

УДК 621.391.266

И. Л. Егошина, А. И. Михайлов, Я. А. Фурман

(Йошкар-Ола)

ОЦЕНКА СТЕПЕНИ СХОДСТВА ДВУХ ПЛОСКИХ ФОРМ

Рассматривается вопрос об оценке степени различия двух произвольных изображений по форме, задаваемой их контурами. Показано, что такую оценку можно получить при максимизации модуля выходного сигнала контурного согласованного фильтра. При дискриминации близких по форме изображений такую оценку целесообразно определять на выходе только синусного звена фильтра.

Введение. Контурные плоских изображений задают формы этих изображений и содержат дополнительную информацию, связанную с масштабом, углом поворота и положением начальной точки [1]. При установлении степени сходства форм двух изображений по их контурам эта информация не позволяет однозначно количественно оценить такое сходство. В связи с этим возникает задача «подгонки изображений», т. е. нахождения комбинации параметров линейных преобразований изображения — масштаба $|\mu|$, угла поворота $\Delta\varphi$ и сдвига d начальной точки его контура, при которых расстояние R между контурами двух изображений становится минимальным [2, 3]. Величина R_{\min} этого расстояния принимается в качестве меры сходства изображений по их форме.

Контурные изображений будем считать заданными в полигональном виде, т. е. как последовательность составляющих их элементарных векторов (ЭВ), и обозначать заглавными буквами греческого алфавита, а сами ЭВ — соответствующими строчными буквами (рис. 1). Например,

$$\Gamma = \{\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(k-1)\} = \{\gamma(n)\}_{0, k-1},$$

здесь k — размерность контура. Предположим также, что размерность рассматриваемых контуров одинакова. При необходимости выравнивание размерности контуров достигается с помощью процедуры эквализации [4]. Контурные зададим в комплексном линейном пространстве C^k , т. е.

$$\gamma(n) = \gamma_1(n) + iy_2(n) = |\gamma(n)| \exp\{i\varphi(n)\}, \quad n = 0, 1, \dots, k-1, \quad (1)$$

где $|\gamma(n)|$ и $\varphi(n)$ — соответственно модуль и аргумент ЭВ $\gamma(n)$.

Выбор такого представления контуров вызван большей информативностью скалярного произведения (Γ, N) двух контуров $\Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1}$ и $N = \{\nu(n)\}_{0, k-1}$ в пространстве C^k , чем в действительном пространстве E^{2k} [5].

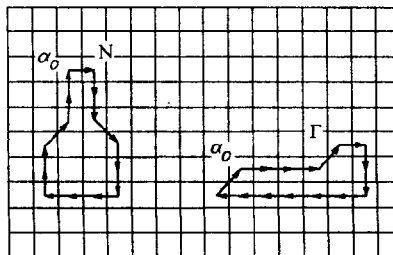


Рис. 1. Контурные изображений в полигональном виде

Расстояние между двумя контурами в C^k равно

$$R^2 = \|\Gamma\|^2 + \|N\|^2 - 2\operatorname{Re}(\Gamma, N),$$

где $\|\Gamma\|$ и $\|N\|$ — нормы контуров Γ и N .

Наша задача состоит в получении одного из подходов нахождения меры сходства форм, задаваемых контурами Γ и N , путем максимизации реальной части их скалярного произведения (Γ, N) . При этом будет использован аппарат согласованной фильтрации [6]. Контурные согласованные фильтры (КСФ) осуществляют процедуру скалярного произведения контуров Γ и N , при которой начальная точка одного из контуров последовательно совмещается с каждым из ЭВ [7, 8]:

$$\eta(d) = \sum_{n=0}^{k-1} v(n)\gamma^*(n+d-k+1), \quad d = 0, 1, \dots, k-1. \quad (2)$$

КСФ служат основой построения устройств обнаружения и распознавания зашумленных форм, а также оценки их параметров [4]. Поэтому определение меры R_{\min} на базе таких фильтров позволяет проводить контурный анализ с единых теоретических позиций. Данная статья имеет инженерную направленность. Вначале рассматривается характер влияния изменения масштаба, угла поворота и сдвига начальной точки контуров на величину расстояния между контурами, а затем получаются расчетные соотношения для меры сходства двух контуров в виде нормированной величины R_{\min}^2 .

