РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
№ 3 1995

УДК 519.6

Б. А. Беседин
*(Омск)*

# НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ РЕГРЕССИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ*

При наилучших линейных (линеаризованных) оценках рассматриваются задачи оптимального размещения комплекта измерительных приборов, являющиеся аналогом-обобщением классических задач оптимального планирования регрессионных экспериментов. Дается математический аппарат, включая алгоритмы численной оптимизации, для класса непрерывных нормированных планов размещения, который аналогичен аппарату теории регрессионных экспериментов. Приведены два примера $D$-оптимального размещения приборов.

**Введение.** Свойства статистических оценок зависят, как известно, не только от метода их получения, но также от факторных точек, в которых проводятся измерения, числа измерений и типов измерительных приборов, их числа и размещения (в случае, например, геодезических и радиолокационных приборов). Оптимизация качества статистической оценки определенного класса путем выбора факторных точек при фиксированном приборном составе является предметом теории оптимального планирования регрессионных экспериментов [1—3]. Задачи оптимизации статистических оценок путем выбора комплекта разнотипных измерительных приборов и их размещение в соответствующей области можно отнести к предмету теории оптимальных распределенных информационно-измерительных систем [4—7]. В обоих случаях возникают ряды сходных по структуре экстремальных задач с тем отличием, что задачи оптимального комплектования и размещения разнотипных приборов в математическом отношении более общие. Этот факт и связанные с ним возможности обобщения результатов теории регрессионных экспериментов отмечались в [4].

Математически наиболее развитая и цельная часть теории регрессионных экспериментов получена в условиях линейно-параметризованной функции регрессии, позволяющих использовать наилучшие линейные статистические оценки, и, главное, при непрерывном приближении для планов размещения выборки в факторной области. В данной статье эти классические (по [8]) результаты обобщаются применительно к оптимизации комплектования и размещения разнотипных измерительных приборов в аналогичных условиях применения наилучшей линейной (линеаризованной) статистической оценки и непрерывного приближения планов размещения приборов *фиксированного* комплекта. Обобщения полезны в двух отношениях. Во-первых, они дают аппарат для приближенного решения задач оптимального в соответствующем смысле размещения комплекта разнотипных измерительных приборов с использованием в качестве базовых пакетов прикладных программ теории эксперимента [2]. Во-вторых, связывают и частично совмещают два независимых до сих пор вузовских учебных курса: по теории экспериментов и информационно-измерительным системам.

* Статья подготовлена при финансовой поддержке фонда «Университеты России», г. Омск.

**Постановка задачи.** Вектором $\overline{N}$ обозначим комплект приборов $L$ типа: $\overline{N} = (N_1, N_2, ..., N_L)$. Через $\Pi_{\overline{N}}$ обозначим план размещения в области $Z$ приборов из комплекта $\overline{N}$: $\Pi_{\overline{N}} = (z_k, \nu_{lk},\ k = \overline{1, n},\ l = \overline{1, L})$, где координаты пунктов размещения приборов $z_k \in Z$, а $\nu_{lk}$ — число приборов $l$-го типа в $k$-м пункте; число приборов $l$-го типа $N_l = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_{lk}$, общее количество приборов в комплекте $\overline{N}$ равно $N = \sum N_l$.

Пусть требуется по результатам показаний $\overline{N}$ приборов статистически оценить вектор-столбец неизвестных параметров $\theta$ при условии, что измерения прибора $l$-го типа описываются нелинейным уравнением

$$y_l = \kappa_l(\theta, z) + \eta_l, \qquad l = \overline{1, L}, \tag{1}$$

где вектор-столбцы $y_l, \eta_l$ — соответственно результат и погрешность измерения; $\kappa(\theta, z)$ — известная дифференцируемая вектор-функция; $z$ — координаты местоположения прибора в допустимой области $Z$; погрешности измерения межприборно статистически независимы с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами $G_l(z) = M[\eta_l \eta_l^+ \mid z]$. Здесь и далее $M$ — знак математического ожидания, $(+)$ — знак транспонирования векторов и матриц.

