8] и важной лемме из [2].

Таким образом, построенные асимптотические разложения собственных функций и соответствующие разложения собственных (характеристических) значений высокого порядка по малому параметру позволяют решить известную в теории переноса проблему строгого обоснования диффузионного приближения и дальнейших асимптотических поправок к нему любого порядка по указанному малому параметру.

Остановимся на постановке задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi(x,\mu) = \lambda \int_{-1}^{1} \Theta(x,\mu,\mu')\varphi(x,\mu')d\mu', \tag{1}$$

$$\varphi(-a,\mu) = 0, \quad \mu > 0; \qquad \varphi(a,\mu) = 0, \quad \mu < 0, \tag{2}$$

где $\varphi(x,\mu)$ — плотность частиц в точке x слоя $-a < x < a$, летящих под углом к оси x, косинус которого равен μ; $\Theta(x,\mu,\mu')$ — индикатриса рассеяния, обладающая следующими свойствами B:

$$\int_{-1}^{1} \Theta(x,\mu,\mu')d\mu' = 1;$$

$$\Theta(x,\mu,\mu') = \Theta(x,\mu',\mu) = \Theta(x,-\mu,-\mu') > 0;$$

$$\Theta(x,\mu,\mu') \in L_\infty(C^{n+3}[-a,a], \ -1 \le \mu, \ \mu' \le 1).$$

* Материалы были доложены на III Международном семинаре по моделированию приборов и технологий. Обнинск, июль 1993 г.

Решение $\varphi = \varphi(x, \mu)$ задачи (1), (2) ищется в классе $L_\infty(\overline{Q})$ как гладкая по x функция класса $C^{n+3}[-a, a]$ при $\mu \neq 0$, непрерывная в квадрате $\overline{Q}$: $-a \leq$ $\leq x \leq a$, $-1 \leq \mu \leq 1$.

Принимая во внимание оператор L_ε, определенный выражением

$$L_\varepsilon \varphi = \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \varphi$$

на функциях $\varphi(x, \mu)$ указанного выше класса, удовлетворяющих условиям (2), а также интегральный оператор S

$$S\varphi = \int_{-1}^{1} \Theta(x, \mu, \mu')\varphi(x, \mu')d\mu',$$

можно представить задачу (1), (2) в операторной форме:

$$L_\varepsilon \varphi = \lambda S \varphi.$$

Известно, что данная задача имеет решение, причем $\lambda^{(p)}(\varepsilon)$ вещественны, положительны и $\lambda^{(p)}(\varepsilon) \to \infty$ при $p \to \infty$, $\varphi^{(p)}$ принадлежат указанному выше классу; $\varphi^{(1)} > 0$, $\lambda^{(1)}(\varepsilon)$ — простое собственное значение, $\lambda^{(p)}(\varepsilon)$ имеют конечную кратность.

Каждая собственная пара $\{\lambda^{(p)}(\varepsilon),\ \varphi^{(p)}(x, \mu, \varepsilon)\}$ представляется в виде разложений по степеням ε:

$$\lambda^{(p)}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^{(p)} \varepsilon^i, \tag{3}$$

$$\varphi^{(p)}(x, \mu, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\overline{\varphi}_i^{(p)}(x, \mu) + \Pi_i^{(1)}\varphi^{(p)}(\tau_1, \mu) + \Pi_i^{(2)}\varphi^{(p)}(\tau_2, \mu)\right]\varepsilon^i. \tag{4}$$

Коэффициенты рядов (3), (4) определяются рекуррентно. (Здесь $\tau_1 = \frac{x+a}{\varepsilon}$, $\tau_1 \in [0, \infty)$; $\tau_2 = \frac{x-a}{\varepsilon}$, $\tau_2 \in (-\infty, 0]$.)

При этом для регулярных членов ряда (4) получаются уравнения следующего типа:

$$\overline{\varphi}_i = \lambda_0 S \overline{\varphi}_i + \overline{R}_i, \tag{5}$$

а для пограничных функций $\Pi_i^{(q)}\varphi(\tau_q, \mu)$ — уравнения

$$\mu \frac{\partial \Pi_i^{(q)}\varphi}{\partial \tau_q} + \Pi_i^{(q)}\varphi = \lambda_0 S(\Pi_i^{(q)}\varphi) + R_i^{(q)}, \tag{6}$$

где $\overline{R}_i$, $R_i^{(q)}$ — к моменту определения функций $\overline{\varphi}_i$ и $\Pi_i^{(q)}\varphi(\tau_q, \mu)$ уже известные функции.

Кроме того, для решения уравнений (5), (6) вводятся дополнительные условия. Прежде всего требуется, чтобы выполнялось обычное условие для пограничных функций:

$$\Pi_i^{(q)}\varphi(\tau_q, \mu) \to 0 \quad \text{при} \quad (-1)^{q-1}\tau_q \to \infty. \tag{7}$$

Подставляя ряд (4) в условия (2), приходим к условиям

$$\overline{\varphi}_i((-1)^q a, \mu) + \Pi_i^{(q)}\varphi(0, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad (-1)^{q-1}\mu > 0. \tag{8}$$

Далее принимается условие нормировки регулярной части ряда (4):

$$\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1}\left(\sum_i \overline{\varphi}_i(x,\mu)\varepsilon^i\right)^2 dx d\mu = 1. \tag{9}$$

Известно, что для задачи (6), (8) справедлива следующая **теорема.** Пусть выполнены условия B, а функция $R_i^{(1)}(\tau_1,\mu) \in L_\infty(R_1^+ \times [-1,1])$ такова, что $|R_i^{(1)}| \le C\exp(-\alpha\tau_1)$, $0 < \alpha < \alpha_0 < 1$.

