РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

УДК 681.513.6 : 681.325.5

А. В. Зоркальцев, А. А. Южаков

(Томск — Пермь)

АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ФРАГМЕНТА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

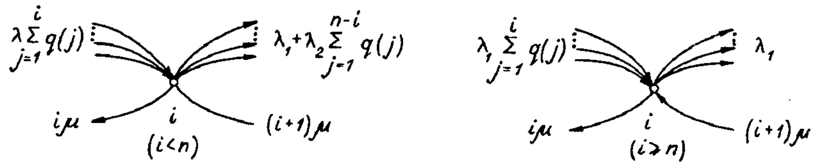
Предложена аналитическая модель связного фрагмента информационно-измерительной системы (ИИС) при условии поступления потоков данных двух приоритетов и использовании совокупности каналов связи одним из них по неполно доступной схеме. Найдены аналитические соотношения для расчета вероятностей блокировок.

Современные системы обработки информации характеризуются большим многообразием функций и, как следствие, высокой структурной сложностью. В основу построения таких систем заложен модульный принцип: блоки, представляющие фазы обработки измеряемого сигнала (измерительные устройства, кодер, декодер, блок связных процессоров, устройства вычислительной обработки), соединены между собой каналами связи.

В качестве модели ИИС целесообразно использовать многофазную систему массового обслуживания (СМО), которая, в свою очередь, представляет совокупность СМО, последовательно соединенных между собой и имеющих свои специфические особенности. Исследование ИИС сопряжено с большими сложностями аналитического характера, поэтому на первом этапе представляется разумным найти основные вероятностно-временные характеристики отдельных блоков. Применительно к терминальной измерительной системе такая задача решена в [1]. В данной работе аналогичная задача решается для каналов связи.

Основной специфической чертой ИИС является то, что измеряемые сигналы имеют разную длину вследствие применения специфических корректирующих кодов [2]. При передаче сигнал дробится на более мелкие составляющие, каждая из которых передается параллельно и независимо от других. В рамках данной работы будем считать, что для передачи сигнала существует конечное число однотипных каналов связи. Таким образом, возможна ситуация, когда для сигнала, требующего передачи, нет достаточного количества свободных каналов, и он сбрасывается. Вероятность отказа в передаче является важнейшей характеристикой работы системы. Особый интерес представляет случай, когда множество сигналов делится на два класса, низшего и высшего приоритетов, и в соответствии с определенной процедурой для более приоритетных сигналов устанавливается благоприятный режим выделения каналов связи.

Предположим, что для передачи по каналам связи поступают два пуассоновских потока измеряемых сигналов (заявок в терминах СМО) с интенсивностями λ_1 и λ_2, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Заявки первого потока, являющиеся приоритетными, будем в дальнейшем называть 1-заявками, второго потока — 2-заявками. Вследствие того что заявки имеют различную длину, каждая из них с вероятностью $q(m)$ требует для обслуживания m каналов одновременно, $q(0) = 0$. Все каналы однотипны в том смысле, что обслуживание на любом из них экспоненциальное с параметром μ, а их число равно N. Освобождение каналов, занятых одной заявкой, происходит независимо друг от друга. Приоритет



1-заявок заключается в преимущественном праве на выделение требуемого числа каналов, которое осуществляется по следующему правилу: в случае, если пришедшая 2-заявка требует выделения такого числа каналов, которое в сумме с уже задействованными превышает некоторое заранее выбранное число n ($n \le N$), то она сбрасывается. 1-заявка может быть сброшена лишь в случае, когда в наличии нет необходимого числа свободных каналов. Целью исследования является нахождение вероятностей сброса заявок обоих типов, которые обозначим соответственно Π_1 и Π_2.

Основное упрощение, облегчающее анализ, состоит в предположении о наличии неограниченного числа каналов. Вопрос о его влиянии на конечный результат отложим до заключительной части работы.

Рассмотрим случайный процесс, состоянием которого является число занятых каналов. Он, очевидно, является марковским, поэтому для него возможно построение стохастического графа переходов, типичные точки которого показаны на рисунке. Пусть $P(i)$ — вероятность того, что занято i каналов. Для нахождения $P(i)$, $i = \overline{0, n+1}$, с помощью стандартного метода сечений получим систему $(n+1)$ уравнений с $(n+2)$ неизвестными:

$$\left[\lambda_1 + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n-i} q(j) + i\mu\right] P(i) = (i+1)\mu P(i+1) + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} q(i-j)P(j), \quad i = \overline{0, n}. \tag{1}$$

В качестве недостающего уравнения системы будем использовать условие нормировки $\sum\limits_i P(i) = 1$, для нахождения которого необходимо рассмотреть вторую часть стохастического графа. Система уравнений, аналогичная вышеприведенной, запишется в следующем виде:

$$\left[\lambda_1 + (n+i)\mu\right] P(n+i) = (n+1+i)\mu P(n+1+i) +$$
$$+ \lambda_1 \sum_{j=0}^{n+i-1} q(n+i-j)P(j), \quad i = \overline{1, \infty}. \tag{2}$$