После линеаризации $\kappa(\theta, z)$ по $\theta$ в окрестности некоторого $\overline{\theta}$ (планового, предполагаемого) получим линеаризованное уравнение измерений прибора $l$-го типа, которое запишем в виде

$$y_l = H_l(z)\theta + \eta_l, \qquad l = \overline{1, L}. \tag{2}$$

Пусть $\hat{\theta}$ — наилучшая линеаризованная статистическая оценка $\theta$. Формулу для нее получим, применяя известное выражение наилучшей линейной оценки [1—3] к линеаризованному уравнению (2) для комплекта приборов $\overline{N}$ с планом размещения $\Pi_{\overline{N}}$. Таким образом, информационную матрицу $\Phi(\Pi_{\overline{N}})$ оценки $\hat{\theta}$ найдем в следующем виде:

$$\Phi(\Pi_{\overline{N}}) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{k=1}^{n} \nu_{lk} \Phi_l(z_k), \tag{3}$$

где симметричная положительно или неотрицательно определенная матрица

$$\Phi_l(z) = H_l^+(z) G_l^{-1}(z) H_l(z), \qquad l = \overline{1, L}. \tag{4}$$

Дисперсионная матрица оценки $\hat{\theta}$ есть $D(\Pi_{\overline{N}}) = \Phi^{-1}(\Pi_{\overline{N}})$ в предположении невырожденности информационной матрицы (3).

Введем также матрицы

$$d_l(z, \Pi_{\overline{N}}) = H_l(z) \Phi^{-1}(\Pi_{\overline{N}}) H_l(z), \qquad l = \overline{1, L}. \tag{5}$$

Требования к качеству статистической оценки $\hat{\theta}$ естественно предъявлять такие же, как и в теории регрессионных экспериментов, т. е. меру качества определять теми же функционалами от информационных или дисперсионных матриц оценок. Например, функционал $D$-оптимальности оценки — определитель дисперсионной матрицы $|D(\cdot)| = |\Phi(\cdot)|^{-1}$ — исчисляет обобщенную дисперсию оценки, функционал $E$-оптимальности $\mathrm{tr} D(\cdot) = \mathrm{tr}\Phi^{-1}(\cdot)$ — сумму дисперсий компонент оценки и т. д.

Выделим семейство экстремальных задач размещения фиксированного комплекта приборов $\overline{N}$:

$$\Pi_{\bar N}^* = \arg\min_{\Pi_{\bar N}} \psi[\Phi(\Pi_{\bar N})]. \quad (6)$$

Здесь знак $\psi$ используется для общего обозначения функционалов качества.

Решением задачи (6) является $\psi$-оптимальный в конкретном смысле точный план $\Pi_{\bar N}^*$, включающий оптимальные число пунктов размещения $n^*$, их координаты $z_k^* \in Z$, $k = \overline{1, n^*}$, и целочисленное распределение $\nu_{lk}^*$ комплекта $\bar N$ по пунктам. В физически содержательных задачах план $\Pi_{\bar N}^*$ невырожденный, т. е. существуют допустимые планы $\Pi_{\bar N}$, для которых информационная матрица (3) невырожденная, следовательно, дисперсионная матрица существует.

**Пример 1.** Рассмотрим пример линеаризованной оценки координат $\theta$ точки на плоскости по одноразовым измерениям $N$ равноточных угломеров (пеленгаторов), располагаемых на первой координатной оси [9]; продолжим этот пример выбором $D$-оптимального размещения приборов.

Приборы из точек размещения $(z_k, 0)$ измеряют с погрешностями $\eta_k$ углы азимута $\beta_k$ на точку $\theta^+ = (\theta_1, \theta_2)$:

$$y_k = \beta_k^+ + \eta_k = \operatorname{arctg}\frac{\theta_2}{\theta_1 - z_k} + \eta_k, \qquad k = \overline{1, n},$$

где $\eta_k$ статистически независимы с $M[\eta_k] = 0$ и единичной дисперсией.

