РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

В. В. Вознесенский, В. В. Кашинов, С. И. Оганджанянц

(Тюмень)

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО РАЗРЫВНЫМ КРИТЕРИЯМ

Получены необходимые условия экстремума функционалов — критериев обработки — с негладким или даже разрывным интегрантом, которые зависят от интегральных операторов, действующих из пространств $L_p[\Delta]$ в $L_p[\Delta]$. Классическое вариационное исчисление распространено на пространства суммируемых функций. Приведен пример модифицированной задачи Дидоны с разрывным интегрантом и негладкой экстремалью.

Во многих задачах оптимальной обработки результатов физических экспериментов требуется отбрасывание данных, выходящих за некоторые заданные значения. Математически такие задачи сводятся к поиску экстремумов функционалов с разрывными интегрантами. Иногда наблюдатель имеет дело не с самой измеряемой величиной, а с откликом некоторого линейного или нелинейного устройства. Чем меньше требований предъявляется к функционалу критерия оптимальности и оператору, описывающему устройство, тем более широкий круг задач может быть решен. В настоящее время наиболее общим видом оператора является нелинейно-инерционный оператор Урысона

$$\Phi_i(x) = \int_a^b K_i[x, t, h(t)]dt, \tag{1}$$

где $h(t)$ — оптимальная характеристика, относительно которой предполагаем, что $h(t) \in L_p[a, b]$ $(p \geq 1)$.

Функционал качества I может зависеть от нескольких операторов Урысона, при том что оптимизируемая функция h только одна:

$$I = \int_c^d F[\Phi_1(x), ..., \Phi_i(x), ..., \Phi_n(x)]dx, \tag{2}$$

где $F[\cdot]$ — интегрант, определяющий связь (композицию) операторов Φ_i в функционале I. Интегрант $F[\cdot]$ может быть непрерывным, гладким, негладким и даже разрывным.

Оптимизации методами негладкого анализа посвящена монография Френка Кларка [1], но методику Кларка применить к функционалам, зависящим от интегральных операторов, нельзя, как нельзя ее применять и для функционалов с разрывным интегрантом. Кроме того, экстремали у Кларка предполагаются абсолютно непрерывными. Все это несколько сужает область применения негладкой оптимизации. В нашем случае неприменимы и результаты

М. К. Керимова [2, 3]. Поэтому, ограничиваясь методами вариационного исчисления и теории обобщенных функций, а также теоремой Фубини, будем поступать так.

Негладкий или разрывной интегрант можно представить с помощью функции включения Хевисайда $1(x)$ или ее производных, т. е. δ-функции и ее производных, используя их фильтрующие свойства. При варьировании функционала I все производные будем понимать в обобщенном смысле $F'_\Phi = \int F(s)\delta'(s - \Phi)ds$. По общему правилу введем однопараметрическое семейство кривых $\hat{h}(t) = h(t) + \alpha\delta h(t)$, где $\delta h(t)$ — произвольная функция из $L_p[a, b]$, α — независимая переменная. Подставляя $\hat{h}(t)$ в операторы (1), а операторы (1) в функционал (2) и дифференцируя I по α, при $\alpha = 0$ получим вариацию функционала δI и приравняем ее нулю:

$$\delta I = \int_c^d \sum_{i=1}^n F'_{\Phi_i} \int_a^b (dK_i[x, t, \hat{h}(t)]/d\hat{h}(t))\delta h(t)dtdx \Big|_{\alpha=0} = 0. \tag{3}$$

В вариации функционала (3) все функции принадлежат пространству $L_p[\Delta]$. Используя теорему Фубини [4], условия применимости которой считаем выполненными, изменим в формуле (3) порядок интегрирования [5]:

$$\delta I = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \int_c^d F'_{\Phi_i}(dK_i[x, t, h(t)]/dh(t))dx\right]\delta h(t)dt = 0. \tag{4}$$

Обозначим в этой формуле выражение в квадратных скобках через $Q(x) = [\cdot]$, тогда (4) примет вид

$$\delta I = \int_c^d Q(t)\delta h(t)dt = 0. \tag{5}$$

Теорема. Пусть функционал (2), зависящий от операторов Урысона (1), в пространствах $L_p[\Delta]$, $p \geq 1$, имеет внутренний экстремум при $\hat{h}(t) = h(t)$, тогда почти всюду на Δ справедливо равенство

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n \int_a^b F'_{\Phi_i}(dK_i[x, t, h(t)]/dh(t))dx = 0, \qquad t \in [c, d]. \tag{6}$$

Для доказательства применим к выражению (4) или (6) основную лемму вариационного исчисления в формулировке Л. Янга [6]. Теорема доказана.