Влияние линейных преобразований контуров на величину расстояния между ними. Обозначим через $\Gamma_{\mu}^{(d)}$ контур Γ , повернутый на угол $\Delta\varphi$, растянутый в $|\mu|$ раз и со сдвинутой на d ЭВ начальной точкой, т. е.

$$\Gamma_{\mu}^{(d)} = \{\mu\gamma(n+d)\}_{0, k-1}; \quad \mu = |\mu| \exp(i\Delta\varphi).$$

Контур Γ и $\Gamma_{\mu}^{(d)}$ в дальнейшем будем называть подобными [3]. Исследуем изменение расстояния между этими контурами для случая, когда их начальные точки совпадают, т. е. $d = 0$, а параметры $|\mu|$ и $\Delta\varphi$ произвольны. Тогда

$$\Gamma_{\mu} = \{\mu\gamma(n)\}_{0, k-1} = \{|\mu| \exp\{i\Delta\varphi\}\gamma(n)\}_{0, k-1},$$

норма преобразованного контура $\|\Gamma_{\mu}\| = |\mu| \|\Gamma\|$, а искомый нормированный квадрат расстояния

$$R_H^2 = R^2 / \|\Gamma\|^2 = 1 + |\mu|^2 - 2|\mu| \cos\Delta\varphi. \quad (3)$$

Из данного выражения следуют частные случаи:

$$\Delta\varphi = 0, \quad R_H^2 = (1 - |\mu|)^2 \quad \text{и} \quad |\mu| = 1, \quad R_H^2 = 2(1 - \cos\Delta\varphi).$$

Графики зависимости расстояния между подобными контурами от $|\mu|$ и $\Delta\varphi$ для этих случаев представлены на рис. 2. Если $\Delta\varphi = 0$, $|\mu| = 1$ и происходит сдвиг начальных точек подобных контуров, то

$$R_H^2 = 2[1 - \operatorname{Re}\eta_{C^k, H}] = 2[1 - \eta_{E^{2k}, H}(d)], \quad (4)$$

где $\eta_{C^k, H} = \eta_{C^k} / \|\Gamma\|^2$ и $\eta_{E^{2k}, H} = \eta_{E^{2k}} / \|\Gamma\|^2$ — нормированные скалярные произведения контуров соответственно в пространствах C^k и E^{2k} , причем $\eta_{E^{2k}} = \operatorname{Re}\eta_{C^k}$.

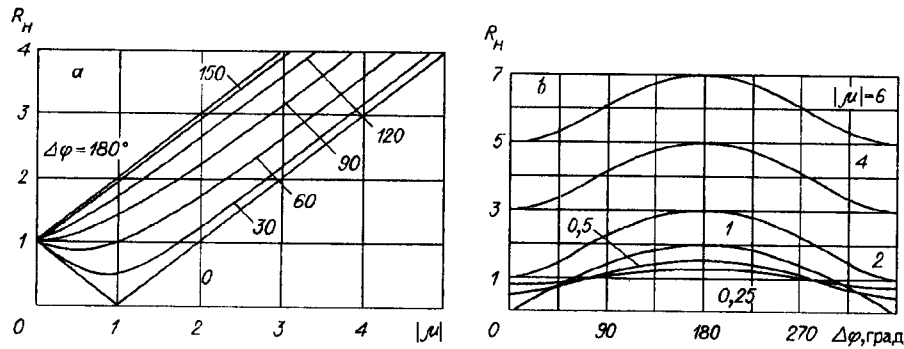


Рис. 2. Графики зависимости нормированного расстояния между подобными контурами при $d = 0$ от изменения масштаба (а) и угла поворота (б)

В наиболее общем случае, когда контур подвергается растяжению, повороту и сдвигу,

$$R_N^2 = 1 + |\mu|^2 - 2|\mu| \operatorname{Re} \eta_N(d) \cos \Delta \varphi. \quad (5)$$

Полученные для R_N^2 соотношения показывают, что данная величина является функцией параметров $|\mu|$, $\Delta \varphi$ и d линейных преобразований контура. Поскольку эти преобразования не меняют формы изображения, то расстояние из-за неинвариантности к указанным параметрам не может быть принято в качестве сходства двух форм.