Пусть $\nu_k$ — число приборов, размещенных в $k$-м пункте с координатами $(z_k, 0)$, $k = \overline{1, n}$, $\sum \nu_k = N$. Тогда наилучшая линеаризованная в окрестностях $\bar\theta^+ = (\bar\theta_1, \bar\theta_2)$ статистическая оценка $\hat\theta$ вектор-столбца $\theta$ имеет симметричную информационную $2 \times 2$-матрицу $\Phi = [\phi_{ij}]$ с элементами

$$\phi_{11} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k \bar\theta_2^2}{(\Delta_k^2 + \bar\theta_2^2)^2}, \qquad \phi_{22} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k \Delta_k^2}{(\Delta_k^2 + \bar\theta_2^2)^2}, \qquad \phi_{12} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k \bar\theta_2 \Delta_k}{(\Delta_k^2 + \bar\theta_2^2)^2},$$

где $\Delta_k = \bar\theta_1 - z_k$, $k = \overline{1, n}$.

$D$-оптимальный план размещения угломеров соответствует максимуму определителя информационной матрицы: $\max|\Phi|$ по величинам $z_k, \nu_k$, $k = \overline{1, n}$, при $\sum \nu_k = N$. Согласно неравенству Адамара [10], определитель $|\Phi| \le \phi_{11}\phi_{22}$, где равенство достигается только при $\phi_{12} = 0$. Ограничимся четным числом приборов $N = 2r$, тогда последнее имеет место, в частности, при попарно симметричных относительно точки $(\bar\theta_1, 0)$ размещениях угломеров на координатной оси. Следовательно, при этих условиях решение находим максимизацией верхней грани определителя $\phi_{11}, \phi_{22}$, где

$$\phi_{11} = 2\sum_{i=1}^{r} \frac{\bar\theta_2^2}{(\Delta_i^2 + \bar\theta_2^2)^2}, \qquad \phi_{22} = 2\sum_{j=1}^{r} \frac{\Delta_j^2}{(\Delta_j^2 + \bar\theta_2^2)^2}.$$

Функция $\phi_{11}\phi_{22}$ унимодальная, так как при $\Delta_k \to 0$ или $\Delta_k \to \infty$ ее значение стремится к нулю. Приравнивая к нулю частные производные от $\phi_{11}\phi_{22}$ по $\Delta_k$, $k = \overline{1, r}$, находим уравнения типа $f(\Delta_i^2) = f(\Delta_j^2)$. Отсюда следует, что оптимальные $|\Delta_k^2| = \Delta$. Максимум достигается при $|\Delta_k^*| = \bar\theta_2/\sqrt{3}$. Иными словами, $D$-оптимальное размещение четного числа $2r$ пеленгаторов на прямой является двухточечным и равномерным: $z_{1,2}^* = \bar\theta_1 \pm \bar\theta_2/\sqrt{3}$, $\nu_{1,2}^* = r$. Конфигурация точек $\bar\theta$, $(z_1^*, 0)$, $(z_2^*, 0)$ образует на плоскости равносторонний треугольник.

**Непрерывные приближения.** В задачах (6) оптимального размещения *фиксированного* комплекта приборов $\bar N$ переход от точного дискретного плана $\Pi_{\bar N}$ к его непрерывному приближению единствен, а именно долю приборов $l$-го типа в $k$-м пункте — величину $p_{lk} = \nu_{lk}/N_l$ — рассматриваем непрерывной на отрезке $[0, 1]$ для каждого $l = \overline{1, L}$. Таким образом, точный план $\Pi_{\bar N}$ переводится в непрерывное свое приближение — непрерывный нормированный план: $\pi_{\bar{N}} = (z_k, p_{lk},\ k = \overline{1, n},\ l = \overline{1, L})$, где $z_k \in Z$, $p_{lk} > 0$, $\sum_{k=1}^{n} p_{lk} = 1$.