Введем производящие функции:

$$F(z) = \sum_{i=n+1}^{\infty} P(i)z^i, \qquad Q_j(z) = \sum_{i=j}^{\infty} q(i)z^i. \tag{3}$$

После суммирования уравнений (2) по i с использованием (3) получим

$$\lambda_1 F(z) + \mu \sum_{i=n+1}^{\infty} iP(i)z^i = \mu \sum_{i=n+2}^{\infty} iP(i)z^{i-1} + \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} P(j)Q_{n+1-j}(z)z^j + \lambda_1 F(z)Q_1(z),$$

откуда после некоторых преобразований имеем

$$\mu(z-1)F'(z) + \lambda_1 F(z)\left[1 - Q_1(z)\right] = f(z), \tag{4}$$

где

$$f(z) = \lambda_1 \sum_{j=0}^{n} P(j)Q_{n+1-j}(z)z^j - \mu(n+1)P(n+1)z^n,$$

или в более компактном виде

$$F'(z) + \rho_1 g(z)F(z) = h(z), \tag{5}$$

где $g(z) = \frac{1 - Q_1(z)}{z - 1}$, $h(z) = \frac{f(z)}{\mu(z - 1)}$, $\rho_1 = \lambda_1/\mu$.

Известно, что общее решение (5) может быть записано в виде

$$F(z) = \left[\int h(z)\exp\left(\int \rho_1 g(z)dz\right)dz + C\right]\exp\left(-\int \rho_1 g(z)dz\right), \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная.

Покажем, что $z = 1$ является корнем $f(z)$ и $1 - Q_1(z)$, и найдем общий вид $g(z)$ и $h(z)$, удобный для использования в качестве подынтегрального выражения.

В силу определения $Q_j(z)$ выполняется $Q_1(1) = 1$. Далее имеем

$$1 - Q_1(z) = \sum_{i=1}^{\infty} q(i) - \sum_{i=1}^{\infty} q(i)z^i = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - z^i)q(i),$$

следовательно,

$$g(z) = -\sum_{i=1}^{\infty} q(i)\sum_{j=0}^{i-1} z^j = -\sum_{i=0}^{\infty} z^i\left[1 - \sum_{j=1}^{i} q(j)\right]. \tag{7}$$

Справедливость соотношения $f(1) = 0$ подтверждается тем, что оно в точности совпадает с уравнением сечения, проведенным между состояниями n и $n + 1$ стохастического графа. Теперь отнимем $f(1)$ от $f(z)$ и получим

$$f(z) = \lambda_1 \sum_{i=0}^{n} P(i)\left[Q_{n+1-i}(z)z^i - 1 + \sum_{j=1}^{n-i} q(j)\right] - \mu(n + 1)P(n + 1)(z^n - 1) =$$

$$= \lambda_1 \sum_{i=0}^{n} P(i)\sum_{j=n+1-i}^{\infty} q(j)(z^{i+j} - 1) - \mu(n + 1)P(n + 1)(z^n - 1).$$

Становится очевидным, что $f(z)$ имеет единичный корень, и выражение для $h(z)$ приобретает вид

$$h(z) = \rho_1 \sum_{i=0}^{n} P(i)\sum_{j=n+1-i}^{\infty} q(j)\sum_{k=0}^{i+j-1} z^k - (n + 1)P(n + 1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k =$$

$$= \rho_1 \sum_{i=n}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} z^j \sum_{k=i+1-n}^{i+1} q(k)P(i + 1 - k)\right) - (n + 1)P(n + 1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Нетрудно заметить, что коэффициент при $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ представляет уравнение сечения между состояниями n и $n + 1$, поэтому полагаем его равным нулю и окончательно имеем

$$h(z) = \rho_1 \sum_{i=n}^{\infty}\left(\sum_{j=n}^{i} z^j \sum_{k=i+1-n}^{i+1} q(k)P(i + 1 - k)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i z^{n+i-1}, \tag{8}$$

где $H_i = \rho_1 \sum_{k=0}^{n} P(k)\sum_{j=i+n-k}^{\infty} q(j)$.

Возвратимся теперь к анализу выражения (6). Обозначая $\kappa(z) = \rho_1 \int g(z)dz$ и учитывая, что

$$S(z) = \exp(\kappa(z)) = \exp\left\{-\rho_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i}\left[1 - \sum_{j=1}^{i-1} q(j)\right]\right\},$$

попробуем, разложив экспоненту в ряд по z, взять интеграл от произведения рядов $h(z)$ и $S(z)$. Так как

$$S(z) = S_0^{(0)} + \frac{S_0^{(1)}}{1!}z + \frac{S_0^{(2)}}{2!}z^2 + \frac{S_0^{(3)}}{3!}z^3 + \dots,$$

где $S_0^{(i)}$ — производная i-го порядка $S(z)$ по z в точке 0, то проблема заключается лишь в нахождении удобного соотношения для вычисления $S^{(i)}(z)$, которое удается получить в виде

$$S^{(i)}(z) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{i-j-1} S^{(i-j-1)}(z)\kappa^{(j+1)}(z), \tag{9}$$

