РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1995

УДК 681.3.08

Т. А. Алиев, Н. Ф. Мусаева

(Баку, Азербайджан)

АЛГОРИТМ УМЕНЬШЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СИГНАЛА С ШУМОМ

Предлагается метод улучшения оценки корреляционной функции смеси полезного сигнала с шумом. На его основе разработан алгоритм коррекции с компенсацией погрешностей. Показано, что матричное уравнение с плохо обусловленной корреляционной матрицей в результате применения этого алгоритма в достаточной степени приближается к соответствующему уравнению, в котором погрешности элементов матрицы компенсированы.

Введение. Известно, что микропроцессорные системы реального времени (МСР), используемые в промышленности и научных исследованиях, а также персональные компьютеры для научных исследований (ПК НИ) решают огромный круг задач, связанных главным образом с измерением, обработкой, передачей разнообразной информации. Кроме того, в зависимости от функционального назначения МСР и ПК НИ позволяют также решать многие типовые задачи, связанные с многомерными стохастическими процессами идентификации, оптимизации, анализа, адаптации, диагностики и т. д. Для решения этих задач, в свою очередь, требуется иметь матрицы взаимных корреляционных функций входных и выходных сигналов [1—3].

Однако на практике при решении перечисленных задач для реальных объектов оценки авто- и взаимно корреляционных функций содержат определенные погрешности. В то же время применяемые методы решения этих задач весьма чувствительны к неточностям в исходных данных. По этой причине во многих случаях корреляционные матрицы оказываются плохо обусловленными, а полученное решение — неудовлетворительным. Это является одним из основных факторов, препятствующих более широкому применению известных статистических методов в МСР и ПК НИ [1—3].

Для устранения вышеуказанных трудностей предложены различные алгоритмы уменьшения погрешностей элементов корреляционных матриц. Однако несмотря на определенные достижения они не всегда дают желаемый эффект [3—6].

В связи с этим ощущается острая необходимость в разработке новых алгоритмов и пакетов прикладных программ, ориентированных на устранение трудностей, вызванных плохой обусловленностью корреляционных матриц. Данная работа посвящена одному из возможных вариантов решения этой проблемы.

Постановка задачи. Рассмотрим трудности, с которыми сталкиваются при решении на персональных компьютерах задач идентификации, оптимизации, диагностики, адаптации и т. д., на примере идентификации статики непрерывного технологического процесса.

Известно, что при определении связей между входными $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_m(t)$ и выходным $y(t)$ технологическими параметрами применяют регрессионный анализ, который в матричной форме сводится к решению задачи:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_x^{-1}(0)\mathbf{R}_{xy}(0), \tag{1}$$

где $\mathbf{B}$ — матрица-столбец коэффициентов; $\mathbf{R}_x(0)$ — матрица оценок авто- и взаимно корреляционных функций $R_{\mathring{x}_i\mathring{x}_j}(0)$ при $\tau = 0$ между центрированными значениями входных сигналов $\mathring{x}_i(t)$; $\mathbf{R}_x^{-1}(0)$ — матрица, обратная $\mathbf{R}_x(0)$; $\mathbf{R}_{xy}(0)$ — матрица-столбец взаимно корреляционных функций $R_{\mathring{x}_i\mathring{y}}(0)$ при $\tau = 0$ между центрированными значениями входных и выходных параметров $\mathring{y}(t)$ ($\mathring{x}_i(t) = x_i(t) - m_{x_i}$, $\mathring{y}(t) = y(t) - m_y$, m_{x_i}, m_y — математические ожидания соответственно сигналов $x_i(t)$, $y(t)$; $i, j, \overline{1, m}$).