Проведя формальную замену в (3) $\nu_{lk}$ на $N_l p_{lk}$, получим выражение информационной матрицы для непрерывного нормированного плана (ННП) в виде

$$\Phi(\pi_{\bar{N}}) = \sum_{l=1}^{L} N_l \sum_{k=1}^{n} p_{lk} \Phi_l(z_k). \tag{7}$$

Экстремальные задачи (6) трансформируются в требование найти

$$\pi^*_{\bar{N}} = \arg \min_{\pi_{\bar{N}}} \psi [\Phi(\pi_{\bar{N}})]. \tag{8}$$

Пример 2. Перейдем в примере 1 к непрерывным планам размещения равноточных угломеров, не предполагая четного их числа. Заменим число приборов в $k$-м пункте $\nu_k$ на $Np_k$, $k = \overline{1, n}$, где $p_k \in [0, 1]$ и является «долей» от $N$ приборов в $k$-м пункте. Решая далее задачу $D$-оптимального размещения в непрерывном приближении тем же способом, что и в примере 1, легко обнаружить, что $D$-оптимальные точки размещения те же самые, что и в примере 1, а непрерывное распределение приборов по ним равномерное: $p^*_{1,2} = 1/2$. Следовательно, при четном числе приборов-угломеров $D$-оптимальные точный и непрерывный планы их размещения в рассмотренном случае линеаризованной оценки дают одинаковый результат.

Попутно следует подчеркнуть, что при метрологически идентичных измерительных приборах (число типов $L = 1$) задачи их оптимального размещения формально-математически совпадают с классическими задачами оптимизации планов регрессионных экспериментов. При этом выражение $H_l(z)$ в уравнении измерений (2) является аналогом линейно-параметризованной вектор-функции регрессии, матрица (5) — дисперсионная матрица ее оценки.

**Свойства функционалов качества.** Принято называть функционал $\rho$, определенный на множестве $\mathcal{A}$, сублинейным степени $\gamma$, если он удовлетворяет двум условиям: $\rho(cA) = c^\gamma \rho(A)$, $\rho(A + B) \leq \rho(A)$, где $c, \gamma$ — числа, $A, B \in \mathcal{A}$.

Лемма 1. Применяемые в классической теории регрессионных экспериментов функционалы качества $\psi$, определенные на множестве информационных матриц наилучшей линейной (линеаризованной) статистической оценки, являются сублинейными функционалами.

Свойство функционалов качества статистической оценки типа $\rho(A + B) \leq \rho(A)$ имеет смысл монотонности относительно выборки: добавление одного измерения (прибора) прибавляет к информационной матрице матрицу типа $\Phi_l(z)$, что не ухудшает качество оценки, а при оптимизации измерений — улучшает [4]. Показатели качества статистических оценок с иными свойствами попросту не могут быть использованы.

Лемма 2 [1, 4]. Множество информационных матриц (7), порождаемое непрерывными нормированными планами $\pi_{\bar{N}}$, выпуклое; функционалы $\psi$, определенные на множестве информационных матриц (7), являются выпуклыми функционалами.

Следствием последнего утверждения является выпуклость экстремальных задач (8) размещения комплекта приборов $\bar{N}$, что существенно снижает вычислительную трудоемкость их решения.

**Теоремы оптимальности.** Обычно выпуклые экстремальные задачи решаются численно итеративным алгоритмом градиентного типа, адаптированного к специфике задачи. Конструирование алгоритма упрощается, если известны необходимые и достаточные признаки оптимальности допустимого решения. Сформулируем их.