Инвариантность расстояния между нормированными контурами к масштабу изображений и сдвигу начальных точек. Пусть $N_N = N / \|N\|$ и $\Gamma_N = \Gamma / \|\Gamma\|$ — два произвольных нормированных контура. Квадрат расстояния между ними

$$R_N^2 = 2(1 - \operatorname{Re} \eta_N). \quad (6)$$

Из этого выражения видно, что единственной существенной операцией для нахождения R_N^2 является получение нормированного скалярного произведения η_N . Рассмотрим влияние отдельных видов линейных преобразований на величину R_N^2 .

Масштабирование. Пусть один из контуров растянут в $|\mu|$ раз, например, $\Gamma_{|\mu|} = |\mu| \Gamma$. Тогда

$$R_N^2 = 2 \left[1 - |\mu| \operatorname{Re}(N, \Gamma) / |\mu| \|N\| \|\Gamma\| \right] = 2(1 - \operatorname{Re} \eta_N).$$

Сравнивая полученное выражение с предыдущим, видим, что они совпадают, т. е. масштабирование не привело к различию расстояний между нормированными контурами.

Поворот и сдвиг начальных точек. При повороте изображения на произвольный угол $\Delta \varphi$ норма его контура не меняется. С учетом этого выражение (6) принимает вид:

$$\begin{aligned} R_N^2 &= 2 - \eta_{N,c}^k \exp\{-i\Delta\varphi\} - \eta_{N,c}^{*k} \exp\{i\Delta\varphi\} = \\ &= 2(1 - \operatorname{Re} \eta_{N,c}^k \cos \Delta \varphi - \operatorname{Im} \eta_{N,c}^k \sin \Delta \varphi). \end{aligned}$$

Если контуры N и Γ подобны и их начальные точки совпадают, т. е. $d = 0$, то $\operatorname{Re} \eta_{N,c}^k = 1$ и $\operatorname{Im} \eta_{N,c}^k = 0$.

В этом случае $R_N^2 = 2(1 - \cos \Delta \varphi)$. Отсюда видно, что нормирование контуров не привело к инвариантности расстояния между ними от угла взаимного поворота. Также остается зависимость расстояния от сдвига начальной точки

любого контура. Если считать, что угол взаимного поворота нормированных контуров равен нулю, т. е. $\Delta\varphi = 0$, то квадрат расстояния между ними будет характеризовать различие задаваемых ими форм и параметрически зависеть от взаимного сдвига d начальных точек:

$$R_H^2 = 2 \left[1 - \operatorname{Re} \eta_{H, c^k}(d) \right]. \quad (7)$$

Расстояние при этом становится минимальным при совпадении начальных точек контуров, а реальная часть скалярного произведения $\eta_{H, c^k}(d)$ — максимальной.

Таким образом, если поворот между контурами отсутствует, то для исключения влияния на расстояние между ними преобразований масштабирования и сдвига начальных точек необходимо перейти к нормированным контурам и использовать значение нормированного скалярного произведения с максимально возможной реальной частью.

Исключение влияния на расстояние между контурами угла их взаимного поворота. Пусть контуры N и Γ пронормированы, их начальные точки совпадают, т. е. $d = 0$, а угол взаимного поворота $\Delta\varphi$ произволен. Нормированное скалярное произведение контуров при $\Delta\varphi \neq 0$ является комплексным числом

$$\eta_{H, \Delta\varphi, c^k}(d) = \exp\{i\Delta\varphi\} \eta_{H, c^k}(d),$$

а размер его реальной части будет меньше реальной части при $\Delta\varphi = 0$. Этим и проявляется в конечном счете влияние угла поворота на расстояние между контурами. Для исключения такого влияния необходимо до вычисления квадрата расстояния между контурами повернуть вектор нормированного скалярного произведения $\eta_{H, \Delta\varphi, c^k}(d) = \left| \eta_{H, \Delta\varphi, c^k}(d) \right| \exp\{i\psi(m)\}$ на угол, равный

$$-\psi(m) = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \eta_{H, \Delta\varphi, c^k}}{\operatorname{Re} \eta_{H, \Delta\varphi, c^k}}.$$