Однако из-за наличия в значениях исходных данных $x_i(t)$, $y(t)$ помех $\mathring{\varepsilon}_i(t)$, $\mathring{\varphi}(t)$, которые подчиняются нормальному закону распределения с математическими ожиданиями $m_{\varepsilon_i} \approx 0$, $m_\varphi \approx 0$, равенство (1) принимает вид

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{R}_g^{-1}(0)\mathbf{R}_{g\eta}(0), \tag{2}$$

где $\mathbf{R}_g(0)$ — матрица оценок авто- и взаимно корреляционных функций $R_{\mathring{g}_i\mathring{g}_j}(0)$; $\mathbf{R}_{g\eta}(0)$ — матрица-столбец взаимно корреляционных функций

$$R_{\mathring{g}_i\mathring{\eta}}(0) \quad (\mathring{g}_i(t) = \mathring{x}_i(t) + \mathring{\varepsilon}(t), \quad \mathring{\eta}(t) = \mathring{y}(t) + \mathring{\varphi}(t)).$$

При этом из-за погрешностей $\lambda_{\mathring{x}_i\mathring{x}_j}(\tau)$, $\psi_{\mathring{x}_i\mathring{y}}(\tau)$ элементов $R_{\mathring{g}_i\mathring{g}_j}(0)$, $R_{\mathring{g}_i\mathring{\eta}}(0)$ обратная матрица $\mathbf{R}_g^{-1}(0)$ на практике получается неустойчивой, а сама матрица $\mathbf{R}_g(0)$ — плохо обусловленной, что затрудняет, а порой делает невозможным решение задачи (2). В связи с этим необходимо корреляционные матрицы $\mathbf{R}_g(0)$, $\mathbf{R}_{g\eta}(0)$ преобразовать к такому виду, чтобы матричное уравнение (2) по возможности было лишено указанных недостатков и максимально приближалось по своим свойствам к уравнению (1) с матрицами, состоящими из тех же элементов, но с компенсированными погрешностями.

Известно [4—6], что основной причиной, приводящей к плохой обусловленности корреляционных матриц, является совокупность влияния различных погрешностей. Для случая, когда относительная погрешность $\gamma_{g_ig_j}(0)$ для различных элементов корреляционных матриц различна, причем все $\gamma_{g_ig_j}(0) > 0$, влияние погрешности $\lambda_{\mathring{x}_i\mathring{x}_j}(\tau)$ на N_1 — число обусловленности корреляционной матрицы $\mathbf{R}_g(0)$ — определяется по формуле

$$N_1 = \frac{1}{m}\left(\sum_{i,j}\left|R_{\mathring{g}_i\mathring{g}_j}(0)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j}\left|P_{\mathring{g}_i\mathring{g}_j}(0)\right|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{i,j}\left|R_{\mathring{x}_i\mathring{x}_j}(0)(1 + \gamma_{g_ig_j}(0))\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j}\left|P_{\mathring{g}_i\mathring{g}_j}(0)\right|^2\right)^{1/2}, \tag{3}$$

где $P_{\mathring{g}_i\mathring{g}_j}(0)$ — элементы матрицы $\mathbf{R}_g^{-1}(0)$.

Из выражения (3) очевидно, что погрешность исходных данных сильно влияет на значение N_1 — число обусловленности, так как каждый элемент корреляционной матрицы $\mathbf{R}_g(0)$ отличается от своего истинного значения на величину $R_{\mathring{x}_i\mathring{x}_j}(0)\,\gamma_{g_ig_j}(0)$.