**Теорема 1.** Пусть требуется найти решение выпуклой экстремальной задачи (8) размещения и $\psi$-дифференцируемый функционал. Тогда необходимым и достаточным признаком $\psi$-оптимальности ННП $\overset{*}{\pi}_{\overline{N}}$ является выполнение равенства

$$\min_{z \in Z} \varphi(z, \overset{*}{\pi}_{\overline{N}}) = \operatorname{tr} \frac{\partial \psi [\Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})]}{\partial \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})} \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}}), \tag{9}$$

где

$$\varphi(z, \pi_{\overline{N}}) = \operatorname{tr} \frac{\partial \psi [\Phi(\pi_{\overline{N}})]}{\partial \Phi(\pi_{\overline{N}})} \left[ \sum_{l=1}^{L} N_l \Phi_l(z) \right], \tag{10}$$

tr — символ следа матрицы, матрица $\partial\psi / \partial\Phi$ составлена из частных производных от $\psi[\Phi(\pi_{\overline{N}})]$ по элементам матрицы $\Phi(\pi_{\overline{N}})$ с сохранением нумерации последней, выражение матрицы $\Phi_l(z)$ дано в (3).

Доказательство теоремы технически сходно с доказательством, например, теоремы 2.2.1 в [2]. Поэтому ограничимся здесь только доказательством необходимости, чтобы проиллюстрировать имеющееся отличие.

Необходимым условием минимума выпуклого дифференцируемого функционала на выпуклом множестве является неотрицательность производной по направлению в точке минимума. Найдем это неравенство.

Определим выпуклую комбинацию ННП. Пусть в области $Z$ размещения комплекта $\overline{N}$ заданы два ННП его размещения: $\pi'_{\overline{N}} = (z'_i, p'_{li},\ i = \overline{1, n_1},\ l = \overline{1, L})$ и $\pi''_{\overline{N}} = (z''_j, p''_{lj},\ j = \overline{1, n_2},\ l = \overline{1, L})$. Выпуклой комбинацией планов $\pi'_{\overline{N}}$ и $\pi''_{\overline{N}}$ является ННП $\pi_{\overline{N}} = (1 - \alpha)\pi'_{\overline{N}} + \alpha\pi''_{\overline{N}}$, $\alpha \in [0, 1]$, который формируется следующим образом: $\pi_{\overline{N}} = (z'_i, z''_j, (1 - \alpha)p'_{li}, \alpha p''_{lj},\ i = \overline{1, n_1},\ j = \overline{1, n_2},\ l = \overline{1, L})$. В таком случае выпуклая комбинация ННП порождает выпуклую комбинацию соответствующих им информационных матриц: $\Phi(\pi_{\overline{N}}) = (1 - \alpha)\Phi(\pi'_{\overline{N}}) + \alpha\Phi(\pi''_{\overline{N}})$.

Образуем выпуклую комбинацию $\pi_{\overline{N}} = (1 - \alpha)\overset{*}{\pi}_{\overline{N}} + \alpha\overset{0}{\pi}_{\overline{N}}$, $0 \le \alpha \le 1$, где $\overset{*}{\pi}_{\overline{N}}$ — $\psi$-оптимальный план, а $\overset{0}{\pi}_{\overline{N}}$ — некоторый произвольный допустимый ННП. План $\pi_{\overline{N}}$ порождает информационную матрицу $\Phi(\pi_{\overline{N}}) = (1 - \alpha) \times \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}}) + \alpha\Phi(\overset{0}{\pi}_{\overline{N}})$. Дифференцируя $\psi[\Phi(\pi_{\overline{N}})]$ по $\alpha$ по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{\partial \psi [\Phi(\pi_{\overline{N}})]}{\partial \alpha} = \operatorname{tr} \frac{\partial \psi [\Phi(\pi_{\overline{N}})]}{\partial \Phi(\pi_{\overline{N}})} [\Phi(\overset{0}{\pi}_{\overline{N}}) - \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})]. \tag{11}$$