Следствие 1. Если в операторах Урысона (1) положить в качестве подынтегральных выражений $K_i[x, t, h(t)] = K_i(x, t)h(t)$, получаются линейные интегральные операторы типа Фредгольма

$$\Phi_i(x) = \int_a^b K_i(x, t)h(t)dt. \tag{7}$$

Обобщенное уравнение Эйлера — Пуассона в этом случае имеет вид

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n \int_a^b F'_{\Phi_i}(x)K_i(x, t)dx = 0, \qquad t \in [c, d]. \tag{8}$$

Следствие 2. Если воспользоваться фильтрующим свойством δ-функции и ее производных и обозначить ядра операторов (7) как $K_i(x, t) = \delta^{(i)}(x - t)$, то уравнение (8) примет вид уравнения Эйлера

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i d^i(dF/dh^{(i)})/dt^i = 0 \tag{9}$$

простейшей вариационной задачи [3] для функционалов

$$I = \int_a^b F[x, h(x), ..., h^{(i)}(x), ..., h^{(n)}(x)]dx, \tag{10}$$

зависящих от искомой функции $h(t)$ и ее производных $h^{(i)}(t)$.

В классическом вариационном исчислении основная лемма доказывается для пространств C^n-функций, имеющих n производных, а для того, чтобы избавиться от произвольной функции $\delta h(t)$ в вариации функционала, используется интегрирование по частям. Это подразумевает существование n-й производной в обычном смысле, что препятствует распространению классического вариационного исчисления на пространства обобщенных функций.

Использование теоремы Фубини позволяет применить изменение порядка интегрирования и основную лемму вариационного исчисления для $L_p[\Delta]$ и распространить таким образом классическое уравнение Эйлера на пространства суммируемых функций, включающие в себя и обобщенные функции.

Производные от интегранта F по функциональным аргументам $h^{(i)}$ тоже понимаются в обобщенном смысле как свертки с сингулярными производными δ-функции, что позволяет решать вариационные задачи с негладким или даже разрывным интегрантом.

П р и м е р. *Задача Дидоны с канавой.* В распоряжении царевны имеется веревка ограниченной длины L, которой следует ограничить участок побережья, причем береговая черта представляется линией $x = 0$ на плоскости $0tx$ (см. рисунок). При этом следует найти кривую длины L, лежащую в полуплоскости $x(t) \geq 0$, соединяющей точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, такую что площадь между кривой и осью t максимальна.

Стремясь иметь негладкий интегрант, Кларк модифицировал [1, с. 178] задачу Дидоны следующим образом. Он полагает, что для некоторого $\alpha > 0$ земля в области $x > \alpha$ худшего качества и доход с нее составляет только половину дохода с земли в области $x \leq \alpha$.

Доход Д с огороженного участка, ограниченного кривой $x(t)$, равен

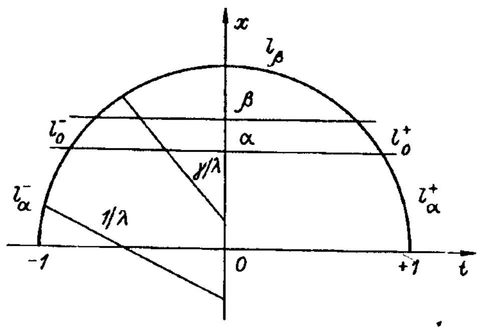
$$Д = \int_{-1}^{1} g[x(t)]dt, \tag{11}$$

где $g[x(t)] = \{x(t),\ \text{если}\ x \leq \alpha;\ (x + \alpha)/2,\ \text{если}\ x(t) \geq \alpha\}$. Следует максимизировать значение дохода Д (интеграла (11)) при наличии ограничений

$$x(-1) = 0, \qquad x(1) = 0, \tag{12}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (x')^2 dt} = L. \tag{13}$$

Далее Кларк использует методы негладкого анализа для решения модифицированной задачи Дидоны. Применение этих методов ограничивается негладкими интегрантами и абсолютно непрерывными экстремалями.