Более подробный анализ выражения (3) и многочисленные вычислительные эксперименты показали, что на обусловленность корреляционных матриц существенное влияние оказывает диапазон разброса относительных погрешностей $D[\gamma_{g_i g_j}(0)]$, т. е. условия

$$\begin{cases} \gamma_{g_i g_j}(0) \neq \gamma_{g_k g_l}(0), & i, j, k, l = \overline{1, m}, \\ D[\gamma_{g_i g_j}(0)] \gg 0. \end{cases} \tag{4}$$

Проведенные исследования, результаты которых приводятся ниже, показали, что для улучшения обусловленности корреляционных матриц необходимо компенсацией погрешностей условие (4) свести к виду

$$\begin{cases} \gamma_{g_i g_j}(0) \approx \gamma_{g_k g_l}(0), & i, j, k, l = \overline{1, m}, \\ D[\gamma_{g_i g_j}(0)] \approx 0. \end{cases} \tag{5}$$

Улучшение обусловленности корреляционных матриц на основе уравновешивания погрешностей ее элементов. Известно, что для дискретизированного стационарного случайного сигнала g_ν с нормальным законом распределения, состоящим из сигнала x_ν и помехи $\mathring{\varepsilon}_\nu$ с математическим ожиданием $m_\varepsilon \approx 0$, при вычислении оценок корреляционных функций с использованием традиционных методов имеют место равенства:

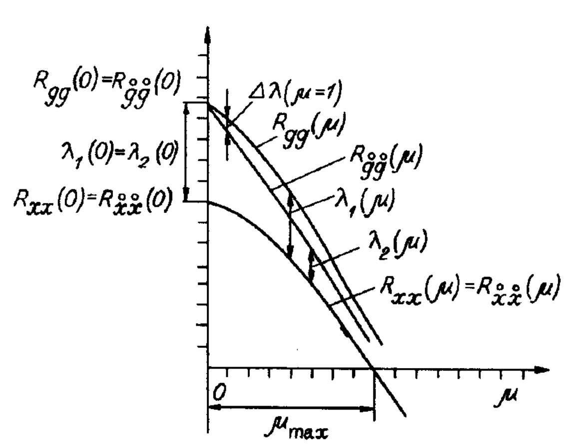
$$R_{xx}(\mu) = R_{gg}(\mu), \qquad R_{\mathring{x}\mathring{x}}(\mu) = R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu), \qquad R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu) = R_{gg}(\mu), \qquad R_{xx}(\mu) = R_{\mathring{x}\mathring{x}}(\mu),$$

где

$$R_{gg}(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu g_{\nu+\mu} - m_g^2 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu + \mathring{\varepsilon}_\nu)(x_{\nu+\mu} + \mathring{\varepsilon}_{\nu+\mu}) - (m_x - m_\varepsilon)^2, \tag{6}$$

$$R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \mathring{g}_\nu \mathring{g}_{\nu+\mu} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} (\mathring{x}_\nu + \mathring{\varepsilon}_\nu)(\mathring{x}_{\nu+\mu} + \mathring{\varepsilon}_{\nu+\mu}). \tag{7}$$

Однако на практике из-за многих известных факторов эти равенства не



выполняются, и в реальности имеют место соотношения, проиллюстрированные на рисунке:

$$R_{gg}(\mu) - R_{xx}(\mu) = \lambda_1(\mu), \tag{8}$$

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) - R_{\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}}(\mu) = \lambda_2(\mu), \tag{9}$$

$$\begin{gathered} R_{gg}(\mu = 0) - R_{xx}(\mu = 0) = \lambda_1(\mu = 0) = \lambda_2(\mu = 0), \\ \left|\lambda_1(\mu \neq 0) - \lambda_2(\mu \neq 0)\right| = \Delta\lambda(\mu \neq 0), \\ \left|R_{gg}(\mu) - R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)\right| = \Delta\lambda(\mu). \end{gathered} \tag{10}$$

Как будет показано ниже, основной причиной появления равенств (8)—(10) являются погрешности, содержащиеся в каждом отдельном произведении $g_\nu g_{\nu+\mu}$, от влияния помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}_\nu$. Влияние помехи на появление погрешностей в произведениях $g_\nu g_{\nu+\mu}$, $x_\nu x_{\nu+\mu}$ и $\overset{\circ}{g}_\nu \overset{\circ}{g}_{\nu+\mu}$, $\overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu}$ можно выявить из выражений (6), (7):

$$\lambda_1(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu g_{\nu+\mu} - m_g^2 - \left[\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu x_{\nu+\mu} - m_x^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu)(x_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}) - (m_x + m_\varepsilon)^2 - \left[\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu x_{\nu+\mu} - m_x^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \left[(\overset{\circ}{x}_\nu + m_x + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu + m_\varepsilon)(\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + m_x + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + m_\varepsilon) - (\overset{\circ}{x}_\nu + m_x)(\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + m_x)\right].$$