При $\alpha = 0$ матрица $\Phi(\pi_{\overline{N}}) = \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})$ и выражение (11) дает производную по направлению $\Phi(\overset{0}{\pi}_{\overline{N}}) - \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})$ в пространстве информационных матриц в «точке» минимума $\Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})$. Следовательно, необходимое условие $\psi$-оптимальности запишется в виде неравенства

$$\left. \frac{\partial \psi [\Phi(\pi_{\overline{N}})]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = 0} = \operatorname{tr} \frac{\partial \psi [\Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})]}{\partial \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})} [\Phi(\overset{0}{\pi}_{\overline{N}}) - \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})] \ge 0. \tag{12}$$

Простейший вариант условия (12) получим, полагая ННП $\overset{0}{\pi}_{\overline{N}}$ одноточечным, т. е. $\Phi(\overset{0}{\pi}_{\overline{N}})\big|_{n=1} = \sum_{l=1}^{L} N_l \Phi_l(z)$. С учетом обозначения (10) неравенство (12) перепишется в виде

$$\varphi(z, \overset{*}{\pi}_{\overline{N}}) \ge \operatorname{tr} \frac{\partial \psi [\Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})]}{\partial \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})} \Phi(\overset{*}{\pi}_{\overline{N}})$$

для любого $z \in Z$. Отсюда следует необходимость условия (9).

Как уже отмечалось выше, задачи оптимального размещения идентичных приборов структурно совпадают с задачами оптимального планирования регрессионных экспериментов. Естественно, что при $L = 1$ (приборы идентичны) сумма в (10) исчезает и наша теорема оптимальности совпадает по форме с упомянутой теоремой 2.2.1 оптимальности регрессионного эксперимента. Это обстоятельство прослеживается во всех дальнейших формулировках. Вообще, каждый математический результат в классической части теории регрессионных экспериментов имеет формальный аналог-обобщение в задачах оптимального размещения фиксированного комплекта приборов $\overline{N}$ в классе ННП. Приведем одно из них.

**Лемма 3.** Пусть размерность вектора $\theta$ и, следовательно, порядок информационной матрицы $\Phi(\pi_{\overline{N}})$ равны $m$. Тогда для любого ННП $\pi_{\overline{N}} = (z_k, p_{lk}, k = \overline{1, n}, l = \overline{1, L})$ справедливы соотношения

$$\sum_{l=1}^{L} N_l \sum_{k=1}^{n} p_{lk} \mathrm{tr}\,[G_l^{-1}(z_k) d_l(z_k, \pi_{\overline{N}})] = m, \tag{13}$$

$$\max_{z \in Z} \sum_{l=1}^{L} N_l G_l^{-1}(z) d_l(z, \pi_{\overline{N}}) \geq m, \tag{14}$$

где матрица $d_l(z, \pi_{\overline{N}})$ порядка $m$ определена формулой (5) с заменой $\Pi_{\overline{N}}$ на $\pi_{\overline{N}}$.

Доказательство равенства (13) легко получить эквивалентными преобразованиями его левой части с использованием правила $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$. Неравенство (14) следует из (13) и теоремы о среднем.

Из общей теоремы 1 оптимальности размещения фиксированного комплекта разнотипных приборов можно получить все частные теоремы оптимальности (эквивалентности) при каждом конкретном выборе функционала $\psi$. Для иллюстрации приведем теорему $D$-оптимальности ННП $\pi_{\overline{N}}^*$ (аналог теоремы эквивалентности Кифера — Вольфовица в теории эксперимента).

**Теорема 2.** Следующие утверждения:

1) план $\pi_{\overline{N}}^*$ максимизирует определитель $|\Phi(\pi_{\overline{N}})|$;

2) план $\pi_{\overline{N}}^*$ минимизирует $\max\limits_{z \in Z} \sum\limits_{l=1}^{L} N_l \mathrm{tr}\,[G_l^{-1}(z) d_l(z, \pi_{\overline{N}})]$;

3) $\max\limits_{z \in Z} \sum\limits_{l=1}^{L} N_l \mathrm{tr}\,[G_l^{-1}(z) d_l(z, \pi_{\overline{N}}^*)] = m$ — эквивалентны. Информационные матрицы всех планов $\pi_{\overline{N}}^*$, удовлетворяющих условиям 1—3, совпадают. Любая линейная комбинация планов $\pi_{\overline{N}}^*$, которые удовлетворяют условиям 1—3, также им удовлетворяет.