Участок Дидоны с канавой

Для частичной иллюстрации возможностей предложенного в статье метода решения задач с разрывным интегрантом будем полагать, что участок Дидоны параллельно береговой линии пересекает канава шириной $\beta - \alpha$. Один край канавы проходит по линии $x(t) = \alpha$, а другой — по линии $x(t) = \beta$. Участок канавы, ограниченный краями и веревкой (см. рисунок), никакого дохода не приносит, и интегрант выглядит так:

$$g[x(t)] = \begin{cases} x(t), & 0 < x < \alpha; \\ \alpha, & \alpha < x < \beta; \\ \alpha + \gamma(x - \beta), & x > \beta. \end{cases} \tag{14}$$

Веревку Дидона разорвать не может, поэтому изопериметрическое условие (13) остается в силе. Требуется максимизировать доход с участка, расположенного по краям канавы и ограниченного береговой линией и веревкой.

Представим $g[x(t)]$ с помощью единичной функции включения Хевисайда в виде

$$g[x(t)] = x[1(x) - 1(x - \alpha)] + \alpha[1(x - \alpha) -$$
$$- 1(x - \beta)] + [\gamma(x - \beta) + \alpha]1(x - \beta).$$

В уравнение Эйлера простейшей вариационной задачи (9) входят производные интегранта по x и x'. Вычислим производную

$$g_x' = 1(x) - 1(x - \alpha) + \gamma 1(x - \beta) + x[\delta(x) - \delta(x - \alpha)] +$$
$$+ \alpha[\delta(x - \alpha) - \delta(x - \beta)] + [\alpha + \gamma(x - \beta)]\delta(x - \beta).$$

Производя сокращения и учитывая свойства δ-функции, находим

$$g_x'[x(t)] = 1(x) - 1(x - \alpha) + \gamma 1(x - \beta)$$

или

$$g_x'[x(t)] = \begin{cases} 1, & 0 < x < \alpha; \\ 0, & \alpha < x < \beta; \\ \gamma, & x > \beta. \end{cases} \tag{15}$$

С учетом изопериметрического условия (13) получим дифференциальное уравнение для экстремали

$$\lambda\left(x_t' / \sqrt{1 + x_t'^2}\right)_t' = g_x', \tag{16}$$

где λ — неопределенный пока множитель Лагранжа [3].

Уравнение (16) при $g_x' = a \neq 0$ и ограничениях (12) имеет интегралом окружность

$$(x - C)^2 + t^2 = \lambda^2/a^2, \qquad x > 0, \tag{17}$$

где $C = \pm\sqrt{\lambda^2/a^2 - 1}$, симметрично расположенную относительно оси $0x$ (см. рисунок). Выразим длину веревки Дидоны через параметры задачи α, β, γ и неизвестный пока множитель Лагранжа λ.

В горизонтальной полосе $0 < x < \alpha$ $g'_x = 1$, центр соответствующей окружности располагается ниже оси $0t$ (иначе интегральные дуги l_α окажутся вне вертикальной полосы $-1 < t < 1$), откуда для длины дуги $|l^\pm_\alpha|$ получим

$$|l^\pm_\alpha| = \lambda\left[\arcsin([\alpha + \sqrt{\lambda^2 - 1}]/\lambda) - \arcsin\left([\sqrt{\lambda^2 - 1}]/\lambda\right)\right]. \qquad (18а)$$

При $x > \beta$ $g'_x = \gamma$, и при отыскании максимума функционала (11) в случае $\gamma > 1$ (или $\gamma < 1$) центр окружности, содержащей интегральную дугу l_β, будет расположен выше (или ниже) оси $0t$. Для длины дуги l_β получим

$$|l_\beta| = (2/\gamma)\arccos[(\beta + \sqrt{\lambda^2/\gamma^2 - 1})\gamma/\lambda]. \qquad (18б)$$