С учетом того, что для стационарных случайных процессов с нормальным законом распределения математические ожидания произведений $\overset{\circ}{x}_\nu m_\varepsilon$; $\overset{\circ}{\varepsilon}_\nu m_\varepsilon$; $\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} m_\varepsilon$; $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} m_\varepsilon$; $\overset{\circ}{\varepsilon}_\nu m_x$; $\overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} m_x$; $m_\varepsilon m_x$ можно принять равными нулю, погрешность нецентрированного сигнала представим в виде

$$\lambda_1(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}. \tag{11}$$

Аналогично определяется погрешность центрированного сигнала:

$$\lambda_2(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \overset{\circ}{g}_\nu \overset{\circ}{g}_{\nu+\mu} - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} (\overset{\circ}{x}_\nu + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu)(\overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}) -$$

$$- \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} (\overset{\circ}{x}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{x}_{\nu+\mu} + \overset{\circ}{\varepsilon}_\nu \overset{\circ}{\varepsilon}_{\nu+\mu}). \tag{12}$$

Если для положительных произведений $\overset{\circ}{g}_\nu \overset{\circ}{g}_{\nu+\mu}$ принять индексы суммирования $i = \overline{1, n_\mu^+}$, где n_μ^+ — количество положительных произведений при временном сдвиге μ, а для отрицательных произведений $\overset{\circ}{g}_\nu \overset{\circ}{g}_{\nu+\mu}$ — индексы

$j = \overline{1, n_\mu^-}$, где n_μ^- — количество отрицательных произведений при временном сдвиге μ, то равенство (12) можно представить в виде

$$\lambda_2(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_\mu^+}(\mathring{x}_i\mathring{\varepsilon}_{i+\mu} + \mathring{\varepsilon}_i\mathring{x}_{i+\mu} + \mathring{\varepsilon}_i\mathring{\varepsilon}_{i+\mu}) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n_\mu^-}(\mathring{x}_j\mathring{\varepsilon}_{j+\mu} + \mathring{\varepsilon}_j\mathring{x}_{j+\mu} + \mathring{\varepsilon}_j\mathring{\varepsilon}_{j+\mu}).$$

При этом, как следует из выражений (10)—(12), равенство (10) можно преобразовать следующим образом:

$$\Delta\lambda(\mu = 1) = \left|R_{gg}(\mu = 1) - R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu = 1)\right| =$$
$$= \left|R_{xx}(\mu = 1) + \lambda_1(\mu = 1) - R_{\mathring{x}\mathring{x}}(\mu = 1) - \lambda_2(\mu = 1)\right|.$$

Учитывая, что $R_{xx}(\mu = 1) = R_{\mathring{x}\mathring{x}}(\mu = 1)$, выражение (10) при $\mu = 1$ можно записать в виде