В этом случае вектор нормированного скалярного произведения контуров становится горизонтальным и направленным вправо и его реальная часть совпадает с его модулем, т. е. $\operatorname{Re} \eta_{H, \Delta\varphi, c^k}(d) = \left| \eta_{H, \Delta\varphi, c^k}(d) \right|$. Тогда величина

$$R_H^2 = 2 \left[1 - \left| \eta_{H, \Delta\varphi, c^k}(d) \right| \right] \quad (8)$$

при данном значении параметра d сдвига начальных точек будет минимальной. Это расстояние достигает глобального минимума при величине d , при этом модуль нормированного скалярного произведения контуров достигает максимума:

$$R_{H, \min}^2 = 2 \left[1 - \left| \eta_{H, \Delta\varphi, c^k}(d) \right|_{\max} \right], \quad d = 0, 1, \dots, k-1. \quad (9)$$

Полученное значение $R_{H, \min}^2$ может определять сходство двух плоских форм, поскольку влияние разных масштабов устранено выравниванием энергий контуров до стандартного единичного уровня, угол поворота между контурами сведен к нулю, а сдвиг начальных точек контуров выбран таким образом, чтобы формы оказались максимально похожими. При этом для подобных контуров $R_{H, \min}^2 = 0$, а для ортогональных контуров $R_{H, \min}^2 = 2$.

Примером таких форм являются формы, задаваемые элементарными контурами [8, 9]:

$$\Gamma_m = \left\{ \exp\left\{i \frac{2\pi}{k} mn\right\} \right\}_{0, k-1}, \quad m = 0, 1, \dots, k-1.$$

Для этих контуров скалярное произведение $(\Gamma_j, \Gamma_l) = 0$ при $j \neq l$, и поэтому $R_{H, \min}^2 = 2$ при $j \neq l$ и $R_H^2 = 0$ при $j = l$.

Чтобы найти меру различия форм, задаваемых произвольными контурами N и Γ в виде расстояния R_{\min}^2 между ними, необходимо:

1) сформировать комплекснозначные коды контуров

$$N = \{\nu(n)\}_{0, k-1} \quad \text{и} \quad \Gamma = \{\gamma(n)\}_{0, k-1};$$

2) вычислить k значений их нормированного скалярного произведения

$$\eta_{N, \Gamma}^k(d) = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \nu(n) \gamma^*(n+d) \right] / \|N\| \|\Gamma\|;$$

3) определить модуль каждого из этих значений:

$$|\eta_{N, \Gamma}^k(d)|, \quad d = 0, 1, \dots, k-1,$$

и выбрать из них максимальный: $|\eta_{N, \Gamma}^k(d)|_{\max}$;

4) подставить найденное максимальное значение модуля нормированного скалярного произведения в выражение (9) и найти квадрат расстояния между контурами.

Формирование меры сходства форм на базе контурного согласованного фильтра. Выражение (9) для оценки сходства форм плоских изображений содержит только одну переменную — максимальное нормированное значение модуля скалярного произведения контуров этих изображений. Она изменяется в пределах от нуля (для ортогональных контуров) до единицы (для подобных контуров). Данная величина может быть получена в результате работы КСФ (см. (2)) путем выделения максимума модуля величины $\eta(d)$ и деления его на произведение норм входного контура N и контура Γ импульсной характеристики фильтра (рис. 3).

Ряд изображений естественных объектов, например, озер, лесных массивов и других, могут быть близкими по форме, что приводит к слабому различию степени их сходства, получаемой в результате работы КСФ. Учитывая важность задач различия таких объектов, рассмотрим особенности построения контурных фильтров с высокой эффективностью при работе с близкими формами.

Будем предполагать, что изложенными выше способами контуры двух близких по форме изображений имеют одинаковый масштаб, согласованы по углу поворота и положению начальных точек. Два изображения назовем близкими по форме, если соответствующие ЭВ их контуров слабо отличаются друг от друга, т. е.

$$\eta(k-1) \approx \|\Gamma\|^2 + \sum_{n=0}^{k-1} |\gamma(n)|^2 \Delta\varphi(n), \quad n = 0, 1, \dots, k-1, \quad (10)$$

где $|\Delta\varphi(n)| = \arg\gamma(n) - \arg\nu(n)$.