В полосе $\alpha < x < \beta$ $g'_x = 0$, и интегральная линия имеет вид отрезков прямой $l^\pm_0$, соединяющей концы дуг l^+_α и l^-_α с концами дуги l_β. При разных значениях параметра γ может быть разная ориентировка этих отрезков. В частности, они могут быть параллельны оси $0x$ ($x' = \infty$) или наклонены. Длина отрезка $|l^\pm_0|$ определяется выражением

$$|l^\pm_0|^2 = (\beta - \alpha)^2 + \left(\sqrt{\lambda^2 - (\alpha + (\lambda^2 - 1)^{1/2})^2} - \sqrt{\lambda^2/\gamma^2 - (\beta + (\lambda^2/\gamma^2 - 1)^{1/2})^2}\right)^2$$

или

$$|l^\pm_0|^2 = (\beta - \alpha)^2 + \left(\sqrt{1 - \alpha^2 - 2\alpha(\lambda^2 - 1)^{1/2}} - \sqrt{1 - \beta^2 - 2\beta(\lambda^2/\gamma^2 - 1)^{1/2}}\right)^2.$$

Заметим, что при $\alpha = \beta$ $l^\pm_0 = 0$ лишь при $\gamma = 1$, т. е. требования «стыковки» или даже «сопряжения» дуг $l^\pm_\alpha$ и l_β, наложенные в [1] при $\gamma \neq 1$, не вытекают из условия задачи, несмотря на неразрывность веревки.

Окончательно получим

$$L = 2|l^\pm_\alpha| + 2|l^\pm_0| + |l_\beta|$$

или

$$\begin{aligned} L/2 = \lambda\Big[\arcsin[(\alpha + \sqrt{\lambda^2 - 1})/\lambda] - \arcsin[(\sqrt{\lambda^2 - 1})/\lambda]\Big] + \\ + (\lambda/\gamma)\arccos\Big[(\beta + \sqrt{\lambda^2/\gamma^2 - 1})\gamma/\lambda\Big] + \\ + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \{(1 - \alpha^2 - 2\alpha(\lambda^2 - 1)^{1/2})^{1/2} - (1 - \beta^2 - 2\beta(\lambda^2/\gamma^2 - 1)^{1/2})^{1/2}\}^2}. \end{aligned} \qquad (19)$$

При $\alpha = \beta$ находим

$$\begin{aligned} L/2 = \lambda\Big[\arcsin[\alpha/\lambda + \sqrt{1 - 1/\lambda^2}] - \arcsin\sqrt{1 - 1/\lambda^2}\Big] + \\ + (\lambda/\gamma)\arccos\Big[\gamma\alpha/\lambda + \sqrt{1 - \gamma^2/\lambda^2}\Big] + \\ + \sqrt{1 - \alpha^2 - 2\alpha(\lambda^2 - 1)^{1/2}} - \sqrt{1 - \alpha^2 - 2\alpha(\lambda^2/\gamma^2 - 1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

При $\alpha = \beta$ и $\gamma = 1$ получается длина дуги в классической задаче [7] Дидоны

$$L/2 = \lambda\Big[\arcsin\{\alpha/\lambda + \sqrt{1 - \lambda^{-2}}\} + \arccos\{\alpha/\lambda + \sqrt{1 - \lambda^{-2}}\} - \arcsin\sqrt{1 - \lambda^2}\Big]$$

или

$$L/2\lambda = \arcsin(1/\lambda). \qquad (20)$$

Модифицированную задачу Дидоны с разрывным интегрантом методами негладкого анализа Кларка [1] решить было бы нельзя — этими методами можно решать задачи только с негладким интегрантом, причем экстремалями могут быть только абсолютно непрерывные функции. Предложенными в статье методами обобщенного вариационного исчисления задача легко решается, несмотря на разрывной интегрант и негладкую экстремаль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ: Пер. с англ. /Под ред. В. И. Благодатских. М.: Наука, 1988.
2. **Керимов М. К.** К теории разрывных задач с подвижными концами в пространстве // ДАН СССР. 1961. 136, вып. 3.
3. **Цлаф Л. Я.** Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1970.
4. **Садовничий В. А.** Теория операторов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
5. **Кашинов В. В.** // Кибернетика (Киев). 1972. № 6.
6. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению. М.: Мир, 1974.
7. **Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И.** Вариационное исчисление. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 4 января 1994 г.