$$\Delta\lambda(\mu = 1) = \left|\lambda_1(\mu = 1) - \lambda_2(\mu = 1)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(\mathring{x}_\nu\mathring{\varepsilon}_{\nu+1} + \mathring{\varepsilon}_\nu\mathring{x}_{\nu+1} + \mathring{\varepsilon}_\nu\mathring{\varepsilon}_{\nu+1}) -\right.$$
$$\left. - \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1^+}(\mathring{x}_i\mathring{\varepsilon}_{i+1} + \mathring{\varepsilon}_i\mathring{x}_{i+1} + \mathring{\varepsilon}_i\mathring{\varepsilon}_{i+1})\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n_1^-}(\mathring{x}_j\mathring{\varepsilon}_{j+1} + \mathring{\varepsilon}_j\mathring{x}_{j+1} + \mathring{\varepsilon}_j\mathring{\varepsilon}_{j+1})\right|\right|.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(\mathring{x}_\nu\mathring{\varepsilon}_{\nu+1} + \mathring{\varepsilon}_\nu\mathring{x}_{\nu+1} + \mathring{\varepsilon}_\nu\mathring{\varepsilon}_{\nu+1}) - \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1^+}(\mathring{x}_i\mathring{\varepsilon}_{i+1} + \mathring{\varepsilon}_i\mathring{x}_{i+1} + \mathring{\varepsilon}_i\mathring{\varepsilon}_{i+1})\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n_1^-}(\mathring{x}_j\mathring{\varepsilon}_{j+1} + \mathring{\varepsilon}_j\mathring{x}_{j+1} + \mathring{\varepsilon}_j\mathring{\varepsilon}_{j+1})\right|,$$

получаем

$$\Delta\lambda(\mu = 1) \approx \left|\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n_1^-}(\mathring{x}_j\mathring{\varepsilon}_{j+1} + \mathring{\varepsilon}_j\mathring{x}_{j+1} + \mathring{\varepsilon}_j\mathring{\varepsilon}_{j+1})\right|. \tag{13}$$

Отсюда следует, что при вычислении корреляционной функции $R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu)$ из общего количества n произведений $\mathring{g}_\nu\mathring{g}_{\nu+1}$ определенная часть n_1^- произведений $\mathring{g}_\nu\mathring{g}_{\nu+1}$ с отрицательным знаком является причиной появления $\Delta\lambda(\mu = 1)$, и благодаря этому на практике имеет место равенство (10). Очевидно, что общее количество погрешностей, которое удалось бы обработать вышеуказанным способом, в n/n_1^- раз больше, чем $\Delta\lambda(\mu = 1)$. Исходя из этого, можно определить общую погрешность при $\mu = 0$, вызванную наличием помехи $\mathring{\varepsilon}_\nu$, по следующей приближенной формуле:

$$\lambda(\mu = 0) \approx (n/n_1^-)\Delta\lambda(\mu = 1). \tag{14}$$

Таким образом, согласно приведенным формулам, определение погрешностей оценок корреляционной функции $R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu = 0)$ сводится к вычислению разности между $R_{gg}(\mu = 1)$ и $R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu = 1)$, нахождению количества n_1^- отрицательных произведений $\mathring{g}_\nu \mathring{g}_{\nu+1}$ и умножению найденной разности на коэффициент n/n_1^-.

При этом коррекцию оценок корреляционных функций можно осуществить по выражению

$$R^*_{\mathring{x}\mathring{x}}(\mu = 0) = R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu = 0) - \lambda(\mu = 0). \tag{15}$$

При определении погрешности для оценок взаимно корреляционных функций $R_{\mathring{g}\mathring{\eta}}(0)$ алгоритм (14) приобретает вид:

$$\lambda(\mu = 0) \approx (n/n_0^-)\Delta\lambda(\mu = 0), \tag{16}$$

где

$$\Delta\lambda(\mu = 0) = \left| R_{g\eta}(\mu = 0) - R_{\mathring{g}\mathring{\eta}}(\mu = 0) \right|.$$

Это связано с тем, что при вычислении взаимно корреляционных функций $R_{\mathring{g}\mathring{\eta}}(0)$ центрированных сигналов $\mathring{g}_\nu$, $\mathring{\eta}_\nu$ определенное количество n_0^- отрицательных произведений $\mathring{g}_\nu \mathring{\eta}_\nu$ появляется в первой же точке $\mu = 0$. Поэтому оценки $R_{g\eta}(0)$ и $R_{\mathring{g}\mathring{\eta}}(0)$, вычисленные для нецентрированных и центрированных сигналов, будут отличаться уже при $\mu = 0$.