Тогда справедливы следующие **утверждения:**

1. Для любой функции $\overline{\varphi}_i(-a,\mu) \in L_\infty(0,1)$ существует единственное ограниченное решение задачи (6), (8):

$$\Pi_i^{(1)}\varphi = \Pi_i^{(1)}\varphi(\tau_1,\mu) \in L_\infty(R_1^+ \times [-1,1]).$$

2. Существует постоянная G, зависящая только от начальной функции $\overline{\varphi}_i(-a,\mu)$, такая, что

$$|\Pi_i^{(1)}\varphi - G| \le C\exp(-\alpha\tau_1).$$

Доказательство этой теоремы содержится в [5, 6].

Обозначая через Λ_m и $\Phi_m(x,\mu,\varepsilon)$ частичные суммы разложений (3) и (4) соответственно, рассмотрим невязку

$$\omega_m = \varepsilon\mu\frac{\partial\Phi_m}{\partial x} + \Phi_m - \Lambda_m S\Phi_m. \tag{10}$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия B. Тогда при $m = 0, 1, \ldots, n+2$ справедлива оценка невязки

$$\|\omega_m\|_\infty < C\varepsilon^{m+1}, \tag{11}$$

где C не зависит от ε.

Обоснование алгоритма асимптотики проводится для случая, когда Θ не зависит от x и $\Theta(\mu,\mu') = \Theta(-\mu,\mu')$. Тогда задача (1), (2) эквивалентна уравнению Пайерлса:

$$u = \lambda SAu, \tag{12}$$

где

$$u = S\varphi, \qquad t = 1/\mu,$$

$$Au = \int_{-a}^{a}\frac{t}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{t|x-\xi|}{\varepsilon}\right)u(\xi,t)d\xi.$$

Свойства оператора A достаточно подробно изучены в [9]. В частности, A — вполне непрерывный, самосопряженный оператор, и для любого $t \in [1,\infty)$ $(A\varphi,\varphi) > 0$, если $\varphi \not\equiv 0$. Известно, что оператор S — вполне непрерывный, положительный и самосопряженный [10].

Учитывая свойства операторов A и S, рассмотрим пространство функций $H([-a,a] \times [1,\infty))$ со скалярным произведением

$$(y_1,y_2)_h = (Ay_1,y_2)_{L_2}.$$

Тогда оператор SA будет вполне непрерывным, положительным и самосопряженным в гильбертовом пространстве H.

Для обоснования алгоритма асимптотики используется следующая лемма из [2]:

Лемма 2. Пусть $K : H \to H$ — вполне непрерывный, самосопряженный, положительный линейный оператор в H. Предположим, что существует число γ_0 и вектор $u_0 \in H$ с $\|u_0\|_h = 1$ такие, что

$$\|Ku_0 - \gamma_0 u_0\|_h \le \sigma,$$

где σ — некоторая положительная постоянная.

Тогда справедливы утверждения:

1. Находится хотя бы одно собственное значение $\gamma^{(i)}$ оператора K такое, что

$$|\gamma_0 - \gamma^{(i)}| \le \sigma.$$

2. При всяком $d > \sigma$ существует вектор $\bar{u} \in H$ с $\|\bar{u}\|_h = 1$, для которого

$$\|u_0 - \bar{u}\|_h \le 2\sigma d^{-1},$$

причем $\bar{u}$ является линейной комбинацией собственных векторов, отвечающих собственным значениям оператора K из интервала $(\gamma_0 - d, \gamma_0 + d)$.

Применяя метод Келлога, а также используя лемму 2, докажем следующие оценки:

Теорема. Пусть $\Theta(\mu, \mu') = \Theta(-\mu, \mu')$ и выполнены условия B, а $\Lambda_n^{(p)}$ и $\Phi_n^{(p)}$ — определенные выше частичные суммы, которые удовлетворяют задаче (1), (2) с невязкой (10), имеющей оценку (11). Тогда существуют такие числа $\varepsilon_0 > 0$ и $C > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $p = 1, 2, \ldots, p_0$ выполняются неравенства

$$\left\| \frac{\Phi_{n-1}^{(p)}}{\|\Phi_{n-1}^{(p)}\|} - \varphi^{(p)} \right\|_h \le C\varepsilon^n;$$

$$\left| \Lambda_{n+1}^{(p)} - \lambda^{(p)} \right| \le C\varepsilon^{n+2},$$

где $\left\{\lambda^{(p)}, \varphi^{(p)}\right\}$ — собственная пара задачи (1), (2) с $\|\varphi^{(p)}\| = 1$; C не зависит от ε; n — любое фиксированное целое число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. 12, № 5.
3. **Дискин Б. Е., Тупчиев В. А.** Об асимптотике решения спектральной задачи переноса нейтронов в слое // Сб. науч. тр. каф. прикл. математики Обнинского ин-та атомной энергетики. Обнинск, 1992.
4. **Тупчиев В. А.** Асимптотика решения спектральной задачи переноса нейтронов по малому параметру длины свободного пробега // Дифференциальные уравнения. 1992. 28, № 9.
5. **Bardos C., Santos R., Sentis R.** Diffusion approximation and computation of the critical size // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. 284, N 2. P. 617.
6. **Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. C.** Boundary layer and homogenization of transport processes // J. Publ. RIMS. Kyoto Univ. 1979. N 15. P. 53.
7. **Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. М., 1979.
8. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., 1971.
9. **Лобарев И. В.** Оценки собственных значений некоторого класса самосопряженных операторов /Под ред. А. В. Цецеко. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984.
10. **Владимиров В. С.** Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. М.: Изд-во АН СССР, 1961, № 59.

Поступила в редакцию 29 декабря 1994 г.