Доказательство. Максимизация $|\Phi(\pi_{\overline{N}})|$ эквивалентна максимизации $\ln|\Phi(\pi_{\overline{N}})|$. Функционал $\ln|\Phi(\pi_{\overline{N}})|$ вогнутый относительно информационных матриц, поэтому теорема 1 применима с заменой в (9) min на max. Учтем далее формулу дифференцирования $\frac{\partial \ln |A|}{\partial A} = A^{-1}$.

Полагая $\psi[\Phi(\pi_{\overline{N}})] = \ln|\Phi(\pi_{\overline{N}})|$, конкретизируем выражение (10):

$$\varphi(z, \pi_{\overline{N}}) = \mathrm{tr}\,\frac{\partial \ln|\Phi(\pi_{\overline{N}})|}{\partial \Phi(\cdot)} \sum_{l=1}^{L} N_l \Phi_l(z) = \mathrm{tr}\Phi^{-1}(\pi_{\overline{N}}) \times$$

$$\times \sum_{l=1}^{L} N_l \Phi_l(z) = \sum_{l=1}^{L} N_l \mathrm{tr}\Phi^{-1}(\pi_{\overline{N}}) H_l^{+}(z) \underline{G_l^{-1}(z) H_l(z)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{L} N_l \mathrm{tr} G_l^{-1}(z) H_l(z) \Phi^{-1}(\pi_{\overline{N}}) H_l(z) = \sum_{l=1}^{L} N_l \mathrm{tr}\,[G_l^{-1}(z) d_l(z, \pi_{\overline{N}})\,]. \tag{15}$$

Условие $D$-оптимальности (9)

$$\max_{z \in Z} \varphi(z, \pi_{\overline{N}}^{*}) = \mathrm{tr}\,\frac{\partial \ln |\Phi(\pi_{\overline{N}}^{*})|}{\partial \Phi(\cdot)}\,\Phi(\pi_{\overline{N}}^{*}) = \mathrm{tr}\Phi^{-1}(\cdot)\Phi(\cdot) = m. \tag{16}$$

Совместное рассмотрение (14)—(16) и дает искомую теорему.

**Алгоритмы вычисления оптимальных ННП.** Алгоритм численного решения выпуклых экстремальных задач (8) выписывается ниже в общей форме в терминах теоремы 1 об оптимальности. Алгоритм является обобщением алгоритма В. В. Федорова [1] применительно к нашим задачам оптимального в классе ННП размещения комплекта $\overline{N}$ приборов.

Алгоритм. 1. Выбирается начальный ННП $\pi_{\overline{N}}^{0}$ с невырожденной информационной матрицей $\Phi(\pi_{\overline{N}}^{0})$.

Пусть на $s$-й итерации вычислен план $\pi_{\overline{N}}^{s}$ с информационной матрицей $\Phi(\pi_{\overline{N}}^{s})$.

2. Вычисляется точка $z^s = \arg\min \varphi(z, \pi_{\overline{N}}^{s})$.

3. Формируется план $\pi_{\overline{N}}^{s+1} = (1 - \alpha_s)\pi_{\overline{N}}^{s} + \alpha_s \pi_{\overline{N}}(z^s)$, $0 < \alpha_s < 1$, где $\pi_{\overline{N}}(z^s)$ — план $\pi_{\overline{N}}$ с одним пунктом в $z^s \in Z$.