Формулу для определения средней погрешности $\langle \Delta\lambda(\mu = 1) \rangle$, которая обнаруживается в результате появления одного отрицательного произведения, можно представить в виде

$$\langle \Delta\lambda(\mu = 1) \rangle = (1/n_1^-)\Delta\lambda(\mu = 1), \tag{17}$$

а для определения погрешностей оценок $R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu)$ при различных временных сдвигах μ между $\mathring{g}_\nu$ и $\mathring{g}_{\nu+\mu}$ будет справедлива формула

$$\lambda(\mu) \approx (n_\mu^+ - n_\mu^-)\langle \Delta\lambda(\mu = 1) \rangle. \tag{18}$$

Согласно этой формуле, вычисление погрешности $\lambda(\mu)$ после определения $\Delta\lambda(\mu = 1)$ и $\langle \Delta\lambda(\mu = 1) \rangle$ сводится к определению разности между n_μ^+, n_μ^- и умножению этой разности на $\langle \Delta\lambda(\mu = 1) \rangle$.

Начиная с временного сдвига $\mu = \mu_{\max}$, исчезает корреляция между $\mathring{g}_\nu$ и $\mathring{g}_{\nu+\mu}$ и выполняются равенства: $n_\mu^+ \approx n_\mu^-$; $\lambda(\mu_{\max}) \approx 0$.

Все вышеописанные рассуждения справедливы для случая, когда в процессе вычисления оценок корреляционных функций $R_{\mathring{g}\mathring{g}}(\mu)$ средние размеры положительных и отрицательных произведений $\mathring{g}_\nu \mathring{g}_{\nu+\mu}$ равны, т. е.

$$\Pi^+(\mu) \approx \Pi^-(\mu),$$

где

$$\Pi^+(\mu) = (1/n_\mu^+) \sum_{i=1}^{n_\mu^+} \left| \mathring{g}_i \mathring{g}_{i+\mu} \right|; \qquad \Pi^-(\mu) = (1/n_\mu^-) \sum_{j=1}^{n_\mu^-} \left| \mathring{g}_j \mathring{g}_{j+\mu} \right|.$$

В то же время, согласно выражениям (11)—(13), погрешности $\lambda_1(\mu)$, $\lambda_2(\mu)$, $\langle\Delta\lambda(\mu = 1)\rangle$, $\Delta\lambda(\mu = 1)$, $\lambda(\mu = 0)$, $\lambda(\mu)$ зависят как от помехи $\mathring{\varepsilon}_\nu$, так и от значений множителей $\mathring{x}_\nu$, $\mathring{x}_{\nu+\mu}$. Поэтому в тех случаях, когда $\Pi^+(\mu) \neq \Pi^-(\mu)$, для определения более точного значения средней погрешности $\langle\Delta\lambda(\mu)\rangle$ необходимо использовать коэффициент $k(\mu)$, определяемый как

$$k(\mu) = \begin{cases} \Pi^+(\mu)/\Pi^-(\mu) & \text{при} \quad \Pi^+(\mu) > \Pi^-(\mu), \\ \Pi^-(\mu)/\Pi^+(\mu) & \text{при} \quad \Pi^-(\mu) > \Pi^+(\mu). \end{cases}$$

В этом случае корректированное значение средней и общей погрешности будет определяться по выражениям

$$\langle\Delta\lambda(\mu)\rangle_{\text{кор}} = \langle\Delta\lambda(\mu)\rangle k(\mu), \tag{19}$$

$$\lambda(\mu) \approx (n_\mu^+ - n_\mu^-)\langle\Delta\lambda(\mu)\rangle k(\mu). \tag{20}$$

Из выражений (11)—(14), (16)—(20) следует, что для каждого фиксированного размера μ значения $\Delta\lambda(\mu)$, $\lambda(\mu = 0)$, $\lambda(\mu)$ зависят также от размеров множителей и помехи $\mathring{\varepsilon}_\nu$. При этом, как очевидно из выражения (13), при увеличении амплитуды помехи в l раз выявленная погрешность $\Delta\lambda(\mu)$ также увеличивается в l раз, и наоборот.