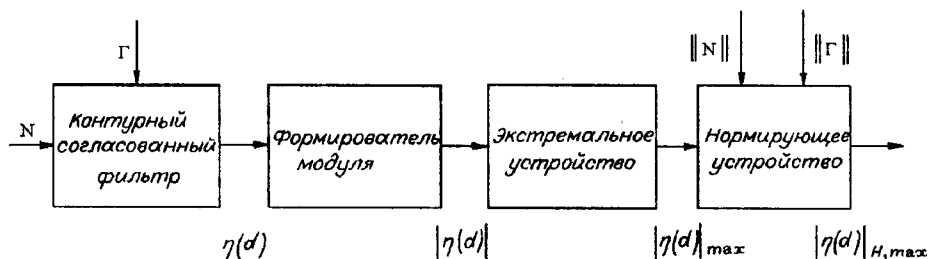


Рис. 3. Структура устройства для определения сходства двух форм

С учетом этих соотношений контуры близких по форме изображений запишем в виде

$$N = \{ |\gamma(n)| \exp\{i[\varphi(n) + \Delta\varphi(n)]\} \}_{0, k-1}; \quad \Gamma = \{ |\gamma(n)| \exp\{i\varphi(n)\} \}_{0, k-1},$$

а выражение (2) для ненормированной выходной величины КСФ при $d = k - 1$ представится как

$$\eta(k-1) = \eta_1 + i\eta_2 \approx \sum_{n=0}^{k-1} |\gamma(n)|^2 \cos\Delta\varphi(n) + i \sum_{n=0}^{k-1} |\gamma(n)|^2 \sin\Delta\varphi(n). \quad (11)$$

Так как по условию угол $\Delta\varphi(n)$ достаточно мал, то

$$\eta(k-1) \approx \|\Gamma\|^2 + \sum_{n=0}^{k-1} |\gamma(n)|^2 \Delta\varphi(n). \quad (12)$$

Отсюда следует, что величина на выходе косинусной части КСФ значительно превышает величину $\eta_2 = \text{Im}\eta(k-1) \approx \sum_{n=0}^{k-1} |\gamma(n)|^2 \Delta\varphi(n)$ на выходе

синусной части фильтра и в то же время незначительно меняется при вариации формы. Синусная часть КСФ хорошо реагирует на небольшие изменения формы, но при этом $|\eta_2| \ll |\eta_1|$. В результате при использовании модуля $|\eta(k-1)|$ в качестве выходной величины КСФ для получения сходства форм происходит маскировка выходного эффекта, образуемого небольшой по значению, но остро реагирующей на вариацию формы величины $|\eta_2|$, слабо изменяющейся величиной $|\eta_1|$, значительно превосходящей $|\eta_2|$.

Выясним на качественном уровне структуру близости форм, получаемую в результате образования величины (11). Ее первое слагаемое η_1 тем больше, чем меньше отличаются соответствующие ЭВ контуров N и Γ по модулю и аргументу. Второе слагаемое η_2 ведет себя противоположным образом. Поэтому для близких форм косинусная часть выходного сигнала КСФ отражает их сходство, а синусная часть — различие. Так как интервал значений угла $\Delta\varphi(n)$, $n = 0, 1, \dots, k-1$, расположен вблизи нуля, то из-за большой скорости изменения синуса в этом интервале синусная часть сигнала КСФ будет более чувствительна к слабым изменениям формы. В то же время косинусная часть сигнала КСФ из-за слабого изменения значений косинуса в диапазоне $\Delta\varphi(n)$ будет незначительно реагировать на несовпадение форм.

Рассмотрим теперь вопрос о различии близких по форме изображений, фрагменты которых имеют ось симметрии. Наличие таких фрагментов приводит к тому, что аргументы симметричных ЭВ будут отличаться только знаками. В результате в указанном диапазоне значений $\Delta\varphi(n)$ синусные составляющие компенсируют друг друга, а косинусные — накапливаются. Поэтому выходной эффект при фильтрации таких фрагментов определяется только косинусной частью КСФ, слабо чувствительной к изменению формы. Таким образом, для симметричных и близких по форме изображений полезный эффект не только маскируется слабо меняющейся, но преобладающей косинусной составляющей, но и в значительной степени компенсируется за счет близки между собой по размеру, но разных по знаку синусных компонент.