где $\binom{i}{j}$ — число сочетаний из i по j, а $\kappa^{(j)}(z)$ — производная j-го порядка $\kappa(z)$ по z, для которой имеет место

$$\kappa^{(j)}(0) = -\rho_1(j-1)!\left[1 - \sum_{i=0}^{j-1} q(i)\right].$$

Несколько первых значений $S_0^{(i)}(z)$, вычисленных в соответствии с вышеприведенными формулами, имеют вид

$$S_0^{(0)} = 1;$$

$$S_0^{(1)} = -\rho_1;$$

$$S_0^{(2)} = -\rho_1\left[1 - q(1)\right] + \rho_1^2;$$

$$S_0^{(3)} = -2\rho_1\left[1 - q(1) - q(2)\right] + 3\rho_1^2\left[1 - q(1)\right] - \rho_1^3.$$

С учетом (8) и (9) можно записать:

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} H_i z^{(n+i-1)} \sum_{i=0}^{\infty} S_0^{(i)} \frac{z^i}{i!}\,dz = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{n+i}}{n+i} \sum_{j=1}^{i} \frac{H_j S_0^{(i-j)}}{(i-j)!}.$$

Из условия $F(0) = 0$ определяем в выражении (6) $C = 0$. Таким образом, окончательно получаем

$$F(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{n+i}}{n+i} \sum_{j=1}^{i} \frac{H_j S_0^{(i-j)}}{(i-j)!} \exp\left\{\rho_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i}\left[1 - \sum_{j=1}^{i-1} q(j)\right]\right\}. \tag{10}$$

Это дает возможность добавить к системе (1) нормировочное уравнение вида $\sum_{i=0}^{n} P(i) + F(1) = 1$ и найти все вероятности $P(i)$, $i = \overline{0, n+1}$. Для $i \geq n+2$ вероятности $P(i)$ легко определяются с помощью уравнений (2). Заметим, что выражение (10) для расчета $F(1)$ представляет собой сумму бесконечного

Геометрическое распределение, $q = 0,5$	Точно	Приближенно	Равномерное распределение, $q = 0,2$	Точно	Приближенно
$П_1$	0,010	0,012	$П_1$	0,034	0,044
$П_2$	0,191	0,196	$П_2$	0,446	0,453

Примечание. $\lambda_1 = 0,7;\ \lambda_2 = 0,298;\ \mu = 1,0;\ n = 5;\ N = 10.$

числа слагаемых, поэтому при реализации численного алгоритма рекомендуется использовать конечное их число, достаточное для того, чтобы решение системы (1) не зависело от дальнейшего увеличения суммы ряда.

В качестве вероятностей блокировки потока i-го типа $П_i$ предлагается использовать следующие величины:

$$П_1 = 1 - \sum_{i=0}^{N-1} P(i) \sum_{j=1}^{N-i} q(j), \qquad П_2 = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} P(i) \sum_{j=1}^{n-i} q(j),$$

которые, естественно, не совпадают в точности с аналогичными характеристиками реальной системы, но являются вполне удовлетворительными их оценками. Проиллюстрируем изложенное на примерах.

Пример 1. Предположим, что число каналов, требуемое заявкой для обслуживания, распределено по геометрическому закону с параметром q, т. е. $q(i) = (1 - q)q^{i-1}$, $i = \overline{1, \infty}$. Тогда из соотношения (10) для $F(1)$ получаем

$$F(1) = \rho_1(1 - q)^{-\rho_1/q} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n + i} \sum_{j=1}^{i} \frac{S_0^{(i-j)}}{(i-j)} q^{j+n} \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{q^{k+1}}.$$

В таблице (столбец «приближенно») приведены значения вероятностей блокировок, вычисленных с применением полученных соотношений, причем в выражении для $F(1)$ были использованы только первые четыре слагаемых в бесконечной сумме. В качестве критерия точности (столбец «точно») предлагается взять результаты, найденные решением системы линейных уравнений, полученных стандартным методом сечений (что возможно лишь при небольших N). Варьирование входными параметрами не оказывает существенного влияния на близость результатов.

Пример 2. Предположим теперь, что число требуемых каналов распределено равномерно на некотором интервале. Возьмем $q(i) = 0,2$, $i = \overline{1, 5}$. Из таблицы видно, что хорошее совпадение точных и приближенных результатов характерно и для этого типа распределений.

Отметим, что во всех случаях приближенное значение вероятности блокировки является пессимистической оценкой, что легко объяснимо на качественном уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров А. А., Наулик М. М., Южаков А. А. Анализ математической модели адаптивной терминальной измерительной системы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 11.
2. Лицын С. Н., Южаков А. А. Кодирование отсчетов при циклической дискретизации в ИИС // Изв. вузов. Приборостроение. 1986. № 7.

Поступила в редакцию 10 января 1994 г.