Следовательно, алгоритмы (11)—(14), (16)—(20) в определенной степени обладают свойством уравновешивания погрешностей элементов корреляционных матриц. Благодаря этому сужается диапазон разброса относительных остаточных погрешностей $D[\gamma_{g_i g_j}(0)]$ оценок элементов, т. е. выполняется условие (5). В результате выражение (3) преобразуется к виду:

$$N_2 = \frac{1}{m}\left(\sum_{i,j}\left|R_{\mathring{x}_i\mathring{x}_j}(0)(1+\gamma)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j}\left|R_{ij}(1+\gamma)^{m-1}/((1+\gamma)^m|R(0)|)\right|^2\right)^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{i,j}\left|R_{\mathring{x}_i\mathring{x}_j}(0)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i,j}\left|R_{ij}/|R(0)|\right|^2\right)^{1/2},$$

где R_{ij} — алгебраические дополнения элементов $R_{\mathring{x}_i\mathring{x}_j}(0)$; $(1+\gamma)^m|R(0)|$ — определитель матрицы, элементы которой удовлетворяют условию (5). Благодаря этому корреляционные матрицы с откорректированными элементами представляются в виде

$$\mathbf{R}_g^*(0) \approx (1+\gamma)\|R_{\mathring{x}_i\mathring{x}_j}(0)\|; \qquad \mathbf{R}_{g\eta}^*(0) \approx (1+\gamma)\|R_{\mathring{x}_i\mathring{y}}(0)\|;$$
$$(\mathbf{R}_g^*(0))^{-1} \approx [(1+\gamma)^{m-1}\|R_{ij}\|]/[(1+\gamma)^m|R(0)|].$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{B} = (\mathbf{R}_g^*(0))^{-1}R_{g\eta}^*(0) \approx \mathbf{R}_x^{-1}(0)\mathbf{R}_{xy}(0).$$

Таким образом, благодаря компенсации погрешностей элементов корреляционных матриц, равенство (2) удается преобразовать в равенство со свойствами, максимально приближающимися к свойствам равенства (1).

Заключение. В работе предлагается метод улучшения оценки корреляционной функции смеси полезного сигнала с шумом. На его основе разработан алгоритм коррекции с компенсацией погрешностей. Показано, что матричное уравнение с плохо обусловленной корреляционной матрицей в результате применения этого алгоритма в достаточной степени приближается к соответствующему уравнению, в котором аналогичные элементы матрицы содержат уменьшенную погрешность. Создан пакет прикладных программ для персональных компьютеров типа IBM, написанных на языке BASIC, который состоит из блоков ввода исходных данных, вычисления математического ожидания исходного сигнала и центрирования, вычисления оценок корреляционных функций нецентрированных и центрированных сигналов, определения количества положительных, отрицательных произведений для различных значений μ и их разности, вычисления погрешности $\langle\Delta\lambda(\mu)\rangle$, $\Delta\lambda(\mu)$, $\lambda(\mu)$, корректировки значений корреляционной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
2. **Hoerl A., Kennard R.** Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems // Technometrics. 1970. V. 12.
3. **Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е.** Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987.
4. **Цапенко М. П.** Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование. М.: Энергоатомиздат, 1985.
5. **Алиев Т. А.** Экспериментальный анализ. М.: Машиностроение, 1991.
6. **Алиев Т. А.** К принципам построения многоканальных цифровых корреляторов // Автометрия. 1977. № 4.

Поступила в редакцию 23 августа 1994 г.