Демаскировка выходного эффекта КСФ может быть достигнута устранением косинусной составляющей, а компенсация синусных составляющих — путем суммирования модулей этих составляющих. Тогда нормированный эффект фильтрации представляется в виде

$$\eta_{2,н} \approx \frac{\eta_2}{\|\Gamma\|^2} \approx \frac{1}{\|\Gamma\|^2} \sum_{n=0}^{k-1} |\gamma(n)|^2 |\Delta\varphi(n)|. \quad (13)$$

Эту величину целесообразно принять в качестве меры различия близких по форме изображений.

Пример 1. Оценим сходство форм, контуры которых

$$N = \{1, -i, -i, 1 - i, -i, -i, -1, -1, -1, i, i, 1 + i, i, i\}$$

и

$$\Gamma = \{1, 1, 1, 1 + i, 1, -i, -i, -1, -1, -1, -1, -1, 1 + i\}$$

показаны на рис. 1. На рис. 4 приведены графики изменения нормированного расстояния R_H^2 и модуля нормированного скалярного произведения от сдвига начальной точки d . Кривая 1 построена для случая, когда на расстояние влияют поворот изображения и сдвиг начальной точки контура. Квадрат расстояния $R_{H, \Delta\varphi, d}^2$ меняется в достаточно широких пределах, достигая минимального значения, равного 1,0 при $d = 10, 11$. Кривая 2 отражает поведение модуля нормированного скалярного произведения $|\eta_H(d)|$, достигая максимума при $d = 1$. Кривая 3 описывает поведение квадрата расстояния R_H^2 (см. (12)) в зависимости только от сдвига начальной точки контура. Эта величина достигает минимума $R_{H, \min}^2 = 0,37$ при $d = 1$ и может служить мерой сходства форм изображений.

Пример 2. Рассмотрим определение сходства для близких по форме изображений стрелки, представленных на рис. 5. Коды контуров имеют вид

$$\Gamma = \{20; i; 5 - 3i; -5 - 3i; i; -20; 4i\};$$

$$N_1 = \{20 + i; i; 5 - 3i; -5 - 3i; i; -20 - i; 4i\};$$

$$N_2 = \{20 + 2i; i; 5 - 3i; -5 - 3i; i; -20 - 2i; 4i\};$$

$$N_3 = \{20 + i; i; 5 - 3i; -5 - 3i; i; -20 + i; 2i\}.$$

Нормированные отсчеты КСФ, согласованного с контуром Γ , и модуль этих отсчетов в момент $m = k - 1 = 6$ имеют вид

$$\eta_{N_1, H}(6) = 0,99887 - 0,04510i; \quad |\eta_{N_1, H}(6)| = 0,99989;$$

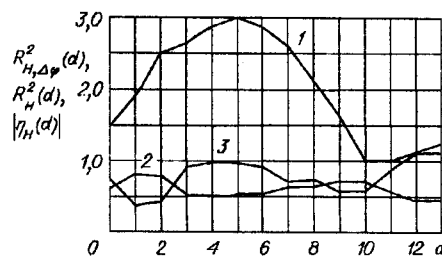
$$\eta_{N_2, H}(6) = 0,99552 - 0,08989i; \quad |\eta_{N_2, H}(6)| = 0,99957;$$

$$\eta_{N_3, H}(6) = |\eta_{N_3, H}(6)| = 0,99661.$$

Из приведенных данных видно, что по величине $|\eta_H(k - 1)|$ трудно судить об отличии контуров N_1, N_2, N_3 от контура Γ , так как значения этого модуля очень близки друг к другу.

Поэтому в качестве результата фильтрации, определяющего различие этих близких форм, целесообразно использовать только мнимую часть выходного сигнала фильтра. Если отношение модулей $|\eta_{N_1, H}(6)|$ и $|\eta_{N_2, H}(6)|$ равно 1,00032, что свидетельствует о большой степени близости рассматриваемых форм, то отношение мнимых частей $\eta_{2, N_1, H}(6)$ и $\eta_{2, N_2, H}(6)$, равное 0,50172, позволяет уверенно констатировать различие между рассматриваемыми формами.