4. Сравниваются величины $\psi_{s+1} = \psi[\Phi(\pi_{\overline{N}}^{s+1})]$ и $\psi_s = \psi[\Phi(\pi_{\overline{N}}^{s})]$: а) если $\psi_{s+1} \geq \psi_s$, то $\alpha_s$ уменьшается в $\tau$ раз ($\tau > 1$) и операции 3 и 4 повторяются; б) в противном случае операции 2—4 повторяются с планом $\pi_{\overline{N}}^{s+1}$ и т. д.

5. Правило останова: $\pi_{\overline{N}}^{s}$ принимается за вычисленное значение $\psi$-оптимального $\pi_{\overline{N}}^{*}$ как только (по признаку оптимальности (9)) модуль

$$\left| -\varphi(z^s, \pi_{\overline{N}}^{s}) + \mathrm{tr}\,\frac{\partial \psi[\Phi(\pi_{\overline{N}}^{s})]}{\partial \Phi(\cdot)}\,\Phi(\pi_{\overline{N}}^{s}) \right| < \delta_1$$

или (по признаку сгущения) $(\psi_s - \psi_{s-1})/\psi_s < \delta_2$, где малые $\delta_1, \delta_2 > 0$.

Описанный алгоритм дает последовательность значений функционалов $\psi_s$, сходящихся к оптимальному значению: $\lim\limits_{s \to \infty} \psi[\Phi(\pi_{\overline{N}}^{s})] = \psi[\Phi(\pi_{\overline{N}}^{*})]$. Доказательство аналогично доказательству сходимости алгоритма В. В. Федорова [1, 2].

Возможен иной выбор последовательности $\alpha_s$ [1], а также различные модификации приведенного алгоритма, аналогичные модификациям алгоритма В. В. Федорова в [8].

Следует заметить, что алгоритм порождает последовательность планов $\pi_{\overline{N}}^{s}$ расширяющейся размерности $n$ — числа пунктов размещения приборов. Однако веса $p_{lk}^{s}$ неоптимальных точек $z_k^s$ в ходе итераций должны монотонно убывать, поэтому в описанный алгоритм естественно включить правило удаления маловесовых точек (как в алгоритмах теории эксперимента).

**Переход к точному плану.** Пусть алгоритм дает решение $\pi_{\overline{N}}$ задачи (8) как $\delta$-близкий к $\psi$-оптимальному $\pi_{\overline{N}}^{*}$. Если в нем веса $p_{lk}$ таковы, что по всем индексам $l, k$ величины $N_l p_{lk}$ — целые числа, то $\pi_{\overline{N}}$ есть решение в точных планах (см. выше пример 2). В противном случае необходимо ННП $\pi_{\overline{N}}$ округлить до целочисленного плана $\Pi_{\overline{N}}$. Для этого можно воспользоваться правилами, практически наработанными в теории регрессионных экспериментов [1, 2, 8].

В заключение заметим, что дополнительную оптимизацию по допустимым комплектам $\overline{N}$ можно построить, опираясь на лемму 1 о монотонности (пример одного алгоритма см. в [4]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971.
2. Денисов В. И. Математическое обеспечение ЭВМ — экспериментатор. М.: Наука, 1977.
3. Математическая теория планирования эксперимента /Под ред. С. М. Ермакова. М.: Наука, 1983.
4. Беседин Б. А. Некоторые задачи оптимального размещения и комплектования измерительных приборов при известной номинальной траектории // Автометрия. 1981. № 6.
5. Беседин Б. А. О размещении точек на сфере // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. Вып. 22.
6. Беседин Б. А. О некоторых подходах к построению алгоритмов оптимизации точных планов регрессионных экспериментов // Стохастические модели и информационные системы. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987.
7. Беседин Б. А., Планкова В. А. О вычислении булевых планов регрессионных экспериментов. Новосибирск, 1988. Деп. в ВИНИТИ 20.01.88, № 444-В88.
8. Ермаков С. М., Жиглявский А. А. Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987.
9. Брайсон А., Ю Ши Хо. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
10. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.

*Поступила в редакцию 7 декабря 1994 г.*

---