Рис. 4. Графики изменения нормированного расстояния R_H^2 и модуля нормированного скалярного произведения от сдвига начальной точки d



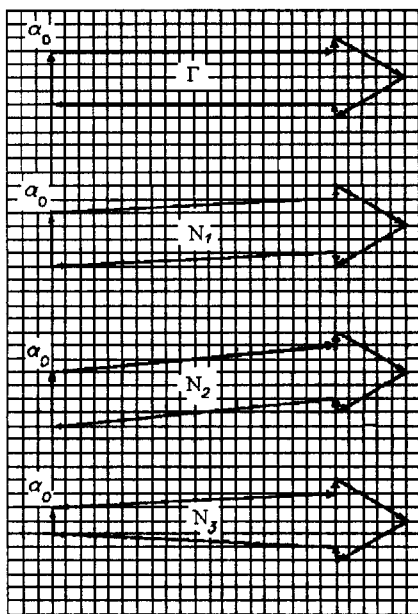


Рис. 5. Контуры близких по форме изображений стрелки

Контур N_3 имеет симметричные фрагменты, и при его фильтрации происходит полная компенсация мнимых компонент, и результат фильтрации оказывается чисто вещественным, т. е. $\eta_2 = 0$. Этот результат слабо отличается от единицы, так как различие между контурами Γ и N_3 не только маскируется, но и компенсируется. Если же воспользоваться выражением (13), то получим, что $\eta_{2,н} = 0,0451$, т. е. отличие контура N_3 от контура Γ такое же, как и для контура Γ_1 .

Заключение. Проведенный анализ показал возможность получения количественной оценки сходства форм плоских изображений в виде евклидова расстояния между комплекснозначными кодами их контуров, рассматриваемых как векторы.

Независимость данной оценки от поворота, изменения масштаба изображения и сдвига начальной точки его контура достигается в результате использования в выражении для расстояния между комплекснозначными векторами максимального значения модуля нормированного скалярного произведения этих векторов.

Размер этого модуля получается при фильтрации одного из контуров изображения фильтром, согласованным с контуром другого изображения. Анализ работы такого фильтра при получении оценки сходства очень близких форм, предварительно согласованных по углу взаимного поворота и сдвигу начальных точек контуров, показал, что косинусное звено фильтра вырабатывает оценку сходства, а синусное звено — различия форм. При этом слабое изменение функции косинуса вблизи нулевого значения аргумента и его близкое к единице значение маскируют резко изменяющийся, но очень малый размер функции синуса. В результате выходной сигнал фильтра для близких форм слабо реагирует на их различие. Поэтому в качестве оценки различия очень близких форм целесообразно использовать сигнал только на выходе синусного звена фильтра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фурман Я. А. О понятии формы плоского изображения // Автометрия. 1992. № 5.
2. Richard C., Hemani H. Identification of tree-dimensional objects using Fourier descriptors of the boundary curve // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. 1974. SMS-4, N 4. P. 371.
3. Persoon E., Fu K. Shape discrimination using Fourier descriptors // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. 1977. SMS-7, N 3. P. 170.
4. Furman Ya. A., Yanshin V. V. Extraction and linear filtering of closed polygonal contours of images // Pattern Recognition and Image Analysis. 1994. 4, N 2. P. 146.
5. Ефимов Н. В., Розендорн Э. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974.
6. Василенко Г. И. Голографическое опознавание образов. М.: Сов. радио, 1977.
7. Фурман Я. А. Оценки параметров линейных преобразований зашумленных контуров изображений // Автометрия. 1992. № 3.
8. Furman Ya. A., Yanshin V. V. Spectral analysis and filtering of closed polygonal contours of images // Pattern Recognition and Image Analysis. 1992. 2, N 3. P. 306.
9. Фурман Я. А. О двух замечательных видах замкнутых контуров изображений // Радиотехника и электроника. 1993. № 6.

Поступила в редакцию 7 декабря 1994 г.